

УДК 389:681.2

В.Т. КОНДРАТОВ

Институт кибернетики им. В.М. Глушкова, г. Киев

**ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ МЕТРОЛОГИЯ: ТЕОРИЯ СТРУКТУРНОГО АНАЛИЗА  
УРАВНЕНИЙ ИЗБЫТОЧНЫХ И СВЕРХИЗБЫТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ  
СООБЩЕНИЕ 7. ТОНКАЯ СТРУКТУРА УИИ И УЧЗ (С УЧЕТОМ  
ПОГРЕШНОСТЕЙ И ПОПРАВОК)**

*В сообщении 7 дальнейшее развитие получила теория и методы структурного анализа уравнений (сверх)избыточных измерений в части представления структуры уравнений числовых значений через варианты, погрешности воспроизведения базовых значений варианты и поправки.*

*Рассмотрены группы методов введения поправок в аддитивную и мультипликативную составляющие погрешности воспроизведения базовых значений варианты и в значение варианты. Приведена тонкая структура уравнений числовых значений с введенными поправками в погрешности.*

*Работа представляет интерес для метрологов, специалистов, магистров и аспирантов, изучающих структуру уравнений избыточных и сверхизбыточных измерений физических величин, пути и методы повышения точности машинной обработки округленных данных.*

*Ключевые слова: округление, структурный анализ, тонкая структура уравнения избыточных измерений, методы введения поправок*

V.T. KONDRATOV

V.M.Glushkov Institute of cybernetics of National academy of Science of Ukraine

**FUNDAMENTAL METROLOGY: THE THEORY OF THE STRUCTURAL ANALYSIS OF THE EQUATIONS OF  
REDUNDANT AND SUPER-REDUNDANT MEASUREMENTS  
The message 6. Thin structure of RME with the entered errors and amendments**

*Abstract — In the Message 7 further development the theory and methods of the structural analysis of the (over)redundant measurements equations ((RME) regarding representation of structure of the equations of numerical values through a variant, errors of reproduction of base values variants and amendments.*

*Groups of methods of introduction of amendments in additive and multiply making errors of reproduction of base values variants and in values of a variant are considered. The thin structure of the equations of numerical values with the entered amendments to an error is resulted.*

*The paper is of interest for metrologists, experts, masters and the post-graduate students studying structure of the equations of redundant and super-redundant measurements of physical quantities, ways and methods of increase of accuracy of machining of the approximated data.*

*Keywords: a rounding off, the structural analysis, thin structure of the equation of redundant measurements, methods of introduction of amendments .*

**Введение**

В сообщении 6 [1] дальнейшее развитие получила теория и методы структурного анализа уравнений избыточных и сверхизбыточных измерений в части использования структурного анализа и аналитических методов для повышения точности машинной обработки данных .

Рассмотрена тонкая структура уравнений числовых значений (УЧЗ) с учетом погрешностей воспроизведения базового значения варианты, методы повышения точности обработки округленных данных путем введения поправок в аддитивную или мультипликативную составляющие погрешности воспроизведения варианты. Приведено многообразие тонкой структуры УЧЗ с учетом поправок, вводимых в числитель или знаменатель составляющих погрешности.

*Объектом исследований* настоящей работы являются структура УЧЗ, пути и методы повышения точности машинной обработки результатов измерений или измерительных преобразований физических величин при (сверх)избыточных измерениях.

*Предметом исследований* являются: тонкая структура уравнений числовых значений (УЧЗ), пути и методы повышения точности машинной обработки округленных результатов линейного измерительного преобразования рядов физических величин по типовому (УЧЗ).

*Целью работы* является синтез и анализ тонкой структуры УЧЗ варианты, а также разработка методов введения поправок в аддитивную и мультипликативную составляющие погрешности воспроизведения базового значения варианты, обеспечивающих решение задачи повышения точности обработки округленных данных.

**Результаты исследований**

В [2] приведены и используются следующие обозначения поправок:

поправка  $\Delta U_{n1}$  к дробной части данных числителя варианты, представляющего собой разность предварительно округленных преобразованных физических величин одной пары;

поправка  $\Delta U_{n2}$  к дробной части данных знаменателя варианты, представляющего собой разность предварительно округленных преобразованных физических величин другой пары;

парные поправки к дробным частям данных числителя и знаменателя варианты;

безразмерная поправка  $k_n$  к значению варианты, причем  $k_n = k'_x - k_x = \Delta k_x$ , где  $\Delta k_x$  — погрешность или отклонение значения варианты  $k_x$ , полученного по отношению целых частей данных числителя и знаменателя, по отношению к значению варианты  $k'_x$ , полученного по отношению значений полных данных числителя и знаменателя варианты.

поправка  $\{\Delta x_{ni}\} = \{x_i\} - \{x_{ik}\} = k_{ni}\{x_0\}$ , характеризующая разницу приведенных к входу результатов измерений до и после введения поправок в числитель и/или знаменатель варианты. Использование поправки  $\{\Delta x_{ni}\}$  предпочтительнее, чем использование поправки  $k_n$  ввиду малости значения последней;

поправки как к значениям дробной части числителя варианты, так и к значению варианты УЧЗ в целом;

поправки как к значениям дробной части знаменателя варианты, так и к значению варианты УЧЗ в целом;

совместные поправки к значениям дробных частей числителя и знаменателя варианты, а также к значению самой варианты УЧЗ.

Одноименные, но разные по значению поправки, используемые в числителе и знаменателе, обозначаются со штрихами, например:  $\Delta U'_{n1}$  и  $\Delta U''_{n1}$ ,  $k'_n$  и  $k''_n$  и т.д.

Структурный анализ и синтез уравнений избыточных измерений (УИИ) проведем при использовании типового УЧЗ, например, вида [1]

$$\{x'_i\} = \{x_0\} \frac{\{U'_3(x_i + x_0)\} - \{U'_1(x_0)\}}{\{U'_3(x_i + x_0)\} - \{U'_2(x_i)\}} = \{x_0\} \frac{\{\Delta U'_{31}\}}{\{\Delta U'_{32}\}} = \{x_0\} \frac{\{\Delta U_{31}\} + \{\Delta U_{34}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}}, \quad (1)$$

где  $\{\Delta U_{31}\}$  — целая часть разности данных числителя (без погрешностей),  $\{\Delta U_{32}\}$  — целая часть данных знаменателя УЧЗ (1),  $\{\Delta U_{34}\}$  — дробная часть разности данных числителя,  $\{\Delta U_3\}$  — дробная часть разности данных знаменателя,  $\{x_0\}$  — значение образцовой физической величины (нормированной по значению), представляющее собой УИИ при линейной функции преобразования измерительного канала, и полученное при измерительном преобразовании трех физических величин ( $x_1, x_2$  и  $x_3$ ) с размерами:  $\{x_1\} = \{x_0\}$ ,  $\{x_2\} = \{x_i\}$  и  $\{x_3\} = \{x_i\} + \{x_0\}$ .

#### I. Тонкая структура УИИ и УЧЗ искомой физической величины с выделенными погрешностями

Запишем УЧЗ искомой физической величины через варианты и погрешности воспроизведения ее базового значения. Базовое значение варианты УЧЗ определяется по отношению верных целочисленных значений данных числителя и знаменателя, т.е. как  $k_x = \{\Delta U_{31}\} / \{\Delta U_{32}\}$ . С учетом этого, для рассматриваемой структуры (1) УЧЗ искомой физической величины запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \{x'_i\} = \{x_0\} k'_x = \{x_0\} \frac{\{\Delta U_{31}\} + \{\Delta U_{34}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} &= \{x_0\} k_x + \{x_0\} \left( \frac{\{\Delta U_{34}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} - k_x \frac{\{\Delta U_3\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} \right) = \\ &= \{x_0\} k_x + \{x_0\} \Delta k_{xa} - \{x_0\} k_x \Delta k_{xm} = \{x_0\} k_x + \{\Delta_{xa}\} - \{\Delta_{xm}\} = \{x_i\} + \{\Delta_{xa}\} - \{\Delta_{xm}\}, \end{aligned} \quad (2)$$

Погрешности преобразования и округления обуславливают отклонение реального значения варианты от идеального (без погрешности), т.к.  $k'_x = k_x + \Delta k_x$ . Причем, аддитивная ( $\Delta k_{xa}$ ) и мультипликативная ( $\Delta k'_{xm}$ ) составляющие погрешности воспроизведения (установления) базового значения варианты обусловлены погрешностями округления и отбрасывания дробной части данных в числителе и знаменателе УЧЗ и определяются следующим образом:

$$\{\Delta_{xa}\} = \{x_0\} \{\Delta k_{xa}\} = \{x_0\} \frac{\{\Delta U_{34}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}}, \quad (3)$$

$$\{\Delta_{xm}\} = \{x_0\} \{\Delta k'_{xm}\} = \{x_0\} k_x \frac{\{\Delta U_3\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}}. \quad (4)$$

Значение варианты  $k'_x$  вычисляется с точностью, которая после округления устанавливается равной или на один-два порядка превышающей точность воспроизведения нормированной по значению физической величины  $x_0$ .

Запишем УЧЗ (1) через значения погрешностей:

$$\{x'_i\} = (\{x_0\} \pm \{\Delta_0\}) \frac{(\{U'_3(x_i + x_0)\} \pm \{\Delta_{u1}\}) - (\{U'_1(x_0)\} \pm \{\Delta_{u2}\})}{(\{U'_3(x_i + x_0)\} \pm \{\Delta_{u1}\}) - (\{U'_2(x_i)\} \pm \{\Delta_{u3}\})}, \quad (5)$$

где  $\{\Delta_0\}$  — значение погрешности воспроизведения образцовой физической величины (меры)  $x_0$ ;  $\{\Delta_{u1}\} = \{\Delta_{u2}\} = \{\Delta_{u3}\}$  — значения абсолютных погрешностей определения разности преобразованных физических величин в числителе и знаменателе.

Согласно (5), для вычисления действительного значения физической величины  $x'_i$  необходимо выполнить следующие математические операции:

вычитание первого приближенного дробного результата измерительного преобразования физической величины из третьего приближенного дробного результата и получение значения первой приближенной разности для числителя УЧЗ;

вычитание второго приближенного дробного результата из третьего приближенного дробного результата и получение значения второй приближенной разности для знаменателя УЧЗ;

деление значения первой дробной разности на значение второй дробной разности и получение частного от деления дробных чисел (данных);

умножение дробного значения частного от деления на значение постоянной величины, полученной с погрешностью.

представление полученного результата.

Покажем возможность представления структуры УЧЗ (5) через погрешности выполнения математических операций обработки данных. Для этого воспользуемся аналитическими выражениями для вычисления предельной погрешности при различных действиях с числовыми значениями величин, которые приведены в табл. 1 по данным работы [3].

Таблица 1

**Аналитические выражения для вычисления предельной погрешности при различных действиях с числовыми значениями величин**

Действия над метрологическими числами	Действия со значениями погрешностей	
	абсолютной	относительной
1	2	3
1. $(\{x_1\} \pm \{\Delta_1\}) + (\{x_2\} \pm \{\Delta_2\})$	$\{\Delta_x\} =  \{\Delta_1\}  +  \{\Delta_2\} $ $\Rightarrow$	$\delta_x = \frac{ \{\Delta_1\}  +  \{\Delta_2\} }{\{x_1\} + \{x_2\}}$
2. $(\{x_1\} \pm \{\Delta_1\}) - (\{x_2\} \pm \{\Delta_2\})$	$\{\Delta_x\} =  \{\Delta_1\}  +  \{\Delta_2\} $ $\Rightarrow$	$\delta_x = \frac{ \{\Delta_1\}  +  \{\Delta_2\} }{\{x_1\} - \{x_2\}}$
3. $(\{x_1\} \pm \{\Delta_1\}) \times (\{x_2\} \pm \{\Delta_2\})$	$\{\Delta_x\} = \delta_x (\{x_1\} \times \{x_2\})$ $\Leftarrow$	$\delta_x =  \delta_1  +  \delta_2 $
4. $\frac{\{x_1\} \pm \{\Delta_1\}}{\{x_2\} \pm \{\Delta_2\}}$	$\{\Delta_x\} = \delta_x \frac{\{x_1\}}{\{x_2\}}$ $\Leftarrow$	$\delta_x =  \delta_1  +  \delta_2 $
5. $\{x_0\} (\{x_1\} \pm \{\Delta_1\})$	$\{\Delta_x\} = \delta_x (\{x_0\} \{x_2\})$ $\Leftarrow$	$\delta_x = \delta_1$
6. $(\{x_1\} \pm \{\Delta_1\})^n$	$\{\Delta_x\} = \delta_x \{x_1\}^n$ $\Leftarrow$	$\delta_x = n\delta_1$
7. $\sqrt[n]{\{x_1\} \pm \{\Delta_1\}}$	$\{\Delta_x\} = \delta_x \sqrt[n]{\{x_1\}}$ $\Leftarrow$	$\delta_x = \frac{\delta_1}{n}$

Выполним математическую операцию вычитания приближенных данных в числителе и знаменателе и запишем УЧЗ (5) с учетом погрешностей вычитания, которые, согласно табл. 1, представляют собой сумму исходных погрешностей:

$$\{x'_{i1}\} = (\{x_0\} \pm \{\Delta_0\}) \frac{(\{U'_3(x_i + x_0)\} \pm \{\Delta_{u3}\}) - (\{U'_1(x_0)\} \pm \{\Delta_{u1}\})}{(\{U'_3(x_i + x_0)\} \pm \{\Delta_{u3}\}) - (\{U'_2(x_i)\} \pm \{\Delta_{u2}\})} \Rightarrow \{x'_{i2}\} = (\{x_0\} \pm \{\Delta_0\}) \frac{\{\Delta U'_{31}\} \pm (|\{\Delta_{u3}\}| + |\{\Delta_{u1}\}|)}{\{\Delta U'_{32}\} \pm (|\{\Delta_{u3}\}| + |\{\Delta_{u2}\}|)}$$

, (6)

где  $\{\Delta U'_{31}\} = \{U'_3(x_i + x_0)\} - (\{U'_1(x_0)\})$ ,  $\{\Delta U'_{32}\} = \{U'_3(x_i + x_0)\} - (\{U'_2(x_0)\})$ .

