

МЕТОД ІНТЕРПОЛЯЦІЇ КУБІЧНИМ СПЛАЙНОМ ДИСКРЕТНОЇ ФУНКЦІЇ РИТМУ ЦИКЛІЧНОГО СИГНАЛУ ІЗ ВИЗНАЧЕНОЮ СЕГМЕНТНОЮ СТРУКТУРОЮ

В роботі розглядається задача оцінювання функції ритму деякої неперервної циклічної функції, шляхом інтерполяції кубічним сплайном вкленої в неї дискретної функції ритму, яка визначається сегментною структурою циклічного сигналу. Для розв'язку цієї задачі використовується математична модель у вигляді циклічного випадкового процесу із сегментною структурою. Визначивши сегментну структуру циклічного сигналу методами сегментації та отримавши дискретну функцію ритму із сегментної структури, постає задача оцінювання неперервної функції ритму. Запропонований метод її оцінювання - інтерполяції кубічним сплайном дискретної функції ритму. Встановлено необхідні аналітичні співвідношення для визначення коефіцієнтів інтерполяційного полінома. Представлені приклади застосування запропонованого методу інтерполяції кубічним сплайном дискретних функцій ритму циклічних сигналів в медицині, механіці та економіці. Проведений аналіз похибок різних методів інтерполяції (кусково-лінійної, кусково-квадратичної та інтерполяції кубічним сплайном) дискретних функцій ритму циклічних сигналів.

Ключові слова: циклічний сигнал, сегментна структура, функція ритму, інтерполяція кубічним сплайном.

I.V. LYTVYENKO

Ternopil Ivan Pul'uj National Technical University

METHOD OF INTERPOLATION WITH THE CUBIC SPLINE OF THE DISCRETE RHYTHM FUNCTION OF THE CYCLICAL SIGNAL WITH A DEFINED SEGMENT STRUCTURE

Abstract: This paper considers the task of evaluating the rhythm function of some continuous cyclic function, through the interpolation of a cubic spline which contains a discrete rhythm function that is defined by a segment structure of cyclical signal. In order to solve this given task, a mathematical model in the form of a cyclic random process with a segment structure is used. After having defined the segment structure of a cyclical signal with the use of the methods of segmentation and after having received the discrete function of the rhythm from the segment structure, arises the task of evaluating the continuous rhythm function. Method introduced here for its evaluation - is the interpolation of the discrete rhythm function with the cubic spline. The necessary analytical correlations are defined in order to determine the coefficient of the interpolation polynomial. Examples are provided of how the introduced method of interpolation with the cubic spline of the discrete rhythm functions of the cyclical signals can be used in medicine, mechanics and economics. Analysis of errors has been carried out for different methods of interpolation (partially-linear, partially-quadratic and interpolation with the cubic spline) of the discrete rhythm function of the cyclic signals.

Keywords: Cyclic signal, Cyclic random process, Segmentation, Segment structure, the rhythm function, interpolation of the cubic spline.

Вступ

В різних прикладних областях науки та техніки широко використовуються явища які характеризуються наявністю коливних властивостей. Такі явища та процеси називають циклічними [1-3], оскільки їх просторово-часова структура складається із послідовно слідуючих циклів. Така структура характеризує розгортання у часі чи просторі ритму явища чи процесу. Створення нових методів обробки та імітаційного моделювання таких циклічних явищ, процесів та сигналів в цифрових системах автоматизованої діагностики та прогнозу є актуальною науково-технічною задачею.

Постановка задачі дослідження

В роботах [4, 5, 6] описано математичну модель коливних явищ та сигналів у вигляді циклічної функції, зокрема введено поняття неперервного та дискретного циклічних випадкових процесів із зонною часовою структурою, що узагальнює поняття періодичної та майже періодичної функцій для детермінованих та стохастичних випадків. В роботі [7] було показано, що циклічна ритмічна структура будь-якої циклічної функції повністю описується функцією ритму, яка визначає закон зміни часових інтервалів між однофазними значеннями циклічної функції. В автоматизованих системах цифрової обробки циклічних даних, зокрема кардіодіагностичних, використовуються методи дискретизації [9], статистичної обробки [10] та імітаційного моделювання [11] циклічного сигналу, які неможливо провести без наперед визначеної функції ритму. Проте у більшості задач аналізу циклічних сигналів їх функція ритму є невідомою, а тому необхідно попередньо провести її оцінювання. У роботі [7] описано метод кусково-лінійної інтерполяції функції ритму, а у оботі [8] – метод кусково-квадратичної інтерполяції. Ппрте у більшості практичних випадків, апріорно нічого невідомо про закономірності зміни функції ритму всередині сегментів-циклів та сегментів-зон циклічного сигналу. Тому, природно, за такої невизначеності використовувати різні види інтерполяційної функції.

Основна частина

В роботах [5, 6] дано означення циклічного випадкового процесу із зонною часовою структурою (сегментною). Циклічним випадковим процесом із сегментною структурою називається такий циклічний

випадковий процес $\{x(w,t), w \in \Omega, t \in \mathbf{R}\}$ із функцією ритму $T(t,n)$, який можна подати у вигляді (через цикли процесу, сегменти-цикли):

$$x(w,t) = \sum_{i=1}^C x_i(w,t), w \in \Omega, t \in \mathbf{R}, \quad (1)$$

де C - кількість сегментів-циклів зареєстрованої реалізації циклічного процесу; $x_i(w,t)$ - відповідає i -му сегменту-циклу циклічного випадкового процесу, який визначається так:

$$x_i(w,t) = x(w,t) \cdot I_{W_i}(t), i = \overline{1, C}, w \in \Omega, t \in \mathbf{R}, \quad (2)$$

де $I_{W_i}(t)$ - індикаторна функція i -го сегменту-циклу, що дорівнює

$$I_{W_i}(t) = \begin{cases} 1, & t \in W_i, \\ 0, & t \notin W_i. \end{cases} \quad (3)$$

Області визначення W_i індикаторної функції i -го сегмента-циклу процесу, визначається через півінтервал:

$$W_i = [t_i, t_{i+1}), \quad (4)$$

де t_i - момент часу початку i -го сегмента-циклу процесу.

