БІОМЕДИЧНІ ВИМІРЮВАННЯ І ТЕХНОЛОГІЇ

УДК 621.03.9

Ю.Ю. ГОНЧАРЕНКО, О.М. МИРОШНИК,
О.А. ВЫСОТЕНКО, Т.В. КАЧУР, А.С. РЫЖКИН
Государственное предприятие «Институт геохимии окружающей среды НАН Украины»

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЗАЩИТЫ ЛЮДЕЙ ОТ ПОРАЖАЮЩИХ ФАКТОРОВ РАДИОАКТИВНОГО И ХИМИЧЕСКОГО ЗАГРЯЗНЕНИЯ АТМОСФЕРЫ

В работе приводится теоретическое решение задачи защиты людей от поражающих факторов радиоактивного и химического загрязнения атмосферы во временных укрытиях на открытой местности, которые могут произойти во время техногенных аварий на охраняемых объектах критической инфраструктуры. Показано, что полученная математическая модель состоит из трех зависимостей, первая из которых описывает потенциал простого слоя воздушного потока, образующегося в процессе нагнетания воздуха в локальный объем, вторая - показывает разницу между функцией плотности простого воздушного потока и матрицей его приближенного интегрального представления, а третья описывает коэффициенты разложения, определяемые с заданной точностью.

Ключевые слова: защита людей, математическая модель, воздушный поток, локальный объем, радиоактивное и химическое загрязнение атмосферы.

YU. YU. GONCHARENKO, O.M. MIROSHNIK,
O.A. VYSOTENKO, T.V. KACHUR, A.S. RYZHKIN
State Institution «Institute of Environmental Geochemistry of the NAS of Ukraine»

THEORETICAL SOLUTION OF THE PROTECTION OF PEOPLE FROM THE DAMAGING FACTORS OF THE RADIOACTIVE AND THE CHEMICAL POLLUTION OF THE ATMOSPHERE

The paper provides a theoretical solution to the problem of developing a mathematical model for protecting people from the damaging factors of radioactive and chemical pollution of the atmosphere in temporary shelters in open areas that can occur during technogenic accidents at protected critical infrastructure sites. It reduces to the problem of air injection in a local volume and the movement of air flow in a local volume. These problems belong to the class of boundary problems of mathematical physics, which are solved by the method of expansion in non-orthogonal functions. To do this, we take a multidimensional multiply connected domain bounded by a multilayer surface and a system of vector functions, each of which is linearly independent and complete in the space under consideration and square integrable vector-functions on the used surface. Then we can consider an approximate solution of the problem, which tends to an exact solution under the condition that this problem is correct. In the case of incorrect boundary-value problems, a reasonable approximation is used to solve this problem. In other words, the solution of this boundary value problem is representable as the "simple layer potential" of the representation function, which can be expanded in a system of nonorthogonal functions with arbitrarily high accuracy. That is, the solution of the problem of air injection and air flow movement in a local volume is represented by a system of equations in which the first dependence describes the potential of a simple airflow layer formed during the air injection process into the local volume, the second shows the difference between the simple airflow density function and the matrix Its approximate integral representation, and the third describes the expansion coefficients determined by the accuracy of the solution of the problem.

Keywords: Protection of people, mathematical model, air flow, local volume, radioactive and chemical pollution of the atmosphere.

Введение

Последние десятилетия Украина остается в статусе страны техногенных аварий и катастроф [1, 2], которые сопровождаются загрязнением атмосферы и распространением опасных и токсичных химических соединений. Пожары, происходящие в Чернобыльской зоне и других «мертвых» лесных массивах, приводят не только к химическому, но и к радиоактивному загрязнению воздушной среды.