2. Выполним математическую операцию деления значений разностей в числителе и знаменателе УЧЗ (6). Согласно данным табл. 1, абсолютное значение погрешности выполнения математической операции деления приближенных значений разностей определяется как произведение значения относительной погрешности на отношение этих разностей, т.е.

$$\begin{aligned} \{x'_{i2}\} &= (\{x_0\} \pm \{\Delta_0\}) \frac{\{\Delta U'_{31}\} \pm (\{|\Delta_{u3}\}| + \{|\Delta_{u1}\}|)}{\{\Delta U'_{32}\} \pm (\{|\Delta_{u3}\}| + \{|\Delta_{u2}\}|)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \{x'_{i3}\} &= (\{x_0\} \pm \{\Delta_0\}) \cdot \left( \frac{\{\Delta U'_{31}\}}{\{\Delta U'_{32}\}} \pm \left[ \frac{(\{|\Delta_{u3}\}| + \{|\Delta_{u1}\}|)}{\{\Delta U'_{31}\}} + \frac{(\{|\Delta_{u3}\}| + \{|\Delta_{u2}\}|)}{\{\Delta U'_{32}\}} \right] \cdot \frac{\{\Delta U'_{31}\}}{\{\Delta U'_{32}\}} \right) = \{x_0\} (1 \pm \gamma_0) \frac{\{\Delta U'_{31}\}}{\{\Delta U'_{32}\}} (1 \pm \gamma_d) \quad (7) \end{aligned}$$

где  $\gamma_0 = \{\Delta_0\}/\{x_0\}$  — относительная погрешность воспроизведения образцовой физической величины;

$$\gamma_d = \gamma_{31} + \gamma_{32} = \frac{\{|\Delta_{u3}\}| + \{|\Delta_{u1}\}|}{\{\Delta U'_{31}\}} + \frac{\{|\Delta_{u3}\}| + \{|\Delta_{u2}\}|}{\{\Delta U'_{32}\}} \quad (8)$$

— относительная погрешность выполнения операции деления двух разностей данных.

3. Выполним операцию перемножения двух приближенных данных в УЧЗ (7) с учетом зависимостей, приведенных в табл. 1. Окончательно получим УЧЗ с учетом погрешностей выполнения математических операций в виде:

$$\{x'_{i3}\} = (\{x_0\} \pm \{\Delta_0\}) \cdot \left( \frac{\{\Delta U'_{31}\}}{\{\Delta U'_{32}\}} (1 + \gamma_d) \right) \Rightarrow \{x'_{i3}\} \equiv \{x_0\} \frac{\{\Delta U'_{31}\}}{\{\Delta U'_{32}\}} \pm (|\gamma_0| + |\gamma_d|) \{x_0\} \frac{\{\Delta U'_{31}\}}{\{\Delta U'_{32}\}} = \{x_0\} k'_x \left[ 1 \pm (|\gamma_0| + |\gamma_d|) \right], \quad (9)$$

4. Запишем модифицированное УЧЗ (9) через варианту  $k'_x$ :

$$\{x'_{i3}\} = \{x_0\} k'_x \left[ 1 \pm (|\gamma_0| + |\gamma_{xд}|) \right] = \{x_0\} k'_x (1 \pm \gamma_{x\Sigma}) = \{x_0\} (k_x + \Delta_{xa} - \Delta_{xm}) (1 \pm \gamma_{x\Sigma}). \quad (10)$$

где  $\gamma_{x\Sigma} = |\gamma_0| + |\gamma_{xд}|$  — максимальная суммарная относительная погрешность вычисления значения искомой физической величины.

Анализ показал, что результат вычисления искомой физической величины по УЧЗ (10) получают завышенным, поскольку все абсолютные и относительные значения погрешностей суммируются по модулю, т.е. без учета знаков. Это свидетельствует о несовершенстве приведенных в табл. 1 рекомендаций математиков по определению погрешностей выполнения математических операций обработки приближенных данных (чисел). Другими словами, данные табл. 1 являются оценочными, а метрологам необходим математический аппарат, обеспечивающий уменьшение и даже исключение погрешностей вычислительной обработки данных.

Если предположить, что значения абсолютных погрешностей определения разности преобразованных физических величин в числителе и знаменателе равны между собой и имеют максимальное значение по одной из составляющих, т.е.  $\{\Delta_{u1}\} = \{\Delta_{u2}\} = \{\Delta_{u3}\} = \{\Delta_{u\max}\}$ , то результат избыточных измерений будет получен ещё с большей погрешностью:

$$\{x'_i\} = \{x_0\} \cdot k'_x \left[ 1 \pm (\gamma_0 + [\gamma'_{31} + \gamma'_{32}]) \right] = \{x_0\} k'_x (1 \pm \gamma'_{x\Sigma}), \quad (11)$$

где  $\gamma'_{u31} = k_2 \{\Delta_{u\max}\}/\{\Delta U'_{31}\}$ ,  $\gamma'_{u32} = k_2 \{\Delta_{u\max}\}/\{\Delta U'_{32}\}$ ,  $k_2 = 2$ ,  $\gamma'_{u\Sigma} = \gamma'_{u31} + \gamma'_{u32}$ . Возможно использование и значения погрешности  $\{\Delta_{u\max}\}$ , равное одному из максимальных значений погрешностей  $\Delta_{u1}$ ,  $\Delta_{u2}$  или  $\Delta_{u3}$ .

УЧЗ относительной погрешности вычисления результата избыточных измерений имеет вид

$$\begin{aligned} \gamma_x &= \pm \left( \frac{\{\Delta_0\}}{\{x_0\}} + \frac{\{|\Delta_{u3}\}| + \{|\Delta_{u1}\}|}{\{\Delta U'_{31}\}} + \frac{\{|\Delta_{u3}\}| + \{|\Delta_{u2}\}|}{\{\Delta U'_{32}\}} \right) = \pm \left( \frac{\{\Delta_0\}}{\{x_0\}} + \frac{\{\Delta_{u31}\}}{\{\Delta U'_{31}\}} + \frac{\{\Delta_{u32}\}}{\{\Delta U'_{32}\}} \right) = \\ &= \pm (|\gamma_0| + [|\gamma_{u31}| + |\gamma_{u32}|]) = \pm (|\gamma_0| + |\gamma_{u\Sigma}|) \quad (12) \end{aligned}$$

и представляет собой сумму значений относительной погрешности воспроизведения нормированной физической величины  $x_0$  и относительных погрешностей, характеризующих каждую выполненную математическую операцию: вычитания, деления и умножения приближенных чисел (данных). Кроме того, относительная погрешность  $\gamma_x$  (12) также зависит от значений абсолютных погрешностей  $\Delta_{u1}$ ,  $\Delta_{u2}$  и  $\Delta_{u3}$  измерительного преобразования рядов физических величин.

При  $\{\Delta_{u1}\} = \{\Delta_{u2}\} = \{\Delta_{u3}\} = \{\Delta_{u\max}\}$  получим относительную погрешность вычисления результата избыточных измерений от в виде

$$\gamma_x = \pm \left( \frac{\{\Delta_0\}}{\{x_0\}} + \{\Delta_{u\max}\} \left[ \frac{k_2}{\{\Delta U'_{31}\}} + \frac{k_2}{\{\Delta U'_{32}\}} \right] \right) = \pm (\gamma_0 + [\gamma'_{u31} + \gamma'_{u32}]) = \pm (\gamma_0 + \gamma'_{u\Sigma}). \quad (13)$$

С другой стороны, уравнение относительной погрешности может быть записано в виде

$$\gamma_x = \pm \frac{\Delta_x}{x_0 k'_x} = \pm \Delta_x / x_0 \frac{\Delta U'_{31}}{\Delta U'_{32}} = \pm \left( \frac{\Delta_0}{x_0} + \Delta_{u\max} \left[ \frac{k_2}{\Delta U'_{31}} + \frac{k_2}{\Delta U'_{32}} \right] \right), \quad (14)$$

где  $\Delta_x$  — абсолютная погрешность вычисления результата избыточных измерений.

Из уравнения величин (14) видно, что относительная погрешность обратно пропорциональна произведению абсолютных значений образцовой физической величины  $x_0$  и варианты  $k'_x$ . При неизменном значении физической величины  $x_0$ , значение относительной погрешности можно изменять только путем изменения значения варианты  $k'_x = k_x + \Delta k_{\text{за}} - k_x \Delta k_{\text{зм}}$  или путем введения поправок в результаты вычисления разностей  $\Delta U'_{31}$  и  $\Delta U'_{32}$ . Последний вариант не предпочтителен.

Исследования показали, что принятые допущения в ряде частных случаев приводят к завышенным в 1,1 – 2 раза границам полосы неопределенности.

Рассмотрим несколько примеров вычисления искомой физической величины без введения поправок.

**Пример 1.** Предположим, что необходимо вычислить результат избыточных измерений, определить значение погрешности вычисления и построить соответствующие графики погрешностей. Допустим, что в результате измерительного преобразования трех однородных физических величин, получили напряжения  $U'_1(x_0) = 2,002$  В;  $U'_2(x_i) = 5,001$  В и  $U'_3(x_i + x_0) = 7,007$  В при нормированной по значению физической величине  $x_0 = \{x_0\} [x_0] = 2 [x_0]$ , воспроизведенной с погрешностью  $\{\Delta_0\} = 0,001$  (0,05% от номинального значения). Предположим, что в полученных напряжениях сомнительной является последняя цифра после запятой. Погрешности измерительного преобразования примем равными между собой, т.е.  $\{\Delta_{u1}\} = \{\Delta_{u2}\} = \{\Delta_{u3}\} = \{\Delta_u\} = 0,001$ .

Из (7), с учетом (8), запишем УЧЗ для вычисления искомой физической величины в виде

$$\{x''_{i3}\} \equiv \{x_0\} \frac{\{\Delta U'_{31}\}}{\{\Delta U'_{32}\}} \left[ 1 \pm \left( |\gamma_0| + \frac{|\{\Delta_{u3}\}| + |\{\Delta_{u1}\}|}{\{\Delta U'_{31}\}} + \frac{|\{\Delta_{u3}\}| + |\{\Delta_{u2}\}|}{\{\Delta U'_{32}\}} \right) \right]. \quad (15)$$

Подставим в УЧЗ (15) исходные данные и вычислим значения искомой физической величины и погрешности вычислений данных при  $\{\Delta_{u1}\} = \{\Delta_{u2}\} = \{\Delta_{u3}\} = \{\Delta_u\}$ . В результате получим:

$$\begin{aligned} \{x''_{i3}\} &= \{x_0\} \frac{\{\Delta U'_{31}\}}{\{\Delta U'_{32}\}} \pm \left( \frac{\{\Delta_0\}}{\{x_0\}} + \{\Delta_u\} \left[ \frac{k_2}{\{\Delta U'_{31}\}} + \frac{k_2}{\{\Delta U'_{32}\}} \right] \right) \cdot \left( \{x_0\} \cdot \frac{\{\Delta U'_{31}\}}{\{\Delta U'_{32}\}} \right) = 2 \cdot \frac{5,005}{2,006} \cdot \left[ 1 \pm \left( \frac{0,001}{2} + 0,001 \cdot \left[ \frac{2}{5,005} + \frac{2}{2,006} \right] \right) \right] = \\ &= 4,990030 \cdot (1 \pm [0,0005 + 0,001 \cdot (0,39960 + 0,99701)]) = 4,990030 \cdot [1 \pm (0,0005 + 0,001397)] = \\ &= [4,99003] \pm [0,00946] = 4,99 \pm 0,01. \end{aligned} \quad (16)$$

Заданное истинное значение физической величины  $\{x_i\} = 5,0$ . Оно не выходит за пределы верхней границы полосы неопределенности. При значении физической величины 4,99, значение абсолютной погрешности составило  $\{\Delta_x\} = \pm 0,01$ , а относительной —  $\gamma_x = (0,01/4,99) \cdot 100\% = [0,2004]\% = 0,2\%$ . Границы полосы неопределенности расширились в 10 раз, — с  $\{\Delta_u\} = \pm 0,001$  до  $\{\Delta_x\} = \pm 0,01$ , что подтверждает важность решения задачи разработки методов уменьшения погрешностей вычислительной обработки априори округленных приближенных данных, т.е. результатов измерительного преобразования входных физических величин при избыточных измерениях.