У випадку коли кожен цикл циклічного сигналу містить більш дрібніші сегменти-зони, як це характерно для циклічних сигналів серця, то циклічний випадковий процес може бути поданий у такій формі (через зони процесу, сегменти-зони):

$$x(w,t) = \sum_{i=1}^C \sum_{j=1}^Z x_{ij}(w,t), w \in \Omega, t \in \mathbf{R}, \quad (5)$$

де Z - кількість сегментів-зон в кожному циклі зареєстрованої реалізації циклічного процесу; $x_{ij}(t), t \in W_{ij}$ - j -тий сегмент-зона в i -му циклі циклічного випадкового процесу, що дорівнює:

$$x_{ij}(w,t) = x(w,t) \cdot I_{W_{ij}}(t) = x_i(w,t) \cdot I_{W_j}(t), i = \overline{1, C}, j = \overline{1, Z}, w \in \Omega, t \in \mathbf{R}. \quad (6)$$

де $I_{W_j}(t)$ - індикаторна функція j -го сегменту-зони в i -му циклі, що дорівнює

$$I_{W_j}(t) = \begin{cases} 1, & t \in W_j, \\ 0, & t \notin W_j. \end{cases} \quad (7)$$

Області визначення W_j індикаторної функції j -ї сегмента-зони в i -му циклі процесу, визначається через півінтервал:

$$W_j = \left[t_j, t_{j+1} \right), \quad (8)$$

де t_j - момент часу початку j -ї зони в i -му циклі процесу.

Випадковий процес (2), що відповідає i -му циклу циклічного випадкового процесу пов'язаний з випадковим процесом (6), який відповідає j -му сегменту-зоні циклічного випадкового процесу, такою залежністю:

$$x_i(w,t) = \sum_{j=1}^Z x_{ij}(t), t \in W_i, \forall i = \overline{1, C}. \quad (9)$$

Області визначення зон та циклів процесу із сегментною структурою задовольняють таким співвідношенням:

$$W_i = \bigcup_{j=1}^Z W_{ij}, \bigcup_{i=1}^C \bigcup_{j=1}^Z W_{ij} = \mathbf{R}, W_{ij} \neq \emptyset, W_{j_1} \cap W_{j_2} = \emptyset, j_1 \neq j_2. \quad (10)$$

Сегментна структура циклічного випадкового процесу задається множиною моментів часу, що відповідають початкам сегментів-зон циклічного процесу:

$$D_z = \left\{ t_j, i = \overline{1, C}, j = \overline{1, Z} \right\}, t_i = t_1, \forall i = \overline{1, C}, \quad (11)$$

При цьому для визначених моментів часу виконуються умови ізоморфізму відносно порядку відліків, які відповідають сегментам, а також рівність атрибутів значень сегментів [5, 6].

$$\begin{aligned} 1) t_j &\leftrightarrow t_{j+1}, \mathbf{K}; t_j > t_{j+1}, t \in \mathbf{W}, i = \overline{1, C}, j = \overline{1, Z}; \\ 2) p(x_{\mathbf{W}}(t_j)) &= p(x_{\mathbf{W}}(t_{j+1})) \rightarrow \mathbf{A}, t \in \mathbf{W}, w \in \mathbf{\Omega}, i = \overline{1, C}, j = \overline{1, Z}, \end{aligned} \quad (12)$$

де \mathbf{A} - множина атрибутів, наприклад, атрибутом є рівність значень всіх однофазних відліків, тобто виконується умова $f(t) = f(t + T(t, n)), t \in \mathbf{W}, n \in \mathbf{Z}$ атрибутом є рівність значень $p(f(t)) = f(t)$.

У випадку коли найдрібнішим сегментом циклічного випадкового процесу є його цикл то сегментна структура може бути задана через множину моментів часу початків його циклів: $\mathbf{D}_C = \{t_i, i = \overline{1, C}\}$.

За заданою множиною початків сегментів-зон можна визначити дискретну функцію ритму $T(t_j, n)$, що є вкладеною в неперервну $T(t, n)$, а саме:

$$T(t_j, n) = t_{j+n} - t_j, \forall n \in \mathbf{Z}, i = \overline{1, C}, j = \overline{1, Z}. \quad (13)$$

У випадку, якщо найдрібнішим сегментом циклічного випадкового процесу є його цикл, то дискретна функція ритму буде визначатися через моменти початків циклів випадкового процесу $\mathbf{X}(\mathbf{W}, t)$:

$$T(t_i, n) = t_{i+n} - t_i, \forall n \in \mathbf{Z}, i = \overline{1, C}. \quad (14)$$

Отже, відомості про початки сегментів-зон циклічного випадкового процесу дають змогу визначити його дискретну ритмічну структуру, інформація про яку міститься в дискретній функції ритму $T(t_j, n)$, що є вкладеною в неперервну функцію ритму $T(t, n)$ циклічного випадкового процесу неперервного аргументу. Приклади реалізацій циклічних сигналів та їх функцій ритму подано на рисунках 2-4.