Как показывает мировой опыт, в качестве грязных бомб террористы могут использовать радиоактивные и отравляющие вещества, которые взрывной волной выбрасываются в атмосферу и ветром разносятся на большие расстояния [3-5]. С этой точки зрения защита объектов критической инфраструктуры сужается до защиты персонала от поражения токсичными и радиоактивными веществами, распыленными в атмосфере. Временными укрытиями на открытой местности в интересах защиты людей от поражающих факторов радиоактивного и химического загрязнения атмосферы могут быть палатки, оснащенные малогабаритными фильтровентиляционными установками, работающими от переносных источников электропитания, изготовленные из легких полимерных материалов, не пропускающих радиоактивные и отравляющие вещества.

Исходя из сказанного выше, решение задачи защиты людей от поражающих факторов радиоактивного и химического загрязнения атмосферы во временных укрытиях на открытой местности, возникающих при техногенных авариях и катастрофах на охраняемых объектах критической инфраструктуры, является актуальной научной задачей. Для ее теоретического решения можно использовать классическую теорию поля и векторный анализ [6-9].

Основная часть

Теоретическое решение задачи защиты людей от поражающих факторов радиоактивного и химического загрязнения атмосферы сводится к формализации процесса нагнетания воздуха в локальном объеме и движения воздушного потока в нем. Эти задачи относятся к классу граничных задач математической физики, которые решаются методом разложения по неортогональным функциям.

Пусть G – многомерная многосвязная область в $\boldsymbol{R}^n$, ограниченная поверхностью Γ. Рассмотрим общую граничную задачу

$$Lu(x)=0, \qquad x\in G, \tag{1}$$

$$lu(x)|_{\Gamma}=y\ (y), \qquad y\in G, \tag{2}$$

тогда использование метода разложения по неортогональным функциям решения граничной задачи (1), (2) заключается в следующем.

Пусть $\{y_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ – система вектор-функций y_k, удовлетворяющих следующим трем условиям:

каждая функция $y_k(x)$ удовлетворяет уравнению (1);

для каждой функции $y_k(x)$ на Γ определена новая функция $ly_k(y)$, где l – оператор, описанный в граничном условии (2);

система функций $\{ly_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$ является линейно независимой и полной в пространстве $L_2(\Gamma)$ интегрируемых в квадрате вектор-функций на Γ.

Найдем коэффициенты a_k наилучшего (в смысле $L_2(\Gamma)$) разложения функции $y\ (y)$ по первым N функциям системы $\{ly_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$:

$$y\ (y)\approx\sum_{k=1}^{N}a_k^{(N)}ly_k(y), \tag{3}$$

тогда

$$u^{(N)}(x)=\sum_{k=1}^{N}a_k^{(N)}y_k(x) \tag{4}$$

можно считать приближенным решением задачи (1), (2), которое при $N\to\infty$ стремится к точному решению u при условии корректности этой задачи. В случае некорректных граничных задач используют разумное приближение для решения этой задачи.

Пусть имеется некоторое интегральное представление решения задачи (1), (2):

$$u(x)=\int_{\Gamma}y\ (y)H(x,y)dS_y+F_1(x), \tag{5}$$

где $H(x,y)=\lfloor H_1(x,y),...,H_m(x,y)\rfloor$ – ядро (функция Грина, Неймана, Кельвина и другие) удовлетворяет неравенству

$$\int_{\Gamma}\left[H_i(x,y)\right]^2dS_y<\infty, \qquad (i=1,2,...,m). \tag{6}$$

Для любой точки $x\in G$, $F_1(x)$ – известная функция. Ввиду того, что приближенное решение (4) удовлетворяет граничной задаче

$$Lu^{(N)}(x)=0, \qquad x\in G,$$

$$lu^{(N)}(x)|_{\Gamma}=\sum_{k=1}^{N}a_k^{(N)}ly_k(y),$$

то, применяя для него интегральное представление (5), получим:

$$u^{(N)}(x)=\int_{\Gamma}\sum_{k=1}^{N}a_k^{(N)}ly_k(y)H(x,y)dS_y+F_2. \tag{7}$$

Вычитая последнее равенство из (5), получаем

$$\left|u(x)-u^{(N)}(x)\right|\le\left|\int_{\Gamma}\left[y\ (y)-\sum_{k=1}^{N}a_k^{(N)}ly_k(y)\right]H(x,y)dS_y\right|+\left|F_1-F_2\right|. \tag{8}$$

Применив к первому слагаемому в правой части (8) неравенство Коши-Буняковского, получим, что точное решение $u(x)$ задачи (1), (2) отличается от приближенного решения $u^{(N)}(x)$ на $|F_1-F_2|$, что является естественным для соответствующих граничных задач, и на член, стремящийся к нулю при $N\to\infty$.