Уравнение абсолютной погрешности, описывающее зависимость результирующей погрешности избыточных измерений от погрешности измерительного преобразования физических величин, т.е.  $\Delta_x = f(\Delta_u)$ , имеет вид:

$$\Delta_{x\max} = \pm \left( \frac{\Delta_0}{x_0} + \Delta_u \left[ \frac{k_2}{\Delta U'_{31}} + \frac{k_2}{\Delta U'_{32}} \right] \right) \cdot \left( x_0 \frac{\Delta U'_{31}}{\Delta U'_{32}} \right). \quad (17)$$

С учетом исходных данных, уравнение абсолютной погрешности (17) запишем через УЧЗ в следующем виде:

$$\begin{aligned} \{\Delta_x\} &= \pm \left( \frac{0,001}{2} + \{\Delta_u\} \cdot \left[ \frac{2}{5,005} + \frac{2}{2,006} \right] \right) \cdot \left( 2 \cdot \frac{5,005}{2,006} \right) = \pm (0,00249 + \{\Delta_u\} \cdot 1,39661 \cdot 4,99003) = \\ &= \pm (\lfloor 0,00249 \rfloor + \{\Delta_u\} \cdot \lfloor 6,96912 \rfloor) = 0,0025 + \{\Delta_u\} 6,9691. \end{aligned} \quad (18)$$

Анализ УЧЗ (18) показал, что погрешность результата избыточных измерений линейно зависит от произведения значений абсолютной погрешности воспроизведения нормированной по значению физической величины на значение варианты  $k'_x$ . Угол наклона прямой  $\alpha$ , характеризующий крутизну преобразования  $S_{и}$  (индекс «и» означает «избыточные измерения») функции  $\Delta_x = f(\Delta_u)$ , определяется из равенства  $S_{и} = \operatorname{tg} \alpha = k'_x$  как  $\alpha = \operatorname{arctg} k'_x$ .

На рис. 2 приведены семейства прямых, характеризующих вклад каждой составляющей в погрешность результата избыточных измерений при  $\{S_{и1}\} = 6,9691$ ,  $\{S_{и2}\} = 5,9691$  и  $\{S_{и3}\} = 7,9691$ . Все графики смещены вверх на значение аддитивной составляющей погрешности  $\{\Delta_{xa}\} = 0,0025$ , описываемой уравнением величин

$$\Delta_{xa} = x_0 \cdot k'_x \gamma_0 = k'_x \Delta_0. \quad (19)$$

Данная составляющая обусловлена как влиянием погрешности  $\Delta_0$  воспроизведения нормированной по значению физической величины  $x_0$  ( $\{x_0\} = 2,000 \pm 0,001$ ) на конечный результат избыточных измерений, так и значением варианты  $k'_x = 5,005 / 2,006$ . Как видно из приведенных расчетов и графиков, четвертую часть погрешности составляет аддитивная составляющая  $\Delta_a = k_2 \Delta_0 k'_x$ , где  $k_2 = 2$ .

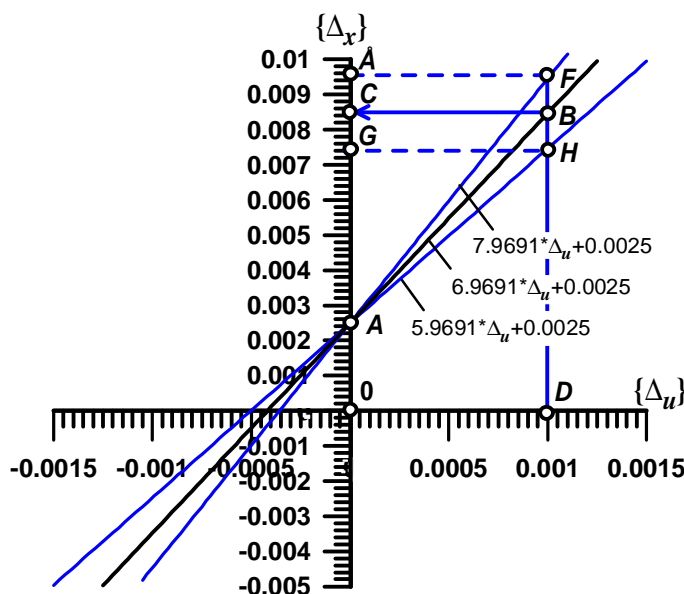


Рис. 2. Графики зависимости  $\Delta_x = f(\Delta_u)$  при разных значениях крутизны преобразования

Мультипликативная составляющей погрешности

$$\{\Delta_{xm}\} = k_2 \{x_0\} k'_x (\gamma_{31} + \gamma_{32}) = \{S_{и}\} k_2 (\gamma_{31} + \gamma_{32}) \quad (20)$$

зависит от крутизны преобразования, равной произведению значения образцовой физической величины на значения варианты, и от удвоенной суммы значений относительных погрешностей вычисления разностей данных в числителе и знаменателе УЧЗ, т.е. от  $(k_2 (\gamma_{31} + \gamma_{32}))$ .

Определяющую роль играет погрешность  $\Delta_u$  измерительного преобразования рядов физических величин. В целом абсолютная погрешность вычисления результата избыточных измерений по округленным данным не превышает 0,01 и изменяется от 0,0025 до 0,0085, а относительная не превышает 0,14% ( $\gamma_x = (0,00697 / 4,99003) \cdot 100\% = \lfloor 0,1396 \rfloor \% = 0,14\%$ ).

Следовательно, графическое представление погрешностей вычислительной обработки данных дает несколько заниженные результаты, чем вычислительное представление с округлением.

**Пример 2.** Рассмотрим частный случай с округлением значения погрешности воспроизведения образцовой физической величины и результатов измерительного преобразования физических величин до третьего знака после

запятой, т.е. до  $\{\Delta_0\} = 0,001$  и  $\{\Delta_u\} = 0,001$ . Допустим, что в рассматриваемом случае исходные округленные данные получают более точными:

$$U'_1(x_0) = [2,000\bar{9}] \text{ В} = 2,001 \text{ В}; U'_2(x_i) = [5,000\bar{7}] \text{ В} = 5,001 \text{ В} \text{ и } U'_3(x_i + x_0) = 7, [000\bar{6}] \text{ В} = 7,001 \text{ В}.$$

Тогда погрешность результата избыточных измерений будет равна

$$\{\Delta_x\} = \pm \left( \frac{\{\Delta_0\}}{\{x_0\}} + \{\Delta_u\} \left[ \frac{1}{\{\Delta U'_{31}\}} + \frac{1}{\{\Delta U'_{32}\}} \right] \right) \cdot \left( \{x_0\} \cdot \frac{\{\Delta U'_{31}\}}{\{\Delta U'_{32}\}} \right) = \pm \left( \frac{0,001}{2} + \{\Delta_u\} \cdot \left[ \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \right] \right) \cdot \left( 2 \cdot \frac{5}{2} \right) = 0,00250 + 3,5 \cdot \{\Delta_u\}. \quad (21)$$

На рис. 3 приведено семейство прямых, характеризующих вклад каждой составляющей в погрешность результата избыточных измерений при  $\{S'_{u1}\} = 4,5$ ,  $\{S'_{u2}\} = 3,5$  и  $\{S'_{u3}\} = 2,5$ . Как и в предыдущем случае, все графики смещены вверх на одно и то же значение аддитивной составляющей погрешности  $\{\Delta_{xa}\} = 0,0025$ . Мультипликативная составляющая уменьшилась примерно в 2 раза, т.к.  $(S_{u2} / S'_{u2} = 6,9691 / 3,5 = [1,99])$ ; 2 раза.

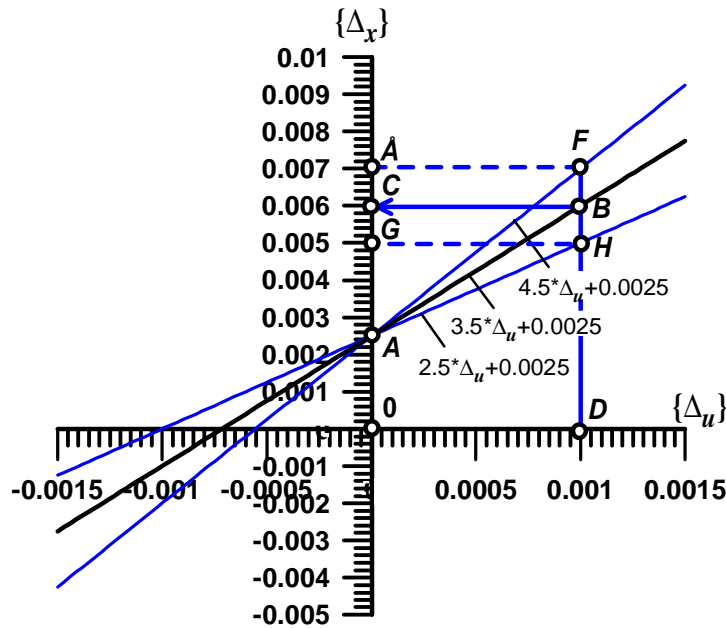


Рис. 3. Графики зависимости  $\Delta_x = f(\Delta_u)$  при разных значениях крутизны преобразования и  $\{\Delta_0\} = 0,001$  и  $\{\Delta_u\} = 0,001$

При  $\{\Delta_u\} = 0,0001$

$$\begin{aligned} \{x'_i\} &= \{x_0\} \cdot \frac{\{\Delta U'_{31}\}}{\{\Delta U'_{32}\}} \pm \left( \frac{\{\Delta_0\}}{\{x_0\}} + \left[ \frac{k_2 \{\Delta_u\}}{\{\Delta U'_{31}\}} + \frac{k_2 \{\Delta_u\}}{\{\Delta U'_{32}\}} \right] \right) \cdot \left( \{x_0\} \cdot \frac{\{\Delta U'_{31}\}}{\{\Delta U'_{32}\}} \right) = 2 \cdot \frac{5,003}{2,006} \pm \left( \frac{0,001}{2} + \left[ \frac{0,0002}{5,003} + \frac{0,0002}{2,006} \right] \right) \cdot \left( 2 \cdot \frac{5,003}{2,006} \right) = \\ &= 2 \cdot 2,49402 \pm (0,0005 + [0,00004 + 0,0000997]) \cdot (2 \cdot 2,49402) = 4,98804 \pm (0,0005 + 0,0001397) \cdot 4,98804 = \\ &= 4,98804 \pm 0,0006397 \cdot 4,98804 = [4,98804] \pm [0,00319] = 4,988 \pm 0,003. \end{aligned} \quad (22)$$

В этом случае (при абсолютной погрешности  $\{\Delta_u\} = 0,0001$ ) получим более точный результат избыточных измерений при полосе неопределенности в 3 раза `меньшей первоначальной. Погрешность воспроизведения нормированной по значению физической величины  $x_0$  не всегда удается получить весьма малого значения. Поэтому основные усилия следует прилагать к созданию высокоточных многозарядных аналого-цифровых преобразователей для каналов измерительного преобразования физических величин.

Следовательно, значение погрешности измерительного преобразования физических величин должна быть на порядок меньше значения погрешности воспроизведения нормированной по значению физической величины  $x_0$ , т.е.  $\{\Delta_u\} = 0,1 \cdot \{\Delta_0\} = 0,1 \cdot 0,001 = 0,0001$ . При  $\{U_x\} = 5$  относительная погрешность составит  $\gamma_u = (\{\Delta_u\} / \{U_x\}) \cdot 100\% = (0,001 / 5) \cdot 100\% = 0,02\%$ .

Не следует использовать малоточные измерительные преобразователи. Так, например, при  $\{\Delta_u\} = 0,01$ ,

$$\begin{aligned} \{x'_i\} &= \{x_0\} \cdot \frac{\{\Delta U'_{31}\}}{\{\Delta U'_{32}\}} \pm \left( \frac{\{\Delta_0\}}{\{x_0\}} + k_2 \left[ \frac{\{\Delta_u\}}{\{\Delta U'_{31}\}} + \frac{\{\Delta_u\}}{\{\Delta U'_{32}\}} \right] \right) \cdot \left( \{x_0\} \cdot \frac{\{\Delta U'_{31}\}}{\{\Delta U'_{32}\}} \right) = \\ &= 2 \cdot \frac{5,003}{2,006} \pm \left( \frac{0,001}{2} + 2 \cdot \left[ \frac{0,01}{5,003} + \frac{0,01}{2,006} \right] \right) \cdot \left( 2 \cdot \frac{5,003}{2,006} \right) = 2 \cdot 2,49402 \pm (0,0005 + [0,004 + 0,00997]) \cdot (2 \cdot 2,49402) = \\ &= 4,98804 \pm (0,0005 + 0,01397) \cdot 4,98804 = 4,98804 \pm 0,01447 \cdot (2 \cdot 2,49402) = [4,98804] \pm [0,07218] = 4,99 \pm 0,07. \quad (23) \end{aligned}$$

В этом случае достоверное значение результата избыточных измерений получают при полосе неопределенности, расширенной в 7 раз.