Для визначення множини моментів часу (11) скористаємось методами сегментації [1, 12].

Отримавши $\mathbf{D}_C = \{t_i, i = \overline{1, C}\}$ або $\mathbf{D}_Z = \{t_j, i = \overline{1, C}, j = \overline{1, Z}\}$ переходимо до інтерполяції дискретної функції ритму (13) чи (14) та оцінюємо неперервну функцію ритму $T(t, n)$.

Інтерполяція функції ритму кубічним сплайном (оцінювання неперервної функції ритму)

Розглянемо вид інтерполяції – кубічною сплайн функцією. Інтерполяційна функція дискретної функції ритму $\hat{T}(t, 1)$ буде мати вигляд:

$$\hat{T}(t, 1) = \sum_{i=1}^C \sum_{j=1}^Z \hat{T}_i(t, 1), t \in \mathbf{W}, \quad (15)$$

де $\{\hat{T}_i(t, 1)\}$ - множина інтерполяційних відрізків, які рівні:

$$\hat{T}_i(t, 1) = d_{i,j} \cdot (t - t_{i,j})^3 + c_{i,j} \cdot (t - t_{i,j})^2 + b_{i,j} \cdot (t - t_{i,j}) + a_{i,j}, t_{i,j} \leq t \leq t_{i+1,j}, t \in \mathbf{W}_i, i = \overline{1, C}, j = \overline{1, Z} \quad (16)$$

Таким чином, при інтерполяції функції ритму кубічним сплайном необхідно знайти чотири множини коефіцієнтів $\left\{a_{i,j}, i = \overline{1, C}, j = \overline{1, Z}\right\}, \left\{b_{i,j}, i = \overline{1, C}, j = \overline{1, Z}\right\}$ та $\left\{c_{i,j}, i = \overline{1, C}, j = \overline{1, Z}\right\}$ і $\left\{d_{i,j}, i = \overline{1, C}, j = \overline{1, Z}\right\}$, що повністю визначають інтерполяційну функцію $\hat{T}(t, 1)$ на кожному із визначених сегментів.

Для визначення невідомих коефіцієнтів многочлена (16) необхідно $4n$ рівнянь. Частина з них, а саме $2n$, може бути отримана з умови проходження сплайна через вузли інтерполяції:

$$\hat{T}_j(t_{i,j}, 1) = \hat{T}(t_{i,j}, 1), \hat{T}_j(t_{i+1,j}, 1) = \hat{T}(t_{i+1,j}, 1), i = \overline{1, C}, j = \overline{1, Z} \quad (17)$$

$$a_{i+1,j} = \hat{T}(t_{i,j}, 1), i = \overline{1, C}, j = \overline{1, Z} \quad (18)$$

$$a_{i+1,j} + b_{i+1,j} h_{i+1,j} + c_{i+1,j} h_{i+1,j}^2 + d_{i+1,j} h_{i+1,j}^3 = \hat{T}(t_{i+1,j}, 1), i = \overline{1, C}, j = \overline{1, Z} \quad (19)$$

де $h_{i+1,j} = t_{i+1,j} - t_{i,j}$. Наступні $2n - 2$ рівняння знайдемо з умови неперервності перших і других похідних у вузлах інтерполяції, тобто з умови гладкості кривої в усіх точках. Для цього знайдемо першу і

другу похідну (16):

$$\hat{T}_j'(t,1) = b_{i+1} + 2 \cdot c_{i+1} \cdot (t - t_j) + 3 \cdot d_{i+1} \cdot (t - t_j)^2, i = \overline{1, C}, j = \overline{1, Z} \quad (20)$$

$$\hat{T}_j''(t,1) = 2 \cdot c_{i+1} + 6 \cdot d_{i+1} \cdot (t - t_j), i = \overline{1, C}, j = \overline{1, Z} \quad (21)$$

після чого порівнюємо отримані похідні в точці t_{i+1} , обчисленні через лівий і правий інтервал від t_{i+1} :

$$\hat{T}_{j+1}'(t,1) = b_{i+1} + 2 \cdot c_{i+1} \cdot (t - t_j) + 3 \cdot d_{i+1} \cdot (t - t_j)^2, \quad (22)$$

$$\hat{T}_{j+2}'(t,1) = b_{i+2} + 2 \cdot c_{i+2} \cdot (t - t_{i+1}) + 3 \cdot d_{i+2} \cdot (t - t_{i+1})^2$$

$$b_{i+1} + 2 \cdot c_{i+1} \cdot (t - t_j) + 3 \cdot d_{i+1} \cdot (t - t_j)^2 = b_{i+2} + 2 \cdot c_{i+2} \cdot (t - t_{i+1}) + 3 \cdot d_{i+2} \cdot (t - t_{i+1})^2 \quad (23)$$

$$\hat{T}_{j+1}''(t,1) = 2 \cdot c_{i+1} + 6 \cdot d_{i+1} \cdot (t - t_j), \hat{T}_{j+2}''(t,1) = 2 \cdot c_{i+2} + 6 \cdot d_{i+2} \cdot (t - t_{i+1}) \quad (24)$$

$$2 \cdot c_{i+1} + 6 \cdot d_{i+1} \cdot (t - t_j) = 2 \cdot c_{i+2} + 6 \cdot d_{i+2} \cdot (t - t_{i+1}) \quad (25)$$