Следовательно, основная трудность решения задачи заключается в выборе системы функций $\{y_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющих условиям (1)-(3).

Пусть условие полноты в $L_2(\Gamma)$ можно заменить полнотой системы функций $\{ly_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ в подпространстве $\overline{L_2(\Gamma)}$ пространства $L_2(\Gamma)$, элементы которого обеспечивают хотя бы одно решение задачи.

В случае задачи Неймана для уравнения Лапласа $L_2(\Gamma)$ совпадает с ортогональным дополнением постоянной до $L_2(\Gamma)$, что естественно для этой задачи, так как для ее разрешимости в этом случае необходимо и достаточно выполнение условия $\int_{\Gamma} y\ (y)dS_{\ y} = 0$ ·

Для задачи Дирихле $\overline{L_2(\Gamma)}$ совпадает с $L_2(\Gamma)$, ибо решение в этом случае существует для произвольной функции $y\ (y) \in L_2(\Gamma)$, поэтому в дальнейшем будем предполагать полноту в $\overline{L_2(\Gamma)}$.

Перечисленным выше условиям удовлетворяет определенным образом построенная система фундаментальных решений уравнения (1). Рассмотрим в области $\boldsymbol{R}^n \setminus G$ замкнутую поверхность Γ_1, целиком охватывающую Γ и не имеющую с ней общих точек, причем если G – многосвязная, т. е. Γ состоит из отдельных замкнутых поверхностей (рис. 1), то и Γ_1 состоит из такого же числа замкнутых поверхностей (показаны штриховой линией).

Пусть $\{z_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \Gamma$ всюду плотное множество точек, т. е. сколь угодно малый участок поверхности Γ содержит, по крайней мере, одну точку множества $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$.