Рассчитаем оптимальное значение варианты при  $\{\Delta_u\} = 0,001$  и определим влияние этой погрешности на результат избыточных измерений при следующих исходных данных:  $U'_1(x_0) = 2,004 \text{ В} \pm 0,001 \text{ В}$ ;  $U'_2(x_i) = 5,001 \text{ В} \pm 0,001 \text{ В}$  и  $U'_3(x_i + x_0) = 7,007 \text{ В} \pm 0,001 \text{ В}$ . В результате получим:

$$\begin{aligned} \{x'_i\} &= \{x_0\} \cdot (k_x + \Delta k_{\text{xa}} - \Delta k_{\text{xm}}) \left[ 1 \pm \left( \frac{\{\Delta_0\}}{\{x_0\}} + \left[ \frac{k_2 \{\Delta_u\}}{\{\Delta U'_{31}\}} + \frac{k_2 \{\Delta_u\}}{\{\Delta U'_{32}\}} \right] \right) \right] = \\ &= 2 \cdot \left( \frac{500}{200} + \frac{0,3}{200,6} - \frac{0,6}{200,6} \right) \cdot \left[ 1 \pm \left( \frac{0,001}{2} + \left[ \frac{2 \times 0,001}{5,003} + \frac{2 \times 0,001}{2,006} \right] \right) \right] = \\ &= 2 \cdot (2,5 + 0,00149 - 0,00299) \cdot [1 \pm (0,0005 + (0,00040 + 0,001))] = \\ &= (5 + 0,00298 - 0,00598) \cdot [1 \pm (0,0005 + 0,00140)] = \\ &= 5,0 - 0,003 \pm 0,00949 = 4,997 \pm [0,00949] = 4,997 \pm 0,009. \quad (24) \end{aligned}$$

Согласно (24), результат избыточных измерений получают достоверным при  $\{\Delta_u\} = 0,002$  и полосе неопределенности  $\pm 0,009$ , т.е. расширенной в 1,3 раза по отношению к предыдущему примеру (при  $\{\Delta_u\} = 0,001$ ). Поскольку в данном случае значение погрешности завышено в 2 раза (см. в (24) коэффициент при  $\{\Delta_u\}$ ), то, окончательно, имеем  $\{x'_i\} = 4,997 \pm [0,0045]$ ;  $4,997 \pm 0,004$ . Заданное истинное значение физической величины  $\{x_i\} = 5,0$  находится в пределах  $4,997 + 0,004 = 5,001$  и  $4,997 - 0,004 = 4,993$ . Этот пример еще раз наглядно подчеркивает завышение реальной полосы неопределенности в 2 раза. Зачем нам коэффициент запаса «2»? В ряде случаев им можно пренебречь, т.е. при  $\{\Delta_u\}$  взять коэффициент «1».

Машинная реализация операций суммирования, вычитания, произведения и деления округленных данных дает завышенные в 1,1 – 2 раза результаты, поскольку абсолютные и относительные значения погрешностей суммируются по модулю, т.е. без учета знаков. Использование классических подходов (вычисление с удвоенной точностью, выбор иных алгоритмов обработки данных и т.д.) не приводит к повышению точности избыточных измерений за счет уменьшения погрешностей машинной обработки округленных данных.

Из всех возможных методов повышения точности вычислений наиболее перспективным являются методы, основанные на изменении структуры уравнений избыточных измерений или уравнений числовых значений, причем таким образом, чтобы новая (модифицированная) структура обеспечивала, в результате ее использования, уменьшение погрешности машинной реализации арифметических операций

## II. Методы введения поправок в аддитивную и мультипликативную составляющие погрешности воспроизведения базового значения варианты

Рассмотрим методы введения поправок в аддитивную и мультипликативную составляющие погрешности воспроизведения базового значения варианты и приведем соответствующие модифицированные УЧЗ, по которым вычисляется значение варианты.

### 2.1. Методы введения поправок в аддитивную составляющую погрешности воспроизведения базового значения варианты

Для варианты УЧЗ имеет вид [4]:

$$k'_x = \frac{\{\Delta U_{31}\} + \{\Delta U_4\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} = k_x + \left( \frac{\{\Delta U_4\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} - k_x \frac{\{\Delta U_3\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} \right) = k_x + \Delta k_{\text{xa}} - k_x \Delta k_{\text{xm}} = k_x + \Delta k_{\text{xa}} - \Delta k'_{\text{xm}} \quad (8)$$

Перечислим возможные методы введения поправок и соответствующие модифицированные УЧЗ, представляющие теоретический и практический интерес.

*Метод 1.* Введение поправки  $\Delta k_{\text{п1}}$  в аддитивную составляющую погрешности воспроизведения



варианты. Тогда модифицированное УЧЗ варианты примет вид:

$$k'_{xp1} = k_x + \left( \frac{\{\Delta U_q\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} + \Delta k_{n1} \right) - k_x \frac{\{\Delta U_3\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} = k_x + \Delta k_{xa1} - \Delta k_{xm}. \quad (9)$$

где  $\Delta k_{xa1}$  — аддитивная составляющая погрешности воспроизведения варианты.

*Метод 2.* Введение поправки  $\Delta U_{n1}$  в числитель аддитивной составляющей погрешности воспроизведения варианты. В этом случае получим модифицированное УЧЗ в виде

$$k'_{xp2} = k_x + \frac{\{\Delta U_q\} + \{\Delta U_{n1}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} - k_x \frac{\{\Delta U_3\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} = k_x + \Delta k_{xa2} - k_x \Delta k_{xm} = k_x + \Delta k_{xa2} - \Delta k_{xm}. \quad (10)$$

где  $\Delta k_{xa2}$  — аддитивная составляющая погрешности воспроизведения варианты.

*Метод 3.* Введение поправки  $\Delta U_{n2}$  в знаменатель аддитивной составляющей погрешности воспроизведения варианты. Модифицированное УЧЗ варианты –

$$k'_{xp3} = k_x + \frac{\{\Delta U_q\}}{(\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}) + \{\Delta U_{n2}\}} - k_x \frac{\{\Delta U_3\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} = k_x + \Delta k_{xa3} - \Delta k_{xm}, \quad (11)$$

где  $\Delta k_{xa3}$  — аддитивная составляющая погрешности воспроизведения варианты.

*Метод 4.* Введение поправки  $\Delta U_{n1}$  и  $\Delta U_{n2}$  в числитель и знаменатель аддитивной составляющей погрешности воспроизведения варианты. В этом случае модифицированное УЧЗ варианты примет вид:

$$k'_{xp4} = k_x + \frac{\{\Delta U_q\} + \{\Delta U_{n1}\}}{(\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}) + \{\Delta U_{n2}\}} - k_x \frac{\{\Delta U_3\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} = k_x + \Delta k_{xa4} - \Delta k_{xm}, \quad (12)$$

где  $\Delta k_{xa4}$  — аддитивная составляющая погрешности воспроизведения варианты.

*Метод 5.* Введение поправок  $\Delta U_{n1}$  и  $\Delta k_{n1}$  соответственно в числитель аддитивной составляющей погрешности воспроизведения варианты и в саму составляющую. В этом случае получим модифицированное УЧЗ варианты вида

$$k'_{xp5} = k_x + \left( \frac{\{\Delta U_q\} + \{\Delta U_{n1}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} + \Delta k_{n1} \right) - k_x \frac{\{\Delta U_3\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} = k_x + \Delta k_{xa5} - \Delta k_{xm}. \quad (13)$$

где  $\Delta k_{xa5}$  — аддитивная составляющая погрешности воспроизведения варианты.

*Метод 6.* Введение поправок  $\Delta U_{n2}$  и  $\Delta k_{n1}$  соответственно в знаменатель аддитивной составляющей погрешности воспроизведения варианты и в саму составляющую. Тогда модифицированное УЧЗ варианты

$$k'_{xp5} = k_x + \left( \frac{\{\Delta U_q\}}{(\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}) + \{\Delta U_{n2}\}} + \Delta k_{n1} \right) - k_x \frac{\{\Delta U_3\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} = k_x + \Delta k_{xa6} - k_x \Delta k_{xm}, \quad (14)$$

где  $\Delta k_{xa6}$  — аддитивная составляющая погрешности воспроизведения варианты.

*Метод 7.* Введение поправок  $\Delta U_{n1}$ ,  $\Delta U_{n2}$  и  $\Delta k_{n1}$  соответственно в числитель и знаменатель аддитивной составляющей погрешности воспроизведения варианты и в саму составляющую. Значение варианты определяется по модифицированному УЧЗ

$$k'_{xp7} = k_x + \left( \frac{\{\Delta U_q\} + \{\Delta U_{n1}\}}{(\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}) + \{\Delta U_{n2}\}} + \Delta k_{n1} \right) - k_x \frac{\{\Delta U_3\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} = k_x + \Delta k_{xa7} - \Delta k_{xm}, \quad (15)$$

где  $\Delta k_{xa7}$  — аддитивная составляющая погрешности воспроизведения варианты.

Среди перечисленных первых семи методов введения поправок оптимальной по числу математических операций можно назвать первый, т.к. поправка вводится один раз в саму аддитивную составляющую. Почти оптимальными являются второй и третий методы. В этом случае поправка также вносится по одному разу, но необходимо провести дополнительные пересчеты значений аддитивной составляющей (дополнительно выполнить операцию деления).

## 2.2. Методы введения поправки в мультипликативную составляющую погрешности воспроизведения базового значения варианты

**Метод 8.** Введение поправки  $\Delta k_{п1}$  в мультипликативную составляющую погрешности воспроизведения варианты (подобно методу 1). В этом случае значение варианты определяется по модифицированному УЧЗ

$$k'_{хп8} = k_x + \frac{\{\Delta U_4\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} - \left( k_x \frac{\{\Delta U_3\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} + \Delta k_{п1} \right) = k_x + \Delta k_{ха} - \Delta k'_{хм1}, \quad (16)$$

где  $\Delta k'_{хм1}$  — мультипликативная составляющая погрешности воспроизведения варианты с учетом поправки  $\Delta k_{п1}$ .

**Метод 9.** Введение поправки  $\Delta U_{п1}$  в числитель мультипликативной составляющей погрешности воспроизведения варианты. Тогда модифицированное УЧЗ для варианты примет вид:

$$k'_{хп9} = k_x + \frac{\{\Delta U_4\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} - k_x \frac{\{\Delta U_3\} + \{\Delta U_{п1}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} = k_x + \Delta k_{ха} - \Delta k'_{хм2}, \quad (17)$$

где  $\Delta k'_{хм2}$  — мультипликативная составляющая погрешности воспроизведения варианты с учетом поправки  $\Delta U_{п1}$ .

**Метод 10.** Введение поправки  $\Delta U_{п2}$  в знаменатель мультипликативной составляющей погрешности воспроизведения варианты. Значение варианты в данном случае опишется модифицированным УЧЗ

$$k'_{хп10} = k_x + \frac{\{\Delta U_4\}}{(\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\})} - k_x \frac{\{\Delta U_3\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\} + \{\Delta U_{п2}\}} = k_x + \Delta k_{ха} - \Delta k'_{хм3}, \quad (18)$$

где  $\Delta k'_{хм3}$  — мультипликативная составляющая погрешности воспроизведения варианты с учетом поправки  $\Delta U_{п2}$ .

**Метод 11.** Введение двух поправок —  $\Delta U_{п1}$  и  $\Delta U_{п2}$ , соответственно, в числитель и знаменатель мультипликативной составляющей погрешности воспроизведения варианты. В этом случае значение варианты определяется по модифицированному УЧЗ

$$k'_{хп11} = k_x + \frac{\{\Delta U_4\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} - k_x \frac{\{\Delta U_3\} + \{\Delta U_{п1}\}}{(\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}) + \{\Delta U_{п2}\}} = k_x + \Delta k_{ха} - \Delta k'_{хм4}, \quad (19)$$

где  $\Delta k'_{хм4}$  — мультипликативная составляющая погрешности воспроизведения варианты с учетом поправок  $\Delta U_{п1}$  и  $\Delta U_{п2}$ .

**Метод 12.** Введение поправок  $\Delta U_{п1}$  и  $\Delta k_{п1}$  соответственно в числитель мультипликативной составляющей погрешности воспроизведения варианты и в саму составляющую. Тогда модифицированное УЧЗ для варианты примет вид:

$$k'_{хп12} = k_x + \frac{\{\Delta U_4\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} - \left( k_x \frac{\{\Delta U_3\} + \{\Delta U_{п1}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} + \Delta k_{п1} \right) = k_x + \Delta k_{ха} - \Delta k'_{хм5}, \quad (20)$$

где  $\Delta k'_{хм5}$  — мультипликативная составляющая погрешности воспроизведения варианты с учетом поправок  $\Delta U_{п1}$  и  $\Delta U_{п2}$ .

**Метод 13.** Введение поправок  $\Delta U_{п2}$  и  $\Delta k_{п1}$  в знаменатель мультипликативной составляющей погрешности воспроизведения варианты и в саму составляющую. Значение варианты определяется согласно модифицированному УЧЗ

$$k'_{хп13} = k_x + \frac{\{\Delta U_4\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} - \left( k_x \frac{\{\Delta U_3\}}{(\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}) + \{\Delta U_{п2}\}} + \Delta k_{п1} \right) = k_x + \Delta k_{ха} - \Delta k'_{хм6}. \quad (21)$$

где  $\Delta k'_{хм6}$  — мультипликативная составляющая погрешности воспроизведения варианты с учетом поправок

$\Delta U_{n2}$  и  $\Delta k_{n1}$ .