Замінивши у формулах (23), (25) $t = t_{i+1}$ з урахуванням $h_{i+1} = t_{i+1} - t_j$, отримаємо:

$$b_{i+1} + 2 \cdot c_{i+1} \cdot h_{i+1} + 3 \cdot d_{i+1} \cdot h_{i+1}^2 = b_{i+2} \quad (26)$$

$$c_{i+1} + 3 \cdot d_{i+1} \cdot h_{i+1} = c_{i+2} \quad (27)$$

На даному етапі ми маємо $4n$ невідомих і $4n - 2$ рівняння. Тобто, необхідно знайти ще два рівняння. Їх отримаємо порівнявши до нуля другі похідні в першому і останньому вузлах інтерполяції: В результаті будемо мати:

$$c_1 = 0, c_c + 3 \cdot d_c \cdot h_c = 0 \quad (28)$$

Таким чином ми отримали систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яка складається з рівнянь (18), (19), (26) - (28) і з допомогою якої можна знайти невідомі коефіцієнти $\left\{ a_{i,j}, i = \overline{1, C}, j = \overline{1, Z} \right\}$, $\left\{ b_{i,j}, i = \overline{1, C}, j = \overline{1, Z} \right\}$ та $\left\{ c_{i,j}, i = \overline{1, C}, j = \overline{1, Z} \right\}$ і $\left\{ d_{i,j}, i = \overline{1, C}, j = \overline{1, Z} \right\}$. Для цього

приведемо її до більш зручного вигляду. З умови (18) знаходимо всі коефіцієнти $\left\{ a_{i,j}, i = \overline{1, C}, j = \overline{1, Z} \right\}$.

Далі, з (27) - (28) отримуємо:

$$d_{i+1} = \frac{c_{i+2} - c_{i+1}}{3 \cdot h_{i+1}}, d_c = -\frac{c_c}{3 \cdot h_c} \quad (29)$$

Підставляючи (18), (28) у формулу (19), отримаємо розрахункові формули для обчислення коефіцієнтів $\left\{ b_{i,j}, i = \overline{1, C}, j = \overline{1, Z} \right\}$:

$$b_{i+1} = \frac{\hat{T}\left(\frac{t_{i+1}}{j}, 1\right) - \hat{T}\left(\frac{t_i}{j}, 1\right)}{h_{i+1}} - \frac{h_{i+1}}{3} \cdot (c_{i+2} + 2 \cdot c_{i+1}), b_j = \frac{\hat{T}\left(\frac{t_c}{j}, 1\right) - \hat{T}\left(\frac{t_{c-1}}{j}, 1\right)}{h_c} - \frac{2 \cdot h_c \cdot c_c}{3} \quad (30)$$

Підставимо тепер формули (29), (30) у формулу (27), і таким чином виключимо з неї невідомі $\left\{ b_{i,j}, i = \overline{1, C}, j = \overline{1, Z} \right\}$ та $\left\{ d_{i,j}, i = \overline{1, C}, j = \overline{1, Z} \right\}$. В результаті отримуємо систему рівнянь з

трьохдіагональною матрицею у якій невідомими являються тільки коефіцієнти $\left\{ c_{i,j}, i = \overline{1, C}, j = \overline{1, Z} \right\}$:

$$c_1 = 0, c_c = 0,$$

$$h_j \cdot c_j + 2 \cdot (h_j + h_{j+1}) \cdot c_{j+1} + h_{j+1} \cdot c_{j+2} = 3 \cdot \left(\frac{\hat{T}(t_{j+1}, 1) - \hat{T}(t_j, 1)}{h_{j+1}} - \frac{\hat{T}(t_j, 1) - \hat{T}(t_{j-1}, 1)}{h_j} \right), \quad (31)$$

Згідно із умовами [4, 5, 6], що накладаються на інтерполяційну функцію $\hat{T}(t, 1)$ її похідна повинна бути більшою за -1, а це можливо лише коли похідні функцій $\{\hat{T}_j(t, 1)\}$ будуть більшими ніж -1.

Похідні функцій $\{\hat{T}_j(t, 1)\}$ дорівнюють

$$\hat{T}_j'(t, 1) = 3 \cdot d_j^2 \cdot t + 2 \cdot a_j \cdot t + b_j > -1, \quad i = \overline{1, C}, \quad j = \overline{1, Z}, \quad t \in \mathbf{W} \quad (32)$$

На практиці не завжди буде виконуватись умова (32) із-за коефіцієнтів $\left\{ a_j, i = \overline{1, C}, j = \overline{1, Z} \right\}$, $\left\{ b_j, i = \overline{1, C}, j = \overline{1, Z} \right\}$, $\left\{ c_j, i = \overline{1, C}, j = \overline{1, Z} \right\}$ та $\left\{ d_j, i = \overline{1, C}, j = \overline{1, Z} \right\}$. Тому, пропонується в методи інтерполяції кубічним сплайном дискретної функції ритму використовувати її як додаткову умову. У випадках коли вона не виконується використовувати заміну інтерполяції кубічним сплайном на лінійну, таким чином ми зможемо забезпечити необхідну умову для функції ритму $\hat{T}'(t, 1) > -1$, оскільки для лінійної інтерполяції завжди виконується дана умова для функції ритму [7, 8]. У таких випадках для лінійної інтерполяції будемо визначати коефіцієнти $\left\{ k_j, i = \overline{1, C}, j = \overline{1, Z} \right\}$ та $\left\{ m_j, i = \overline{1, C}, j = \overline{1, Z} \right\}$, а інтерполяційний поліном буде мати вигляд:

$$\hat{T}_j(t, 1) = k_j \cdot t + m_j, \quad i = \overline{1, C}, \quad j = \overline{1, Z}, \quad t \in \mathbf{W}, \quad (33)$$