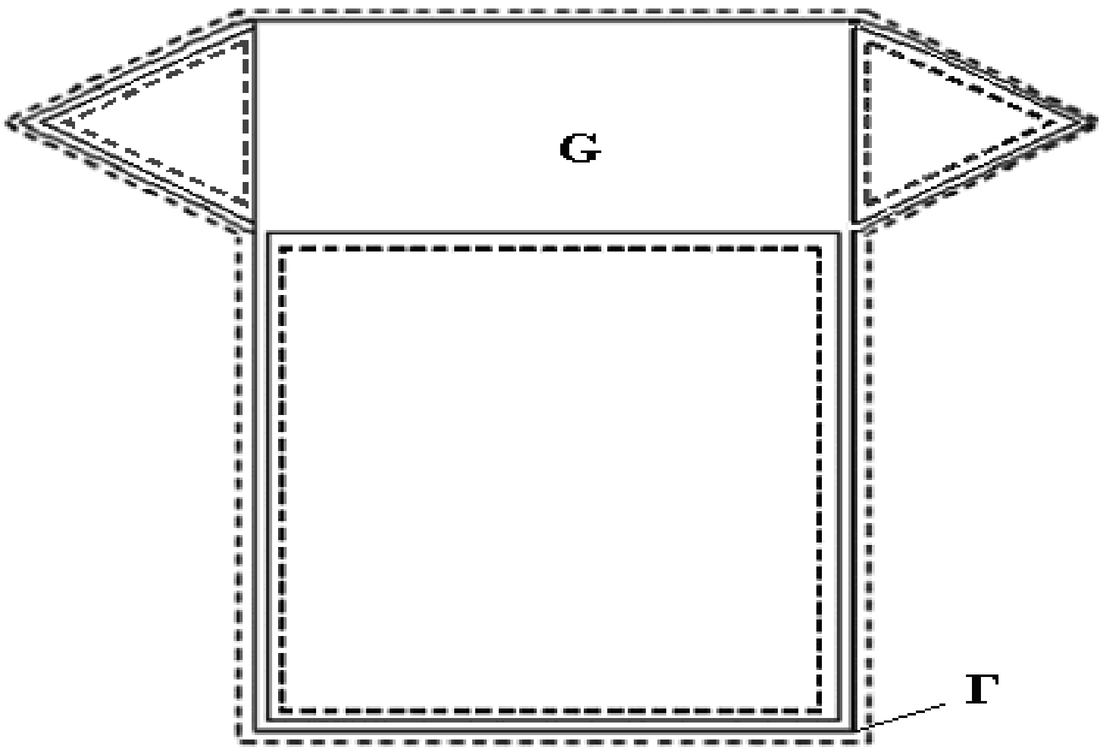

Рис. 1. Схема многосвязных поверхностей.

Возьмем матрицу фундаментальных решений $H(z_{k,} y)$ уравнения (1), соответствующую этим точкам $z_{k,}$ и рассмотрим систему вектор-функций

$$\{lH_i(z_k, y\} = \{ly\ _{k,i}(y)\}. \tag{9}$$

Покажем, что при определенных условиях система (9) полная.

Пусть решение граничной задачи (1), (2) можно продолжить на область G_1, ограниченную поверхностью Γ_1 так, что оно будет удовлетворять граничной задаче:

$$\begin{aligned} &\overline{Lu}(x) = 0, \quad x \in G_1, \\ &\bar{u}(x)|_{\Gamma_1} = \bar{y}\ (z), \end{aligned} \tag{10}$$

где $\bar{y}(z)$ – произвольная ограниченная функция, обеспечивающая существование решения граничной задачи (10).

Допустим, что решение задачи (10) удовлетворяет на Γ условию

$$\|\tilde{y}\ (y) - y\ (y)\|_{L_{2(\Gamma)}} \overset{del}{=} \sum_{i=1}^{m} \|\tilde{y}^{\ (i)}(y) - y^{\ (i)}(y)\|_{L_{2(\Gamma)}} < e\ , \tag{11}$$

где $\tilde{y}\ (y) = l\tilde{u}(x)|_{\Gamma}, e > 0$ сколь угодно мало, и это решение представимо в виде «потенциала простого слоя»:

$$\tilde{u}(x)=\int_{\Gamma} H(z,x)\hat{y}(z)dS_z\,, \qquad (12)$$

где $\hat{y}(z)$ – «плотность простого слоя», а $H(z,x)$ – ядро (матрица) интегрального представления.

Для того, чтобы систему (9) можно было применять для решения граничной задачи (1), (2), достаточно доказать, что она дает возможность сколь угодно хорошей аппроксимации граничной функции $y(y)$.

Рассмотрим функцию (12) на поверхности Γ, применив к ней оператор l, получим

$$\tilde{y}(y)=\int_{\Gamma_1}[lH(z,x)]\hat{y}(z)dS_z\,. \qquad (13)$$

В развернутом виде это равенство принимает вид

$$\tilde{y}^{(1)}(y)=\int_{\Gamma_1}[l_1H_{11}(z,y)\hat{y}_1(z)+l_2H_{12}(z,y)\hat{y}_2(z)+...+l_mH_{1m}(z,y)\hat{y}_m(z)]dS_z,$$

$$\tilde{y}^{(2)}(y)=\int_{\Gamma_1}[l_1H_{21}(z,y)\hat{y}_1(z)+l_2H_{22}(z,y)\hat{y}_2(z)+...+l_mH_{2m}(z,y)\hat{y}_m(z)]dS_z\,,$$

……………………………………………………………………

$$\tilde{y}^{(m)}(y)=\int_{\Gamma_1}[l_1H_{m1}(z,y)\hat{y}_1(z)+l_2H_{2m}(z,y)\hat{y}_2(z)+...+l_mH_{mm}(z,y)\hat{y}_m(z)]dS_z\,,$$

где $H_{i,j}(x,y)$ – элементы матрицы $H(x,y)$.