*Метод 14.* Введение трех поправок —  $\Delta U_{n1}$ ,  $\Delta U_{n2}$  и  $\Delta k_{n1}$  соответственно в числитель и знаменатель мультипликативной составляющей погрешности воспроизведения варианты и в саму мультипликативную составляющую. В этом случае модифицированное УЧЗ

$$k'_{xn14} = k_x + \frac{\{\Delta U_q\}}{\{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}\}} - \left( k_x \frac{\{\Delta U_3 + \{\Delta U_{n1}\}\}}{\{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}\} + \{\Delta U_{n2}\}} + \Delta k_{n1} \right) = k_x + \Delta k_{xa} - \Delta k'_{xm7}. \quad (22)$$

где  $\Delta k'_{xm7}$  — мультипликативная составляющая погрешности воспроизведения варианты с учетом поправок  $\Delta U_{n1}$ ,  $\Delta U_{n2}$  и  $\Delta k_{n1}$ .

Среди перечисленных 8-го – 14-го методов введения поправок оптимальными по числу математических операций можно назвать восьмой, т.к. поправка вводится единожды в саму мультипликативную составляющую. Почти оптимальными являются девятый и десятый методы. В этом случае поправка также вносится единожды, но необходимо провести дополнительные пересчеты значений мультипликативной составляющей (дополнительно выполнить операцию деления).

Все нижеприведенные методы являются избыточными и не оптимальными. Поэтому имеют, в основном, теоретическое значение. Они совмещают разные сочетания 1-го – 7-го и 8-го – 14-го методов. Все методы легко запоминаются по индексам аддитивной и мультипликативной составляющих, записанных в правой части УЧЗ.

**2.3. Методы введения поправок, представляющие собой сочетания методов с симметричным введением одноименных поправок в аддитивную и мультипликативную составляющие погрешности воспроизведения базового значения варианты**

*Метод 15.* Введение поправок  $\Delta k_{xa1}$  и  $\Delta k_{n1}$  в аддитивную и мультипликативную составляющие погрешности воспроизведения варианты соответственно. В результате модифицированное УЧЗ варианты примет вид:

$$k'_{xn15} = k_x + \left( \frac{\{\Delta U_q\}}{\{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}\}} + \Delta k_{xa1} \right) - \left( k_x \frac{\{\Delta U_3\}}{\{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}\}} + \Delta k_{n1} \right) = k_x + \Delta k'_{xa1} - \Delta k'_{xm1}. \quad (23)$$

где  $\Delta k'_{xa1}$  и  $\Delta k'_{xm1}$  — аддитивная составляющая погрешности воспроизведения варианты с учетом поправок  $\Delta k_{xa1}$  и  $\Delta k_{n1}$ .

*Метод 16.* Введение поправок  $\Delta U'_{n1}$  и  $\Delta U''_{n1}$  в числители аддитивной и мультипликативной составляющей погрешности воспроизведения варианты. В этом случае значение варианты определяется по модифицированному УЧЗ

$$k'_{xn16} = k_x + \frac{\{\Delta U_q\} + \{\Delta U'_{n1}\}}{\{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}\}} - k_x \frac{\{\Delta U_3\} + \{\Delta U''_{n1}\}}{\{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}\}} = k_x + \Delta k'_{xa2} - \Delta k'_{xm2}, \quad (24)$$

где  $\Delta k'_{xa2}$  и  $\Delta k'_{xm2}$  — аддитивная и мультипликативная составляющие погрешности воспроизведения варианты с учетом поправок  $\Delta U'_{n1}$  и  $\Delta U''_{n1}$ .

*Метод 17.* Введение поправок  $\Delta U'_{n2}$  и  $\Delta U''_{n2}$  в знаменатели, соответственно, аддитивной и мультипликативной составляющей погрешности воспроизведения варианты. Тогда модифицированное УЧЗ примет вид:

$$k'_{xn17} = k_x + \frac{\{\Delta U_q\}}{\{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}\} + \{\Delta U'_{n2}\}} - k_x \frac{\{\Delta U_3\}}{\{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}\} + \{\Delta U''_{n2}\}} = k_x + \Delta k'_{xa3} - \Delta k'_{xm3}, \quad (25)$$

где  $\Delta k'_{xa3}$  и  $\Delta k'_{xm3}$  — аддитивная и мультипликативная составляющие погрешности воспроизведения варианты с учетом поправок  $\Delta U'_{n2}$  и  $\Delta U''_{n2}$ .

*Метод 17.* Введение поправок  $\Delta U'_{n1}$  и  $\Delta U''_{n1}$ ,  $\Delta U'_{n2}$  и  $\Delta U''_{n2}$  в числители и знаменатели, соответственно, аддитивной и мультипликативной составляющих погрешности воспроизведения варианты. Значение варианты определяется по модифицированному УЧЗ вида

$$k'_{xn17} = k_x + \frac{\{\Delta U_q\} + \{\Delta U'_{n1}\}}{\{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}\} + \{\Delta U'_{n2}\}} - k_x \frac{\{\Delta U_3\} + \{\Delta U''_{n1}\}}{\{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}\} + \{\Delta U''_{n2}\}} = k_x + \Delta k'_{xa4} - \Delta k'_{xm4}, \quad (26)$$

где  $\Delta k'_{xa4}$  и  $\Delta k'_{xm4}$  — аддитивная и мультипликативная составляющие погрешности воспроизведения

варианты с учетом поправок  $\Delta U'_{n1}$  и  $\Delta U''_{n1}$ ,  $\Delta U'_{n2}$  и  $\Delta U''_{n2}$ .

*Метод 18.* Введение поправок  $\Delta U'_{n1}$ ,  $\Delta U''_{n1}$  и  $\Delta k'_{n1}$ ,  $\Delta k''_{n1}$  в числители аддитивной и мультипликативной составляющих погрешности воспроизведения варианты и в сами составляющие. В этом случае

$$k'_{xп18} = k_x + \left( \frac{\{\Delta U_4\} + \{\Delta U'_{n1}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} + \Delta k'_{n1} \right) - \left( k_x \frac{\{\Delta U_3\} + \{\Delta U''_{n1}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} + \Delta k''_{n1} \right) = k_x + \Delta k'_{xа5} - \Delta k'_{xм5}. \quad (27)$$

где  $\Delta k'_{xа5}$  и  $\Delta k'_{xм5}$  — аддитивная и мультипликативная составляющие погрешности воспроизведения варианты с учетом поправок  $\Delta U'_{n1}$  и  $\Delta U''_{n1}$ ,  $\Delta U'_{n2}$  и  $\Delta U''_{n2}$ .

*Метод 19.* Введение поправок  $\Delta U'_{n2}$ ,  $\Delta U''_{n2}$  и  $\Delta k'_{n2}$ ,  $\Delta k''_{n2}$  соответственно в знаменатели аддитивной и мультипликативной составляющих погрешности воспроизведения варианты и в саму составляющую. Тогда модифицированное УЧЗ для варианты примет вид

$$k'_{xп19} = k_x + \left( \frac{\{\Delta U_4\}}{(\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}) + \{\Delta U'_{n2}\}} + \Delta k'_{n2} \right) - \left( k_x \frac{\{\Delta U_3\}}{(\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}) + \{\Delta U''_{n2}\}} + \Delta k''_{n2} \right) = k_x + \Delta k'_{xа6} - \Delta k'_{xм6}. \quad (28)$$

где  $\Delta k'_{xа6}$  и  $\Delta k'_{xм6}$  — аддитивная и мультипликативная составляющие погрешности воспроизведения варианты с учетом поправок  $\Delta U'_{n2}$ ,  $\Delta U''_{n2}$  и  $\Delta k'_{n2}$ ,  $\Delta k''_{n2}$ .

*Метод 20.* Введение поправок  $\Delta U'_{n1}$  и  $\Delta U''_{n1}$ ,  $\Delta U'_{n2}$  и  $\Delta U''_{n2}$ ,  $\Delta k'_{n3}$  и  $\Delta k''_{n3}$  в числители и знаменатели аддитивной и мультипликативной составляющих погрешности воспроизведения варианты и в сами составляющие. В результате модифицированное УЧЗ варианты примет вид:

$$k'_{xп20} = k_x + \left( \frac{\{\Delta U_4\} + \{\Delta U'_{n1}\}}{(\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}) + \{\Delta U'_{n2}\}} + \Delta k'_{n3} \right) - \left( k_x \frac{\{\Delta U_3\} + \{\Delta U''_{n1}\}}{(\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}) + \{\Delta U''_{n2}\}} + \Delta k''_{n3} \right) = k_x + \Delta k'_{xа7} - \Delta k'_{xм7}. \quad (29)$$

где  $\Delta k'_{xа7}$  и  $\Delta k'_{xм7}$  — аддитивная и мультипликативная составляющие погрешности воспроизведения варианты с учетом поправок  $\Delta U'_{n1}$  и  $\Delta U''_{n1}$ ,  $\Delta U'_{n2}$  и  $\Delta U''_{n2}$ ,  $\Delta k'_{n3}$  и  $\Delta k''_{n3}$ .

#### **2.4. Методы введения поправок, представляющие собой сочетания методов с асимметричным введением одноименных поправок или сочетание первого метода с остальными (кроме первого)**

*Метод 21.* Введение поправки  $\Delta k_{n1}$  и  $\Delta U_{n1}$  соответственно в аддитивную составляющую погрешности воспроизведения варианты и в числитель мультипликативной составляющей. В этом случае значение варианты определяется по модифицированному УЧЗ

$$k'_{xп21} = k_x + \left( \frac{\{\Delta U_4\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} + \Delta k_{n1} \right) - k_x \frac{\{\Delta U_3\} + \{\Delta U_{n1}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} = k_x + \Delta k'_{xа2} - \Delta k'_{xм2}, \quad (30)$$

где  $\Delta k'_{xа2}$  и  $\Delta k'_{xм2}$  — аддитивная и мультипликативная составляющие погрешности воспроизведения варианты с учетом поправок  $\Delta k_{n1}$  и  $\Delta U_{n1}$ .

*Метод 22.* Введение поправок  $\Delta k_{n1}$  и  $\Delta U_{n2}$  соответственно в аддитивную составляющую и в знаменатель мультипликативной составляющей погрешности воспроизведения варианты

$$k'_{xп22} = k_x + \left( \frac{\{\Delta U_4\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} + \Delta k_{n1} \right) - k_x \frac{\{\Delta U_3\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\} + \{\Delta U_{n2}\}} = k_x + \Delta k'_{xа2} - \Delta k'_{xм3}, \quad (31)$$

где  $\Delta k'_{xа2}$  и  $\Delta k'_{xм3}$  — аддитивная и мультипликативная составляющие погрешности воспроизведения варианты с учетом поправок  $\Delta k_{n1}$  и  $\Delta U_{n2}$ .

*Метод 23.* Введение поправок  $\Delta k_{n1}$  и  $\Delta U_{n1}$ ,  $\Delta U_{n2}$  соответственно в аддитивную составляющую и в числитель и знаменатель мультипликативной составляющих погрешности воспроизведения варианты. Тогда

$$k'_{xп23} = k_x + \left( \frac{\{\Delta U_4\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} + \Delta k_{n1} \right) - k_x \frac{\{\Delta U_3\} + \{\Delta U_{n1}\}}{(\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}) + \{\Delta U_{n2}\}} = k_x + \Delta k'_{xа2} - \Delta k'_{xм4}, \quad (32)$$

де  $\Delta k'_{xa2}$  і  $\Delta k'_{xm4}$  — аддитивна і мультипликативна составляючі погрешності воспроизведения варианты с учетом поправок  $\Delta k_{n1}$  і  $\Delta U_{n1}$ ,  $\Delta U_{n2}$ .

*Метод 24.* Введение поправок  $\Delta k'_{n1}$  і  $\Delta U_{n1}$ ,  $\Delta k''_{n1}$  соответственно в аддитивную составляющую, в числитель мультипликативной составляющей и в саму мультипликативную составляющую погрешности воспроизведения варианты. В этом случае модифицированное УЧЗ варианты примет вид:

$$k'_{xn24} = k_x + \left( \frac{\{\Delta U_4\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} + \Delta k'_{n1} \right) - \left( k_x \frac{\{\Delta U_3\} + \{\Delta U_{n1}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} + \Delta k''_{n1} \right) = k_x + \Delta k'_{xa3} - \Delta k'_{xm5}, \quad (33)$$

де  $\Delta k'_{xa3}$  і  $\Delta k'_{xm5}$  — аддитивна і мультипликативна составляючі погрешності воспроизведения варианты с учетом поправок  $\Delta k'_{n1}$  і  $\Delta U_{n1}$ ,  $\Delta k''_{n1}$ .