де коефіцієнти:

$$k_j = \frac{\hat{T}(t_{j+1}, 1) - \hat{T}(t_j, 1)}{t_{j+1} - t_j}, \quad (34)$$

$$m_j = \hat{T}(t_j, 1) - \frac{\hat{T}(t_{j+1}, 1) - \hat{T}(t_j, 1)}{t_{j+1} - t_j} \cdot t_{j+1}, \quad i = \overline{1, C}, \quad j = \overline{1, Z-1}, \quad t \in \mathbf{W}. \quad (35)$$

Структурна схема запропонованого методу оцінювання функції ритму (алгоритмічне забезпечення) подана на рисунку 1.

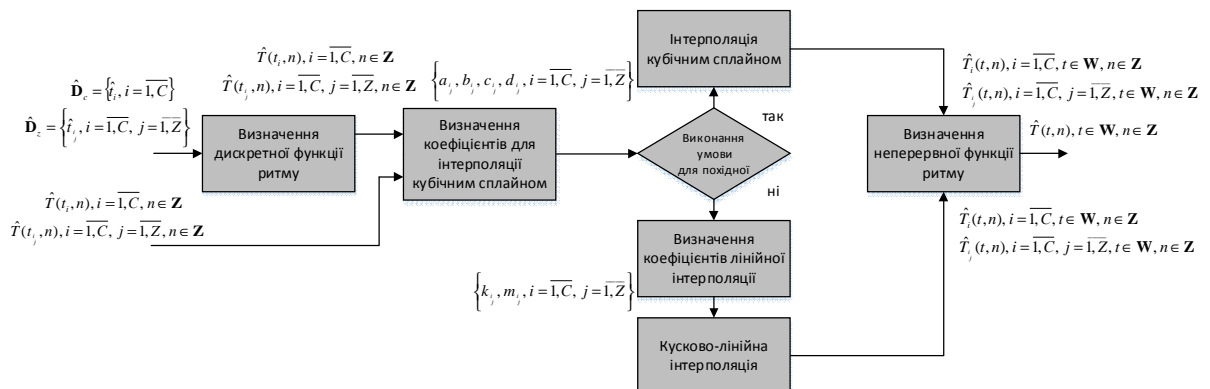


Рис. 1. Структурна схема методу оцінювання функції ритму циклічного сигналу методом інтерполяції кубічним сплайном

Застосуємо отримані вище співвідношення для оцінювання функції ритму різних циклічних сигналів. Дискретну функцію ритму отримуємо застосувавши методи сегментації циклічного сигналу [1,12]. На рисунку 2 подані електрокардіосигнал та дискретна функція ритму (дані подано в умовних одиницях).

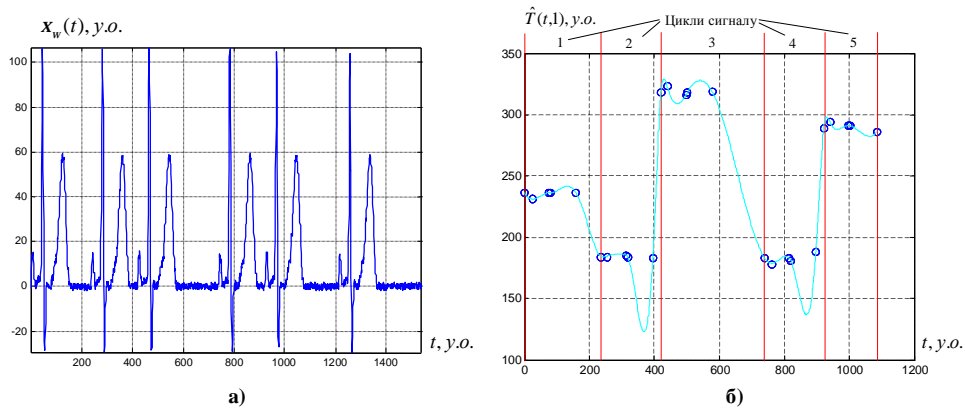


Рис. 2. Електрокардіосигнал та інтерполяція його дискретної функції ритму
а) Електрокардіосигнал; б) результати інтерполяції кубічним сплайном дискретної функції ритму

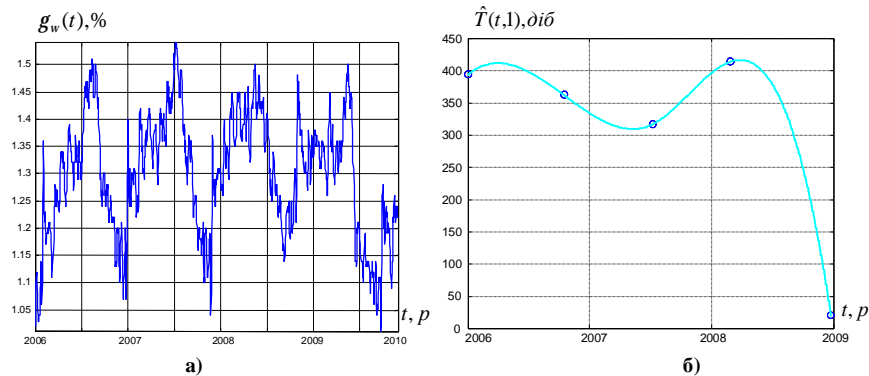


Рис. 3. Економічний циклічний процес та інтерполяція його дискретної функції ритму
а) Економічний циклічний процес (індекс активності автофінансування США); б) результати інтерполяції кубічним сплайном дискретної функції ритму