Покажем, что для любого $e>0$ найдется такое N_0 и такая система коэффициентов $b_{ki}^{(N)}(k=1,2,.....,N)$, что при $N\geq N_0$ выполняется неравенство:

$$\left\| y(y)-\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{m} b_{ki}^{(N)} lH_i(z_k,y)\right\|_{L_2(\Gamma)}\leq e\,. \qquad (14)$$

Действительно,

$$\left\| y(y)-\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{m} b_{ki}^{(N)} lH_i(z_k,y)\right\|_{L_2(\Gamma)}\leq$$

$$\leq\left\| y(y)-\tilde{y}(y)\right\|_{L_2(\Gamma)}+\Big\|_{L_2(\Gamma)}\leq\left\|\tilde{y}(y)-\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{m} b_{ki}^{(N)} lH_i(z_k,y)\right\|_{L_2(\Gamma)}\leq \qquad (15)$$

$$\leq e_1+\sum_{i=1}^{m}\left\|\tilde{y}^i(y)-\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{m} b_{ki}^{(N)} l_jH_{ij}(z_k,y)\right\|,$$

где e_1 сколь угодно мало.

Оценим последнее слагаемое в правой части, заменив интеграл в (13`) некоторой кубатурной формулой с узлами в точках z_k:

$$\tilde{y}^{(i)}(y)=\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{m} A_k l_i H_{ji}(z_k,y)\tilde{y}_i(z_k)+E_N^{(i)}(y)\,,$$

где A_k – коэффициенты кубатурной формулы, а $E_N^{(i)}$ – ее остаточный член, при этом предположим, что число узлов N столь велико, что неравенство

$$\left|E_N^{(i)}(y)\right|<e_2 \qquad (16)$$

выполняется для любого $y\in\Gamma$, $j=1,2,...,m,$ а e_2 произвольно мало. Тогда с учетом (10) и (15) из неравенства (14) получим оценку:

$$\left\| y(y)-\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{m} b_{ki} lH_i(z_k,y)\right\|\leq e_1+\sqrt{|\Gamma|}e_2 m\,, \qquad (17)$$

где

$$b_{ki}=A_k\hat{y}_i(z_k)\,. \qquad (18)$$

Здесь $|\Gamma|$ – площадь поверхности Γ. Взяв для e_1 и e_2 значения

$$e_1=\frac{e}{2},\qquad e_2=\frac{e}{2\sqrt{|\Gamma|}m},$$

из (17) непосредственно выводим искомое неравенство (14).

Следовательно, если существует равномерно ограниченная на Γ_1 функция $\bar{y}(z)$, которая обеспечивает для решения граничной задачи (10) выполнение неравенства (11), и решение этой граничной задачи представимо в виде «потенциала простого слоя» (12), то функции $y\ (y)$ можно разложить по системе (9) со сколь угодно высокой точностью, при этом коэффициенты разложения находятся из (18). То есть решение задачи нагнетания воздуха и движения воздушного потока в локальном объеме описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \tilde{u}(x) = \int\limits_{\Gamma} H(z,x)\hat{y}\,(z)dS_z, \\ \left\| y\ (y) - \sum\limits_{k=1}^{N}\sum\limits_{i=1}^{m} b_{ki} l H_i(z_k, y) \right\| \le e_1 + \sqrt{|\Gamma|}e_2 m, \\ b_{ki} = A_k \hat{y}_i(z_k), \quad e_1 = \dfrac{e}{2}, \quad {}_2 = \dfrac{e}{2\sqrt{|\Gamma|}m}. \end{cases} \tag{19}$$

Выводы

Теоретическое решение задачи защиты людей от поражающих факторов радиоактивного и химического загрязнения атмосферы во временных укрытиях на открытой местности представляет собой математическую модель в виде системы уравнений, в которой первая зависимость описывает потенциал простого слоя воздушного потока, образующегося в процессе нагнетания воздуха в локальный объем, вторая – показывает разницу между функцией плотности простого воздушного потока и матрицей его приближенного интегрального представления, а третья описывает коэффициенты разложения, определяемые с заданной точностью.