*Метод 25.* Введение поправок  $\Delta k'_{n1}$  і  $\Delta U_{n2}$ ,  $\Delta k''_{n1}$  соответственно в аддитивную составляющую, в знаменатель мультипликативной составляющей и в саму мультипликативную составляющую погрешности воспроизведения варианты. Тогда

$$k'_{xn25} = k_x + \left( \frac{\{\Delta U_4\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} + \Delta k'_{n1} \right) - k_x \frac{\{\Delta U_3\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\} + \{\Delta U_{n2}\}} + \Delta k''_{n1} = k_x + \Delta k'_{xa3} - \Delta k'_{xm6}. \quad (34)$$

де  $\Delta k'_{xa3}$  і  $\Delta k'_{xm6}$  — аддитивна і мультипликативна составляючі погрешності воспроизведения варианты с учетом поправок  $\Delta k'_{n1}$  і  $\Delta U_{n2}$ ,  $\Delta k''_{n1}$ .

*Метод 26.* Введение поправок  $\Delta k'_{n1}$  і  $\Delta U_{n1}$ ,  $\Delta U_{n2}$ ,  $\Delta k''_{n1}$  соответственно в аддитивную составляющую, в числитель и знаменатель мультипликативной составляющих погрешности воспроизведения варианты и в саму мультипликативную составляющую. В данном случае значение варианты определяется по модифицированному УЧЗ

$$k'_{xn26} = k_x + \left( \frac{\{\Delta U_4\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} + \Delta k'_{n1} \right) - \left( k_x \frac{\{\Delta U_3\} + \{\Delta U_{n1}\}}{(\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}) + \{\Delta U_{n2}\}} + \Delta k''_{n1} \right) = k_x + \Delta k'_{xa3} - \Delta k'_{xm7}, \quad (35)$$

де  $\Delta k'_{xa3}$  і  $\Delta k'_{xm7}$  — аддитивна і мультипликативна составляючі погрешності воспроизведения варианты с учетом поправок  $\Delta k'_{n1}$  і  $\Delta U_{n1}$ ,  $\Delta U_{n2}$ ,  $\Delta k''_{n1}$ .

## 2.5. Методы введения поправок, представляющие собой сочетания второго метода с остальными (кроме второго)

*Метод 27.* Введение поправок  $\Delta U_{n1}$  і  $\Delta k_{n1}$  соответственно в числитель аддитивной составляющей и непосредственно в мультипликативную составляющую погрешности воспроизведения варианты. В этом случае значение варианты определяется по модифицированному УЧЗ вида

$$k'_{xn27} = k_x + \left( \frac{\{\Delta U_4\} + \{\Delta U_{n1}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} \right) - \left( k_x \frac{\{\Delta U_3\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} + \Delta k_{n1} \right) = k_x + \Delta k_{xa2} - \Delta k'_{xm1}, \quad (36)$$

де  $\Delta k_{xa2}$  і  $\Delta k'_{xm1}$  — аддитивна і мультипликативна составляючі погрешності воспроизведения варианты с учетом поправок  $\Delta U_{n1}$  і  $\Delta k_{n1}$ .

*Метод 28.* Введение поправок  $\Delta U_{n1}$  і  $\Delta U_{n2}$  в аддитивную составляющую и в знаменатель мультипликативной составляющей погрешности воспроизведения варианты. Тогда

$$k'_{xn28} = k_x + \left( \frac{\{\Delta U_4\} + \{\Delta U_{n1}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} \right) - k_x \frac{\{\Delta U_3\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\} + \{\Delta U_{n2}\}} = k_x + \Delta k_{xa2} - \Delta k'_{xm3}, \quad (37)$$

де  $\Delta k_{xa2}$  і  $\Delta k'_{xm3}$  — аддитивна і мультипликативна составляючі погрешності воспроизведения варианты с учетом поправок  $\Delta U_{n1}$  і  $\Delta U_{n2}$ .

*Метод 29.* Введение поправок  $\Delta U'_{n1}$  і  $\Delta U''_{n1}$ ,  $\Delta U_{n2}$  в аддитивную составляющую и в числитель и знаменатель мультипликативной составляющих погрешности воспроизведения варианты. В этом случае

$$k'_{\text{xn29}} = k_x + \left( \frac{\{\Delta U_{\text{ч}}\} + \{\Delta U'_{\text{п1}}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} \right) - k_x \frac{\{\Delta U_3\} + \{\Delta U''_{\text{п1}}\}}{(\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}) + \{\Delta U_{\text{п2}}\}} = k_x + \Delta k_{\text{ха2}} - \Delta k'_{\text{хм4}}, \quad (38)$$

где  $\Delta k_{\text{ха2}}$  и  $\Delta k'_{\text{хм4}}$  — аддитивная и мультипликативная составляющие погрешности воспроизведения варианты с учетом поправок  $\Delta U'_{\text{п1}}$  и  $\Delta U''_{\text{п1}}$ ,  $\Delta U_{\text{п2}}$ .

*Метод 30.* Введение поправок  $\Delta U'_{\text{п1}}$  и  $\Delta U''_{\text{п1}}$ ,  $\Delta k_{\text{п1}}$  соответственно в аддитивную составляющую, в числитель мультипликативной составляющей и в саму мультипликативную составляющую погрешности воспроизведения варианты. Модифицированное УЧЗ варианты примет вид:

$$k'_{\text{xn30}} = k_x + \left( \frac{\{\Delta U_{\text{ч}}\} + \{\Delta U'_{\text{п1}}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} \right) - \left( k_x \frac{\{\Delta U_3\} + \{\Delta U''_{\text{п1}}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} + \Delta k_{\text{п1}} \right) = k_x + \Delta k_{\text{ха2}} - \Delta k'_{\text{хм5}}, \quad (39)$$

где  $\Delta k_{\text{ха2}}$  и  $\Delta k'_{\text{хм5}}$  — аддитивная и мультипликативная составляющие погрешности воспроизведения варианты с учетом поправок  $\Delta U'_{\text{п1}}$  и  $\Delta U''_{\text{п1}}$ ,  $\Delta k_{\text{п1}}$ .

*Метод 31.* Введение поправок  $\Delta U_{\text{п1}}$  и  $\Delta U_{\text{п2}}$ ,  $\Delta k_{\text{п1}}$  соответственно в аддитивную составляющую, в знаменатель мультипликативной составляющей и, непосредственно, в мультипликативную составляющую погрешности воспроизведения варианты. С этим случае модифицированное УЧЗ варианты примет вид:

$$k'_{\text{xn31}} = k_x + \left( \frac{\{\Delta U_{\text{ч}}\} + \{\Delta U_{\text{п1}}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} \right) - \left( k_x \frac{\{\Delta U_3\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\} + \{\Delta U_{\text{п2}}\}} + \Delta k_{\text{п1}} \right) = k_x + \Delta k_{\text{ха2}} - \Delta k'_{\text{хм6}}, \quad (40)$$

где  $\Delta k_{\text{ха2}}$  и  $\Delta k'_{\text{хм6}}$  — аддитивная и мультипликативная составляющие погрешности воспроизведения варианты с учетом поправок  $\Delta U_{\text{п1}}$  и  $\Delta U_{\text{п2}}$ ,  $\Delta k_{\text{п1}}$ .

*Метод 32.* Введение поправок  $\Delta U'_{\text{п1}}$  и  $\Delta U''_{\text{п1}}$ ,  $\Delta U_{\text{п2}}$ ,  $\Delta k_{\text{п1}}$  соответственно в аддитивную составляющую, в числитель и знаменатель мультипликативной составляющих погрешности воспроизведения варианты и в саму мультипликативную составляющую. В этом случае модифицированное УЧЗ варианты имеет вид

$$k'_{\text{xn32}} = k_x + \left( \frac{\{\Delta U_{\text{ч}}\} + \{\Delta U'_{\text{п1}}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} \right) - \left( k_x \frac{\{\Delta U_3\} + \{\Delta U''_{\text{п1}}\}}{(\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}) + \{\Delta U_{\text{п2}}\}} + \Delta k_{\text{п1}} \right) = k_x + \Delta k_{\text{ха2}} - \Delta k'_{\text{хм7}}. \quad (41)$$

где  $\Delta k_{\text{ха2}}$  и  $\Delta k'_{\text{хм7}}$  — аддитивная и мультипликативная составляющие погрешности воспроизведения варианты с учетом поправок  $\Delta U'_{\text{п1}}$  и  $\Delta U''_{\text{п1}}$ ,  $\Delta U_{\text{п2}}$ ,  $\Delta k_{\text{п1}}$ .

## 2.6. Методы введения поправок, представляющие собой сочетания третьего метода с остальными (кроме одноименного)

*Метод 33.* Введение поправок  $\Delta U_{\text{п2}}$  и  $\Delta k_{\text{п1}}$  соответственно в знаменатель аддитивной составляющей и, непосредственно, в мультипликативную составляющую погрешности воспроизведения варианты. Тогда модифицированное УЧЗ, по которому вычисляется значение варианты, примет вид

$$k'_{\text{xn33}} = k_x + \left( \frac{\{\Delta U_{\text{ч}}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\} + \{\Delta U_{\text{п2}}\}} \right) - \left( k_x \frac{\{\Delta U_3\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} + \Delta k_{\text{п1}} \right) = k_x + \Delta k_{\text{ха3}} - \Delta k'_{\text{хм1}}. \quad (42)$$

где  $\Delta k_{\text{ха3}}$  и  $\Delta k'_{\text{хм1}}$  — аддитивная и мультипликативная составляющие погрешности воспроизведения варианты с учетом поправок  $\Delta U_{\text{п2}}$  и  $\Delta k_{\text{п1}}$ .

*Метод 34.* Введение поправки  $\Delta U_{\text{п2}}$  и  $\Delta U_{\text{п1}}$  соответственно в знаменатель аддитивной и в числитель мультипликативной составляющих погрешности воспроизведения варианты. В этом случае

$$k'_{\text{xn34}} = k_x + \left( \frac{\{\Delta U_{\text{ч}}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\} + \{\Delta U_{\text{п2}}\}} \right) - k_x \frac{\{\Delta U_3\} + \{\Delta U_{\text{п1}}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} = k_x + \Delta k_{\text{ха3}} - \Delta k'_{\text{хм2}}, \quad (43)$$

где  $\Delta k_{\text{ха3}}$  и  $\Delta k'_{\text{хм2}}$  — аддитивная и мультипликативная составляющие погрешности воспроизведения варианты с учетом поправок  $\Delta U_{\text{п2}}$  и  $\Delta U_{\text{п1}}$ .

*Метод 35.* Введение поправок  $\Delta U_{\text{п2}}$  и  $\Delta U_{\text{п1}}$ ,  $\Delta k_{\text{п1}}$  соответственно в знаменатель аддитивной составляющей, в числитель мультипликативной составляющей и в саму мультипликативную составляющую погрешности воспроизведения варианты. Значение варианты определяется по модифицированному

$$k'_{xp35} = k_x + \left( \frac{\{\Delta U_q\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\} + \{\Delta U_{n2}\}} \right) - k_x \frac{\{\Delta U_3\} + \{\Delta U_{n1}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} + \Delta k_{n1} = k_x + \Delta k_{xa3} - \Delta k'_{xm4}, \quad (44)$$

где  $\Delta k_{xa3}$  и  $\Delta k'_{xm4}$  — аддитивная и мультипликативная составляющие погрешности воспроизведения варианты с учетом поправок  $\Delta U_{n1}$ ,  $\Delta U_{n2}$  и  $\Delta k_{n1}$ .

*Метод 36.* Введение поправок  $\Delta U'_{n2}$  и  $\Delta U''_{n2}$ ,  $\Delta U_{n1}$ ,  $\Delta k_{n1}$  соответственно в знаменатель аддитивной составляющей, в числитель и знаменатель мультипликативной составляющей погрешности воспроизведения варианты. В этом случае значение варианты определяется по модифицированному УЧЗ

$$k'_{xp36} = k_x + \left( \frac{\{\Delta U_q\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\} + \{\Delta U'_{n2}\}} \right) - k_x \frac{\{\Delta U_3\} + \{\Delta U_{n1}\}}{(\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}) + \{\Delta U''_{n2}\}} = k_x + \Delta k_{xa3} - \Delta k'_{xm5}, \quad (45)$$

где  $\Delta k_{xa3}$  и  $\Delta k'_{xm5}$  — аддитивная и мультипликативная составляющие погрешности воспроизведения варианты с учетом поправок  $\Delta U'_{n2}$  и  $\Delta U''_{n2}$ ,  $\Delta U_{n1}$ ,  $\Delta k_{n1}$ .

*Метод 37.* Введение поправок  $\Delta U_{n2}$  и  $\Delta U_{n1}$ ,  $\Delta k_{n1}$  соответственно в знаменатель аддитивной составляющей, в числитель мультипликативной составляющей и в саму мультипликативную составляющую погрешности воспроизведения варианты. Тогда

$$k'_{xp37} = k_x + \left( \frac{\{\Delta U_q\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\} + \{\Delta U_{n2}\}} \right) - \left( k_x \frac{\{\Delta U_3\} + \{\Delta U_{n1}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} + \Delta k_{n1} \right) = k_x + \Delta k_{xa3} - \Delta k'_{xm6}, \quad (46)$$

где  $\Delta k_{xa3}$  и  $\Delta k'_{xm6}$  — аддитивная и мультипликативная составляющие погрешности воспроизведения варианты с учетом поправок  $\Delta U_{n2}$  и  $\Delta U_{n1}$ ,  $\Delta k_{n1}$ .