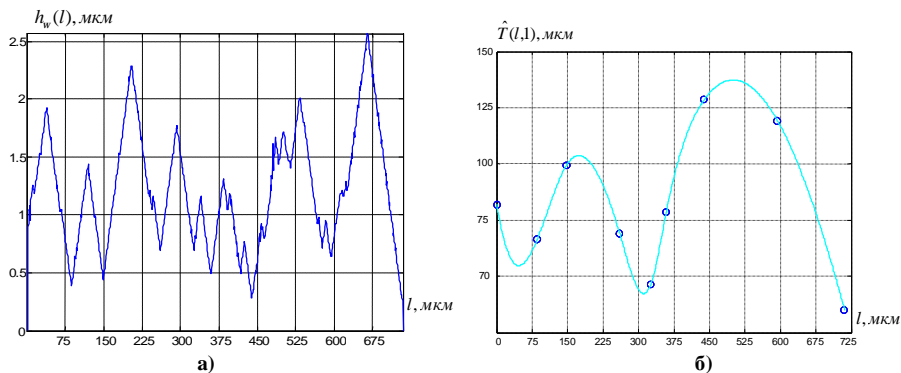


Рис. 4. Процес впорядкованого рельєсоутворення поверхні сталюого візця та інтерполяція його дискретної функції ритму
а) Процес впорядкованого рельєсоутворення поверхні сталюого візця при обробці на повітрі (процес подано у вигляді «ширина елемента рельєфа - довжина розглядаємої області»); б) результати інтерполяції кубічним сплайном дискретної функції ритму

Розроблений метод побудови інтерполяційної функції, є простим і не завжди адекватно описує закон зміни функції ритму реальних циклічних сигналів, оскільки нічого невідомо про закономірності зміни функції ритму всередині сегментів-циклів та сегментів-зон циклічних сигналів. У зв'язку із цим необхідно розробити методи які б могли оцінити додаткові відліки дискретної функції ритму та методи адаптивної інтерполяції із використанням поліномів різного порядку.

Аналіз похибок методів оцінювання функцій ритму

Для аналізу похибок методів оцінювання функцій ритму змодельємо різні функції ритму деяких циклічних сигналів, як приклад, одна неперервна функція ритму подана на рисунку 5 (дискретна функція ритму не показана). Точність методу інтерполяції дискретної функції ритму залежить від багатьох факторів [13] перш за все залежить від точності і правильності визначення сегментної структури, моментів часу початку сегментів-циклів та сегментів-зон. При цьому, чим більше досліджуваний сигнал буде містити сегментів-зон на циклі тим більше ми отримаємо інформації про відліки дискретної функції ритму і тим самим буде більше точність її оцінювання (інтерполяції).

Щоб не закладати похибок які можуть бути на етапі сегментації використаємо наперед відомі дискретні функції ритму які є вкладеними в модельовані.

Середньоквадратичні абсолютна та відносна похибки визначалися наступним чином:

$$\Delta T_i(k) = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{l=1}^L (T(t_{l,1}) - \hat{T}_i(t_{l,1}))^2}, \quad dT_i(k) = \frac{\Delta T_i(k)}{\sqrt{\frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \hat{T}_i(t_{l,1})^2}}, \quad k = \overline{1, L}, \quad (36)$$

де $T(t_{l,1})$ - значення змодельованої функції ритму; $\hat{T}_i(t_{l,1})$ - оцінена функція ритму, одним із аналізуємих методів інтерполяції $i = \overline{1,3}$; L - кількість відліків функції ритму, $l = \overline{1, L}$; k - відлік для абсолютної та відносної похибок відповідно, $k = \overline{1, L}$.