Литература

14. Загрязнения атмосферного воздуха. Доступ: http://eco1ogy-education.ru/index.php?actioп = full&id=517

15. Загрязнение атмосферы радиоактивными веществами Доступ: http://www.saveplanet.su/articles_7.html

16. Гончаренко Ю.Ю. Математическая модель выявления низкоактивного ионизирующего гамма-излучения / Ю.Ю. Гончаренко, М.М. Дивизинюк, А.В. Фаррахов // Наука та техніка Повітряних сил Збройних сил України. – Харків: ХУПС ім. Кожедуба, 2014. – № 4 (17). – С. 100 – 103.

17. Фаррахов О.В. Потенційні джерела загроз ядерно-радіаційної безпеки. Ядерний тероризм. / О.В. Фаррахов // Техногенно-екологічна безпека та цивільний захист. – 2015. – № 8. – С. 32 – 40.

18. Ліпкан В.А. Боротьба з тероризмом / В.А. Ліпкан, Д.І. Никифорчук, М.М. Руденко: Монографічне дослідження. – К.: Знання України, 2002. – 254 с.

19. Альпин Л.М. Теория поля. – М.: Недра,1966. – 386 с.

20. Булах Е.Г. Основы векторного анализа и теории поля / Е.Г. Булах, В.Н. Шуман. – Киев: Наукова думка,1998. – 360 с.

21. Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин – М.: Наука, 1986. – 288 с.

22. Челомей В.Н. Векторное исчисление. – Киев: Укргизместпром, 1936. – 120 с.

References

1. Zagryaznenaya atmosfernogo vozduha. Dostup: http://eco1ogy-education.ru/index.php?actioп = full&id=517

2. Zagryaznenie atmosferyi radioaktivnyimi veshestvami. Dostup: http://www.saveplanet.su/articles_7.html

3. Goncharenko Yu. Yu. Matematicheskaya model vyiyavleniya nizkoaktivnogo ioniziruyushego gamma-izlucheniya / Yu. Yu. Goncharenko, M. M. Diviziniuk, A. V. Farrachov // Nauka ta technika Povitryanyich syul Zbroynyih syul Ukrayinyi. –Charkiv: CHUPS im. Kozheduba, 2014. – № 4 (17). – S. 100 – 103.

4. Farrachov O. V. Potenziyni dzherela zagroz yaderno-radiaziynoy bezpekyi. Yadernyiy terorizm / O. V. Farrachov // Technogenno-ekologichna bezpeka ta zyivilnyiy zachist. – 2015. – № 8. – S. 32 – 40.

5. Lipkan V. A. Borotba z terorizmom / V. A. Lipkan, D. I. Nyikyiforchuk, M. M. Rudenko: Monografichne doslidzhennya. – K.: Znannya Ukrayinyi, 2002. – 254 s.

6. Alpin L. M. Teoriya polya. – M.: Nedra, 1966. – 386 s.

7. Bulach E. G. Osnovyi vektornogo analiza i teorii polya / E. G. Bulach, V. N. Shuman. – Kiev: Naukova dumka, 1998. – 360 s.

8. Tihonov A. N. Metodyi resheniya nekorrektnyuh zadach / A. N. Tihonov, V. Ya. Arsenin. – M.: Nauka, 1986. – 288 s.

9. Chelomey V. N. Vektornoe ischislenie. – Kiev: Ukrgizmestprom, 1936. – 120 s.

Отримана/Received : 10.9.2017 р. Надрукована/Printed :9.10.2017 р.
Стаття рецензована редакційною колегією