*Метод 38.* Введение поправок  $\Delta U'_{n2}$  и  $\Delta U''_{n2}$ ,  $\Delta k_{n1}$  соответственно в знаменатель аддитивной составляющей, в знаменатель мультипликативной составляющей и, непосредственно, в мультипликативную составляющую погрешности воспроизведения варианты. Модифицированное УЧЗ варианты примет вид:

$$k'_{xp38} = k_x + \left( \frac{\{\Delta U_q\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\} + \{\Delta U'_{n2}\}} \right) - \left( k_x \frac{\{\Delta U_3\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\} + \{\Delta U''_{n2}\}} + \Delta k_{n1} \right) = k_x + \Delta k_{xa3} - \Delta k'_{xm7}, \quad (47)$$

где  $\Delta k_{xa3}$  и  $\Delta k'_{xm7}$  — аддитивная и мультипликативная составляющие погрешности воспроизведения варианты с учетом поправок  $\Delta U'_{n2}$ ,  $\Delta U''_{n2}$  и  $\Delta k_{n1}$ .

*Метод 39.* Введение поправок  $\Delta U'_{n2}$  и  $\Delta U_{n1}$ ,  $\Delta U''_{n2}$ ,  $\Delta k_{n1}$  соответственно в знаменатель аддитивной составляющей, в числитель и знаменатель мультипликативной составляющих погрешности воспроизведения варианты и в саму мультипликативную составляющую. В этом случае

$$k'_{xp39} = k_x + \left( \frac{\{\Delta U_q\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\} + \{\Delta U'_{n2}\}} \right) - \left( k_x \frac{\{\Delta U_3\} + \{\Delta U_{n1}\}}{(\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}) + \{\Delta U''_{n2}\}} + \Delta k_{n1} \right) = k_x + \Delta k_{xa3} - \Delta k'_{xm8}, \quad (48)$$

где  $\Delta k_{xa3}$  и  $\Delta k'_{xm8}$  — аддитивная и мультипликативная составляющие погрешности воспроизведения варианты с учетом поправок  $\Delta U_{n1}$ ,  $\Delta U'_{n2}$ ,  $\Delta U''_{n2}$  и  $\Delta k_{n1}$ .

## 2.7. Методы введения поправок, представляющие собой сочетания четвертого метода с остальными (кроме одноименного)

*Метод 40.* Введение поправок  $\Delta U_{n1}$ ,  $\Delta U_{n2}$  и  $\Delta k_{n1}$  соответственно в числитель и знаменатель аддитивной и, непосредственно, в мультипликативную составляющую погрешности воспроизведения варианты. Модифицированное УЧЗ варианты примет вид:

$$k'_{xp40} = k_x + \frac{\{\Delta U_q\} + \{\Delta U_{n1}\}}{(\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}) + \{\Delta U_{n2}\}} - \left( k_x \frac{\{\Delta U_3\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} + \Delta k_{n1} \right) = k_x + \Delta k_{xa4} - \Delta k'_{xm1}, \quad (49)$$

где  $\Delta k_{xa4}$  и  $\Delta k'_{xm1}$  — аддитивная и мультипликативная составляющие погрешности воспроизведения варианты с учетом поправок  $\Delta U_{n1}$ ,  $\Delta U_{n2}$  и  $\Delta k_{n1}$ .

*Метод 41.* Введение поправок  $\Delta U'_{n1}$ ,  $\Delta U_{n2}$  и  $\Delta U''_{n1}$  соответственно в числитель и знаменатель аддитивной и в числитель мультипликативной составляющих погрешности воспроизведения варианты. Значение варианты определяется по модифицированному УЧЗ

$$k'_{xp41} = k_x + \frac{\{\Delta U_q\} + \{\Delta U'_{n1}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\} + \{\Delta U_{n2}\}} - k_x \frac{\{\Delta U_3\} + \{\Delta U''_{n1}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} = k_x + \Delta k_{xa4} - \Delta k'_{xm2}, \quad (50)$$

где  $\Delta k_{xa4}$  и  $\Delta k'_{xm2}$  — аддитивная и мультипликативная составляющие погрешности воспроизведения варианты с учетом поправок  $\Delta U'_{n1}$ ,  $\Delta U_{n2}$  и  $\Delta U''_{n1}$ .

*Метод 42.* Введение поправок  $\Delta U_{n1}$ ,  $\Delta U'_{n2}$  и  $\Delta U''_{n2}$  соответственно в числитель и знаменатель аддитивной и в знаменатель мультипликативной составляющей погрешности воспроизведения варианты. Тогда

$$k'_{xp42} = k_x + \frac{\{\Delta U_q\} + \{\Delta U_{n1}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\} + \{\Delta U'_{n2}\}} - k_x \frac{\{\Delta U_3\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\} + \{\Delta U''_{n2}\}} = k_x + \Delta k_{xa4} - \Delta k'_{xm3}, \quad (51)$$

где  $\Delta k_{xa4}$  и  $\Delta k'_{xm3}$  — аддитивная и мультипликативная составляющие погрешности воспроизведения варианты с учетом поправок  $\Delta U_{n1}$ ,  $\Delta U'_{n2}$  и  $\Delta U''_{n2}$ .

*Метод 43.* Введение поправок  $\Delta U'_{n1}$ ,  $\Delta U_{n2}$  и  $\Delta U''_{n1}$ ,  $\Delta k_{n1}$  соответственно в числитель и знаменатель аддитивной составляющей, в числитель мультипликативной составляющей и в саму мультипликативную составляющую погрешности воспроизведения варианты. Варианта определяется по модифицированному УЧЗ

$$k'_{xp43} = k_x + \frac{\{\Delta U_q\} + \{\Delta U'_{n1}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\} + \{\Delta U_{n2}\}} - \left( k_x \frac{\{\Delta U_3\} + \{\Delta U''_{n1}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} + \Delta k_{n1} \right) = k_x + \Delta k_{xa4} - \Delta k'_{xm5}, \quad (52)$$

где  $\Delta k_{xa4}$  и  $\Delta k'_{xm5}$  — аддитивная и мультипликативная составляющие погрешности воспроизведения варианты с учетом поправок  $\Delta U'_{n1}$ ,  $\Delta U''_{n1}$ ,  $\Delta U_{n2}$  и  $\Delta k_{n1}$ .

*Метод 44.* Введение поправок  $\Delta U_{n1}$ ,  $\Delta U'_{n2}$  и  $\Delta U''_{n2}$ ,  $\Delta k_{n1}$  в числитель и знаменатель аддитивной составляющей, в знаменатель мультипликативной составляющей и, непосредственно, в мультипликативную составляющую погрешности воспроизведения варианты. В этом случае

$$k'_{xp44} = k_x + \frac{\{\Delta U_q\} + \{\Delta U_{n1}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\} + \{\Delta U'_{n2}\}} - \left( k_x \frac{\{\Delta U_3\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\} + \{\Delta U''_{n2}\}} + \Delta k_{n1} \right) = k_x + \Delta k_{xa4} - \Delta k'_{xm6}, \quad (53)$$

где  $\Delta k_{xa4}$  и  $\Delta k'_{xm6}$  — аддитивная и мультипликативная составляющие погрешности воспроизведения варианты с учетом поправок  $\Delta U'_{n1}$ ,  $\Delta U''_{n1}$ ,  $\Delta U_{n2}$  и  $\Delta k_{n1}$ .

*Метод 45.* Введение поправок  $\Delta U'_{n1}$ ,  $\Delta U'_{n2}$  и  $\Delta U''_{n1}$ ,  $\Delta U''_{n1}$ ,  $\Delta k_{n1}$  соответственно в числители и знаменатели аддитивной и мультипликативной составляющих, а также и в саму мультипликативную составляющую. В этом случае значение варианты определяется по модифицированному УЧЗ

$$k'_{xp45} = k_x + \frac{\{\Delta U_q\} + \{\Delta U'_{n1}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\} + \{\Delta U'_{n2}\}} - \left( k_x \frac{\{\Delta U_3\} + \{\Delta U''_{n1}\}}{(\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}) + \{\Delta U''_{n2}\}} + \Delta k_{n1} \right) = k_x + \Delta k'_{xa4} - \Delta k'_{xm7}, \quad (54)$$

где  $\Delta k'_{xa4}$  и  $\Delta k'_{xm7}$  — аддитивная и мультипликативная составляющие погрешности воспроизведения варианты с учетом поправок  $\Delta U'_{n1}$ ,  $\Delta U'_{n2}$  и  $\Delta U''_{n1}$ ,  $\Delta U''_{n1}$ ,  $\Delta k_{n1}$ .

## 2.8. Методы введения поправок, представляющие собой сочетания пятого метода с остальными (кроме одноименного пятого)

*Метод 46.* Введение поправок  $\Delta U_{n1}$ ,  $\Delta k'_{n1}$  и  $\Delta k''_{n1}$  соответственно в числитель аддитивной составляющей и в нее непосредственно, и в мультипликативную составляющую погрешности воспроизведения варианты. В этом случае

$$k'_{xp46} = k_x + \left( \frac{\{\Delta U_q\} + \{\Delta U_{n1}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} + \Delta k'_{n1} \right) - \left( k_x \frac{\{\Delta U_3\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} + \Delta k''_{n1} \right) = k_x + \Delta k_{xa5} - \Delta k'_{xm1}. \quad (55)$$

где  $\Delta k_{xa5}$  и  $\Delta k'_{xm1}$  — аддитивная и мультипликативная составляющие погрешности воспроизведения



варіанти с учетом поправок  $\Delta U_{п1}$ ,  $\Delta k'_{п1}$  и  $\Delta k''_{п1}$ .

*Метод 47.* Введение поправок  $\Delta U'_{п1}$ ,  $\Delta k'_{п1}$  и  $\Delta U''_{п1}$  соответственно в числитель аддитивной составляющей, в саму составляющую и в числитель мультипликативной составляющих погрешности воспроизведения варианты. Значение варианты определяется по модифицированному УЧЗ

$$k'_{хп47} = k_x + \left( \frac{\{\Delta U_4\} + \{\Delta U'_{п1}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} + \Delta k'_{п1} \right) - k_x \frac{\{\Delta U_3\} + \{\Delta U''_{п1}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} = k_x + \Delta k'_{ха5} - \Delta k'_{хм2}, \quad (56)$$

где  $\Delta k'_{ха5}$  и  $\Delta k'_{хм2}$  — аддитивная и мультипликативная составляющие погрешности воспроизведения варианты с учетом поправок  $\Delta U'_{п1}$ ,  $\Delta k'_{п1}$  и  $\Delta U''_{п1}$ .

*Метод 48.* Введение поправок  $\Delta U_{п1}$ ,  $\Delta k_{п1}$  и  $\Delta U_{п2}$  соответственно в числитель аддитивной составляющей, в саму составляющую, а также в знаменатель мультипликативной составляющую погрешности воспроизведения варианты. В этом случае значение варианты находят по модифицированному УЧЗ

$$k'_{хп42} = k_x + \left( \frac{\{\Delta U_4\} + \{\Delta U_{п1}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} + \Delta k_{п1} \right) - k_x \frac{\{\Delta U_3\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\} + \{\Delta U_{п2}\}} = k_x + \Delta k_{ха5} - \Delta k'_{хм3}, \quad (57)$$

где  $\Delta k_{ха5}$  и  $\Delta k'_{хм2}$  — аддитивная и мультипликативная составляющие погрешности воспроизведения варианты с учетом поправок  $\Delta U_{п1}$ ,  $\Delta k_{п1}$  и  $\Delta U_{п2}$ .

*Метод 49.* Введение поправок  $\Delta U'_{п1}$ ,  $\Delta k_{п1}$  и  $\Delta U''_{п1}$ ,  $\Delta U_{п2}$  соответственно в числитель аддитивной составляющей, в саму составляющую, а также в числитель и знаменатель мультипликативной составляющей погрешности воспроизведения варианты. Значение варианты

$$k'_{хп49} = k_x + \left( \frac{\{\Delta U_4\} + \{\Delta U'_{п1}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} + \Delta k_{п1} \right) - \left( k_x \frac{\{\Delta U_3\} + \{\Delta U''_{п1}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\} + \{\Delta U_{п2}\}} \right) = k_x + \Delta k_{ха5} - \Delta k'_{хм4}, \quad (58)$$

где  $\Delta k_{ха5}$  и  $\Delta k'_{хм4}$  — аддитивная и мультипликативная составляющие погрешности воспроизведения варианты с учетом поправок  $\Delta U'_{п1}$ ,  $\Delta U''_{п1}$ ,  $\Delta U_{п2}$  и  $\Delta k_{п1}$ .

*Метод 50.* Введение поправок  $\Delta U_{п1}$ ,  $\Delta k'_{п1}$  и  $\Delta U_{п2}$ ,  $\Delta k''_{п1}$  соответственно в числитель аддитивной составляющей, в саму составляющую, в знаменатель мультипликативной составляющей и, непосредственно, в саму мультипликативную составляющую погрешности воспроизведения варианты. Тогда

$$k'_{хп50} = k_x + \left( \frac{\{\Delta U_4\} + \{\Delta U_{п1}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} + \Delta k'_{п1} \right) - \left( k_x \frac{\{\Delta U_3\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\} + \{\Delta U_{п2}\}} + \Delta k''_{п1} \right) = k_x + \Delta k_{ха5} - \Delta k'_{хм6}, \quad (59)$$

где  $\Delta k_{ха5}$  и  $\Delta k'_{хм6}$  — аддитивная и мультипликативная составляющие погрешности воспроизведения варианты с учетом поправок  $\Delta U_{п1}$ ,  $\Delta U_{п2}$ ,  $\Delta k'_{п1}$  и  $\Delta k''_{п1}$ .