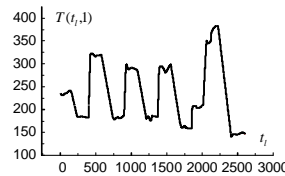


Рис. 5. Змодельована тестова реалізація функції ритму

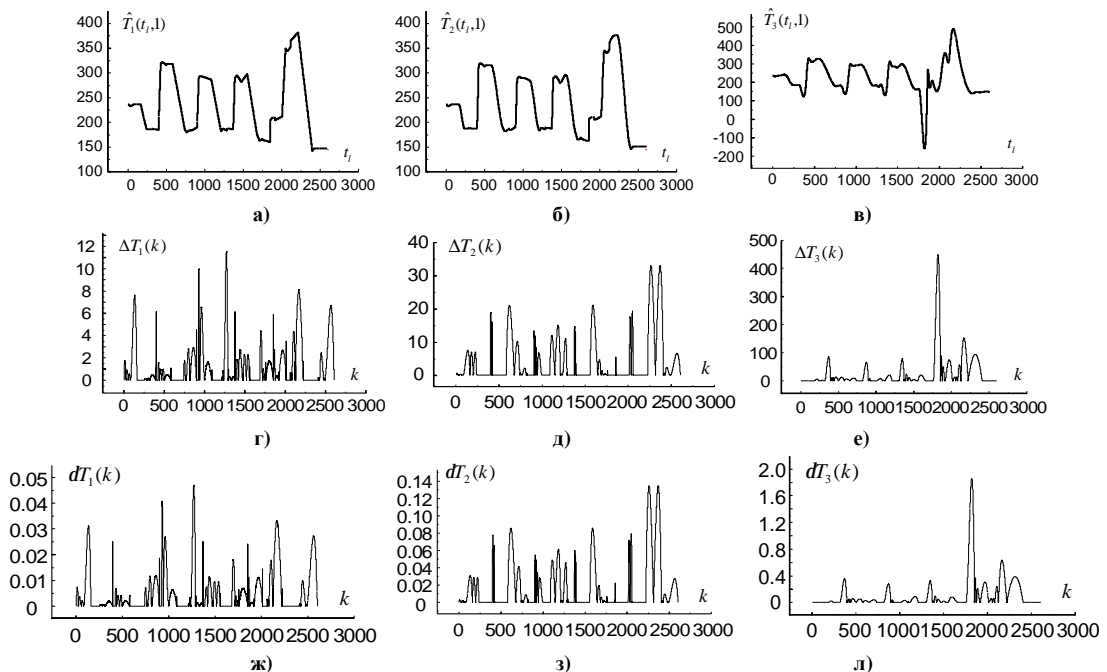


Рис. 6. Результати визначення абсолютних та відносних похибок оціненої функції ритму:

а) оцінена функція ритму методом кусково-лінійної інтерполяції; б) оцінена функція ритму методом кусково-квадратичної інтерполяції; в) оцінена функція ритму методом інтерполяції кубічним сплайном; г), д), е) абсолютні похибки оціненої функції ритму; ж), з), л) відносні похибки оціненої функції ритму

Проводячи аналіз отриманих похибок, необхідно відмітити, що хоча запропонований метод, серед аналізуємих, дає більшу відносну похибку (див. рис. 6 л), на всій реалізації, в порівнянні з іншими, проте, на більшості сегментів відносна похибка значно менше в порівнянні з відносними похибками рисунок 6 ж) та 6 з). Це говорить про те, що в подальших дослідженнях необхідно розробити метод який би міг адаптуватись під різні дискретні функції ритму і на сегментах-зонах чи сегментах-циклах він дозволяв би змінювати тип інтерполяційної функції.

Висновки

В даній роботі розроблено метод інтерполяції функції ритму кубічним сплайном на основі врахування інформації про сегментну структуру. Отримано відповідні розрахункові формули для визначення коефіцієнтів інтерполяційного полінома. Даний метод інтерполяції доповнює апарат обробки циклічних сигналів і може бути використаний в цифрових системах автоматизованої комп'ютерної обробки реальних циклічних даних в медицині, механіці чи економіці. Проведена оцінка точності різних методів інтерполяції функції ритму циклічних сигналів. Відносна похибка запропонованого методу в загальному випадку не перевищує 12 %.

У подальших дослідженнях планується дослідити питання вибору оптимального інтерполяційного полінома: лінійного, квадратичного чи кубічного в задачах інтерполяції дискретної функції ритму різних циклічних сигналів.

Література

1. Литвиненко Я. Статистичний метод визначення зонної структури електрокардіосигналу в автоматизованих діагностичних системах / Я. Литвиненко, С. Лупенко, Л. Щербак // Вісник Тернопільського державного технічного університету. — Тернопіль, 2005. — Т. 10, № 3. — С. 165-175.
2. Литвиненко Я. В. Імітаційне моделювання взаємопов'язаних економічних процесів на основі вектора циклічних ритмічно пов'язаних випадкових процесів / Я. В. Литвиненко, С. А. Лупенко, Н. Р. Дем'янчук, А. Б. Горкуненко // Електроніка та системи управління / Національний авіаційний університет. — Київ, 2011. — № 2 (28). — С. 133-141.
3. Lytvynenko I.V., Marushchak P.O. Analysis of the State of the Modified Nanotitanium Surface with the Use of the Mathematical Model of a Cyclic Random Process. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 2015, Vol. 51, No. 3, pp. 254-263.
4. Лупенко С. А. Детерминированные и случайные циклические функции как модели колебательных явлений и сигналов: определение и классификация / С. А. Лупенко // Электронное моделирование / Ин-т проблем моделирования в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины. — Киев, 2006. — Т. 28, № 4. — С. 29-45.
5. Лупенко С. Випадковий процес із зонною часовою структурою та сімейство його функцій розподілу / С. Лупенко // Вісник Тернопільського державного технічного університету. — Тернопіль, 2005. — Т. 10, № 4. — С. 183-192.
6. Лупенко С. Циклічні та періодичні випадкові процеси із зонною часовою структурою та їх ймовірнісні характеристики / С. Лупенко // Вісник Тернопільського державного технічного університету. — Тернопіль, 2006. — Т. 11, № 2. — С. 150-155
7. Лупенко С. А. Завдання інтерполяції функції ритму циклічної функції з відомою зонною структурою / С. А. Лупенко // Електроніка та системи управління / Національний авіаційний університет. — Київ, 2007. — № 2 (12). — С. 27-35.
8. Lytvynenko I.V. Method of the quadratic interpolation of the discrete rhythm function of the cyclical signal with a defined segment structure / I.V. Lytvynenko / *Scientific Journal of the Ternopil national technical university*. 2016, Vol. 84, No. 4, pp. 131-138.
9. Лупенко С. Особливості дискретизації циклічних функцій / С. Лупенко // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. — Хмельницький, 2006. — № 1. — С. 64-70.
10. Лупенко С. А. Статистичні методи обробки циклічного випадкового процесу / С. А. Лупенко // Електроніка та системи управління / Національний авіаційний університет. — Київ, 2006. — № 2 (8). — С. 59-65.
11. Lytvynenko I.V., Maruschak P.O., Lupenko S.A. Processing and modeling of ordered relief at the surface of heat-resistant steels after laser irradiation as a cyclic random process. *Automatic Control and Computer Science*, 2014, Vol. 48, No. 1, pp. 1-9.
12. Lytvynenko I.V., Maruschak P., Lupenko S., Panin S. Segmentation and Statistical Processing of Geometric and Spatial Data on Self-Organized Surface Relief of Statically Deformed Aluminum Alloy. *Applied Mechanics and Materials*, 2015, Vol. 770, pp. 288-293.
13. Лупенко С.А. Теоретичні основи моделювання та опрацювання циклічних сигналів в інформаційних системах. (Монографія) / Лупенко С.А. — Львів: В-во Магнолія 2006, 2016. — 343 с.

References

1. Lytvynenko I., Lupenko S., Shcherbak L. Statystychnyy metod vyznachennya zonnoyi struktury elektrokardiosyhnalu v avtomatyzovanykh diahnostychnykh systemakh, *Visnyk Ternopil's'koho derzhavnoho tekhnichnoho universytetu*, Ternopil', 2005, Vol. 10, No. 3, pp. 165-175 [in Ukrainian].
2. Lytvynenko I.V., Lupenko S.A., Dem"yanchuk N.R., Horkunenko A.B. Imitatsiyne modelyuvannya vzayemopov'yazanykh ekonomichnykh protsesiv na osnovi vektora tsyklichnykh rytymichno pov'yazanykh vypadkovykh protsesiv. *Elektronika ta systemy upravlinnya. Natsional'nyy aviatsiynnyy universytet*, Kyiv, 2011. Vol. 28, No. 2, pp. 133-141 [in Ukrainian].
3. Lytvynenko I.V., Marushchak P.O. Analysis of the State of the Modified Nanotitanium Surface with the Use of the Mathematical Model of a Cyclic Random Process. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 2015, Vol. 51, No. 3, pp. 254-263.
4. Lupenko S. A. Determinovani i vypadkovi tsyklichni funksi yak modeli kolyvalnykh yavyshech i syhnaliv: vyznachennia ta klasyfikatsii. *Elektronne modelyuvannya. In-t problem modelyuvannya v enerhetytsi im. H. Ye. Pukhova NAN Ukrainy*. Kyiv, 2006. Vol. 28, No.4, pp. 29-45 [In Russian].
5. Lupenko S. Vypadkovyy protses iz zonnouy chasovouy strukturoyu ta simeystvo yoho funksiyy rozpodilu. *Visnyk Ternopil's'koho derzhavnoho tekhnichnoho universytetu*, Ternopil', 2005. Vol. 10, No. 4, pp. 183-192 [in Ukrainian].
6. Lupenko S. Tsyklichni ta periodychni vypadkovi protsesy iz zonnouy chasovouy strukturoyu ta yikh ymovirnisni kharakterystyky. *Visnyk Ternopil's'koho derzhavnoho tekhnichnoho universytetu*, Ternopil', 2006, Vol. 11, No. 2, pp. 150-155 [in Ukrainian].
7. Lupenko S. A. Zavadannya interpolyatsiyi funksiyyi rytmu tsyklichnoyi funksiyyi z vidomouy zonnouy strukturoyu. *Elektronika ta systemy upravlinnya. Natsional'nyy aviatsiynnyy universytet*. Kyiv, 2007, Vol. 12, No. 2, pp. 27-35 [in Ukrainian].
8. Lytvynenko I.V. Method of the quadratic interpolation of the discrete rhythm function of the cyclical signal with a defined segment structure / I.V. Lytvynenko / *Scientific Journal of the Ternopil national technical university*. 2016, Vol. 84, No. 4, pp. 131-138.
9. Lupenko S. Osoblyvosti dyskretyzatsiyi tsyklichnykh funksiyy. *Vymiryval'na ta obchyslyval'na tekhnika v tekhnolohichnykh protsesakh*, Khmel'nyts'kyu, 2006. No. 1, pp. 64-70 [in Ukrainian].
10. Lupenko S. A. Statystychni metody obrobky tsyklichnoho vypadkovoho protsesu. *Elektronika ta systemy upravlinnya. Natsional'nyy aviatsiynnyy universytet*, Kyiv, 2006. Vol.8, No. 2, pp. 59-65 [in Ukrainian].
11. Lytvynenko I.V., Maruschak P.O., Lupenko S.A. Processing and modeling of ordered relief at the surface of heat-resistant steels after laser irradiation as a cyclic random process. *Automatic Control and Computer Science*, 2014, Vol. 48, No. 1, pp. 1-9.
12. Lytvynenko I.V., Maruschak P., Lupenko S., Panin S. Segmentation and Statistical Processing of Geometric and Spatial Data on Self-Organized Surface Relief of Statically Deformed Aluminum Alloy. *Applied Mechanics and Materials*, 2015, Vol. 770, pp. 288-293.
13. Lupenko S.A. Teoretychni osnovy modelyuvannya ta opratsyuvannya tsyklichnykh syhnaliv v informatsiynnykh systemakh. *Monohrafyya*, L'viv, Mahnoliya 2006, 2016. 343 p. [in Ukrainian].

Рецензія/Peer review : 21.06.2017 р.

Надрукована/Printed : 13.10.2017 р.

Стаття рецензована редакційною колегією