*Метод 51.* Введение поправок  $\Delta U'_{п1}$ ,  $\Delta k'_{п1}$  и  $\Delta U''_{п1}$ ,  $\Delta U_{п2}$ ,  $\Delta k''_{п1}$  соответственно в числитель аддитивной составляющей, в саму составляющую, в числитель и знаменатель мультипликативной составляющих и в саму мультипликативную составляющую погрешности воспроизведения варианты. В этом случае значение варианты определяется по УЧЗ

$$k'_{хп51} = k_x + \left( \frac{\{\Delta U_4\} + \{\Delta U'_{п1}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} + \Delta k'_{п1} \right) - \left( k_x \frac{\{\Delta U_3\} + \{\Delta U''_{п1}\}}{(\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}) + \{\Delta U_{п2}\}} + \Delta k''_{п1} \right) = k_x + \Delta k_{ха5} - \Delta k'_{хм7}. \quad (60)$$

где  $\Delta k_{ха5}$  и  $\Delta k'_{хм7}$  — аддитивная и мультипликативная составляющие погрешности воспроизведения варианты с учетом поправок  $\Delta U_{п1}$ ,  $\Delta U_{п2}$ ,  $\Delta k'_{п1}$  и  $\Delta k''_{п1}$ .

## 2.9. Методы введения поправок, представляющие собой сочетания шестого метода с остальными (кроме шестого)

*Метод 52.* Введение поправок  $\Delta U_{п2}$ ,  $\Delta k'_{п1}$  и  $\Delta k''_{п1}$  в знаменатель аддитивной составляющей и в нее непосредственно, и непосредственно, в мультипликативную составляющую погрешности воспроизведения варианты. В этом случае

$$k'_{\text{xp52}} = k_x + \left( \frac{\{\Delta U_4\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\} + \{\Delta U_{\text{п2}}\}} + \Delta k'_{\text{п1}} \right) - \left( k_x \frac{\{\Delta U_3\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} + \Delta k''_{\text{п1}} \right) = k_x + \Delta k_{\text{ха6}} - \Delta k'_{\text{хм1}}, \quad (61)$$

где  $\Delta k_{\text{ха6}}$  и  $\Delta k'_{\text{хм1}}$  — аддитивная и мультипликативная составляющие погрешности воспроизведения варианты с учетом поправок  $\Delta U_{\text{п2}}$ ,  $\Delta k'_{\text{п1}}$  и  $\Delta k''_{\text{п1}}$ .

*Метод 53.* Введение поправок  $\Delta U_{\text{п2}}$ ,  $\Delta k'_{\text{п1}}$  и  $\Delta U_{\text{п1}}$  в числитель аддитивной составляющей, в саму составляющую и в числитель мультипликативной составляющих погрешности воспроизведения варианты. Значение варианты определяется по модифицированному УЧЗ

$$k'_{\text{xp53}} = k_x + \left( \frac{\{\Delta U_4\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\} + \{\Delta U_{\text{п2}}\}} + \Delta k_{\text{п1}} \right) - k_x \frac{\{\Delta U_3\} + \{\Delta U_{\text{п1}}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} = k_x + \Delta k_{\text{ха6}} - \Delta k'_{\text{хм2}}. \quad (62)$$

где  $\Delta k_{\text{ха6}}$  и  $\Delta k'_{\text{хм2}}$  — аддитивная и мультипликативная составляющие погрешности воспроизведения варианты с учетом поправок  $\Delta U_{\text{п2}}$ ,  $\Delta k'_{\text{п1}}$  и  $\Delta U_{\text{п1}}$ ,  $\Delta k''_{\text{п1}}$ .

*Метод 54.* Введение поправок  $\Delta U'_{\text{п2}}$ ,  $\Delta k'_{\text{п1}}$  и  $\Delta U''_{\text{п2}}$  соответственно в знаменатель аддитивной составляющей, в саму составляющую, а также в знаменатель мультипликативной составляющую погрешности воспроизведения варианты. Значение варианты определяется по модифицированному УЧЗ

$$k'_{\text{xp54}} = k_x + \left( \frac{\{\Delta U_4\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\} + \{\Delta U'_{\text{п2}}\}} + \Delta k_{\text{п1}} \right) - k_x \frac{\{\Delta U_3\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\} + \{\Delta U''_{\text{п2}}\}} = k_x + \Delta k_{\text{ха6}} - \Delta k'_{\text{хм3}}, \quad (63)$$

где  $\Delta k_{\text{ха6}}$  и  $\Delta k'_{\text{хм3}}$  — аддитивная и мультипликативная составляющие погрешности воспроизведения варианты с учетом поправок  $\Delta U'_{\text{п2}}$ ,  $\Delta k'_{\text{п1}}$  и  $\Delta U''_{\text{п2}}$ .

*Метод 55.* Введение поправок  $\Delta U'_{\text{п2}}$ ,  $\Delta k_{\text{п1}}$  и  $\Delta U_{\text{п1}}$ ,  $\Delta U''_{\text{п1}}$  соответственно в знаменатель аддитивной составляющей, в саму составляющую, а также в числитель и знаменатель мультипликативной составляющей погрешности воспроизведения варианты. Модифицированное УЧЗ для определения значения варианты примет вид:

$$k'_{\text{xp55}} = k_x + \left( \frac{\{\Delta U_4\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\} + \{\Delta U'_{\text{п2}}\}} + \Delta k_{\text{п1}} \right) - \left( k_x \frac{\{\Delta U_3\} + \{\Delta U_{\text{п1}}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\} + \{\Delta U''_{\text{п2}}\}} \right) = k_x + \Delta k_{\text{ха6}} - \Delta k'_{\text{хм4}}, \quad (64)$$

где  $\Delta k_{\text{ха6}}$  и  $\Delta k'_{\text{хм4}}$  — аддитивная и мультипликативная составляющие погрешности воспроизведения варианты с учетом поправок  $\Delta U_{\text{п1}}$ ,  $\Delta U'_{\text{п2}}$ ,  $\Delta U''_{\text{п2}}$  и  $\Delta k_{\text{п1}}$ .

*Метод 56.* Введение поправок  $\Delta U_{\text{п2}}$ ,  $\Delta k'_{\text{п1}}$  и  $\Delta U_{\text{п1}}$ ,  $\Delta k''_{\text{п1}}$  соответственно в знаменатель аддитивной составляющей, в саму составляющую, в числитель и знаменатель мультипликативной составляющей и, непосредственно, в саму мультипликативную составляющую погрешности воспроизведения варианты. Тогда

$$k'_{\text{xp56}} = k_x + \left( \frac{\{\Delta U_4\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\} + \{\Delta U_{\text{п2}}\}} + \Delta k'_{\text{п1}} \right) - \left( k_x \frac{\{\Delta U_3\} + \{\Delta U_{\text{п1}}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} + \Delta k''_{\text{п1}} \right) = k_x + \Delta k_{\text{ха6}} - \Delta k'_{\text{хм5}}, \quad (65)$$

где  $\Delta k_{\text{ха6}}$  и  $\Delta k'_{\text{хм5}}$  — аддитивная и мультипликативная составляющие погрешности воспроизведения варианты с учетом поправок  $\Delta U_{\text{п1}}$ ,  $\Delta U_{\text{п2}}$ ,  $\Delta k'_{\text{п1}}$  и  $\Delta k''_{\text{п1}}$ .

*Метод 57.* Введение поправок  $\Delta U'_{\text{п2}}$ ,  $\Delta k'_{\text{п1}}$  и  $\Delta U_{\text{п1}}$ ,  $\Delta U''_{\text{п2}}$ ,  $\Delta k''_{\text{п1}}$  в знаменатель аддитивной составляющей, в саму составляющую, в числитель и знаменатель мультипликативной составляющей и, непосредственно, в саму мультипликативную составляющую погрешности воспроизведения варианты. В этом случае

$$k'_{\text{xp56}} = k_x + \left( \frac{\{\Delta U_4\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\} + \{\Delta U'_{\text{п2}}\}} + \Delta k'_{\text{п1}} \right) - \left( k_x \frac{\{\Delta U_3\} + \{\Delta U_{\text{п1}}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\} + \{\Delta U''_{\text{п2}}\}} + \Delta k''_{\text{п1}} \right) = k_x + \Delta k_{\text{ха6}} - \Delta k'_{\text{хм7}}, \quad (66)$$

где  $\Delta k_{\text{ха6}}$  и  $\Delta k'_{\text{хм7}}$  — аддитивная и мультипликативная составляющие погрешности воспроизведения варианты с учетом поправок  $\Delta U_{\text{п1}}$ ,  $\Delta U'_{\text{п2}}$ ,  $\Delta U''_{\text{п2}}$ ,  $\Delta k'_{\text{п1}}$  и  $\Delta k''_{\text{п1}}$ .

### 2.10. Методы введения поправок, представляющие собой сочетания седьмого метода с остальными (кроме одноименного седьмого)

*Метод 58.* Введение поправок  $\Delta U_{\text{п1}}$ ,  $\Delta U_{\text{п2}}$ ,  $\Delta k'_{\text{п1}}$  и  $\Delta k''_{\text{п1}}$  соответственно в числитель и знаменатель

аддитивної складової і в неї непосредственно, а также в мультипликативную складову погрешности воспроизведения варианты. Значение варианты определяется по модифицированному УЧЗ

$$k'_{\text{хп57}} = k_x + \left( \frac{\{\Delta U_q\} + \{\Delta U_{\text{п1}}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\} + \{\Delta U_{\text{п2}}\}} + \Delta k'_{\text{п1}} \right) - \left( k_x \frac{\{\Delta U_3\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} + \Delta k''_{\text{п1}} \right) = k_x + \Delta k_{\text{ха7}} - \Delta k'_{\text{хм1}}, \quad (67)$$

где  $\Delta k_{\text{ха7}}$  и  $\Delta k'_{\text{хм1}}$  — аддитивная и мультипликативная составляющие погрешности воспроизведения варианты с учетом поправок  $\Delta U_{\text{п1}}$ ,  $\Delta U_{\text{п2}}$ ,  $\Delta k'_{\text{п1}}$  и  $\Delta k''_{\text{п1}}$ .

*Метод 59.* Введение поправок  $\Delta U'_{\text{п1}}$ ,  $\Delta U_{\text{п2}}$ ,  $\Delta k_{\text{п1}}$  и  $\Delta U''_{\text{п1}}$  соответственно в числитель и знаменатель аддитивной составляющей, в саму составляющую и в числитель мультипликативной составляющих погрешности воспроизведения варианты. В этом случае

$$k'_{\text{хп58}} = k_x + \left( \frac{\{\Delta U_q\} + \{\Delta U'_{\text{п1}}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\} + \{\Delta U_{\text{п2}}\}} + \Delta k_{\text{п1}} \right) - k_x \frac{\{\Delta U_3\} + \{\Delta U''_{\text{п1}}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} = k_x + \Delta k_{\text{ха7}} - \Delta k'_{\text{хм2}}, \quad (68)$$

где  $\Delta k_{\text{ха7}}$  и  $\Delta k'_{\text{хм2}}$  — аддитивная и мультипликативная составляющие погрешности воспроизведения варианты с учетом поправок  $\Delta U'_{\text{п1}}$ ,  $\Delta U_{\text{п2}}$ ,  $\Delta k_{\text{п1}}$  и  $\Delta U''_{\text{п1}}$ .

*Метод 60.* Введение поправок  $\Delta U_{\text{п1}}$ ,  $\Delta U'_{\text{п2}}$ ,  $\Delta k_{\text{п1}}$  и  $\Delta U''_{\text{п2}}$  соответственно в числитель и знаменатель аддитивной составляющей, в саму составляющую, а также в знаменатель мультипликативной составляющую погрешности воспроизведения варианты. Тогда

$$k'_{\text{хп59}} = k_x + \left( \frac{\{\Delta U_q\} + \{\Delta U_{\text{п1}}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\} + \{\Delta U'_{\text{п2}}\}} + \Delta k_{\text{п1}} \right) - k_x \frac{\{\Delta U_3\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\} + \{\Delta U''_{\text{п2}}\}} = k_x + \Delta k_{\text{ха7}} - \Delta k'_{\text{хм3}}, \quad (69)$$

где  $\Delta k_{\text{ха7}}$  и  $\Delta k'_{\text{хм3}}$  — аддитивная и мультипликативная составляющие погрешности воспроизведения варианты с учетом поправок  $\Delta U_{\text{п1}}$ ,  $\Delta U'_{\text{п2}}$ ,  $\Delta U''_{\text{п2}}$  и  $\Delta k_{\text{п1}}$ .

*Метод 61.* Введение поправок  $\Delta U'_{\text{п1}}$ ,  $\Delta U'_{\text{п2}}$ ,  $\Delta k_{\text{п1}}$  и  $\Delta U''_{\text{п1}}$ ,  $\Delta U''_{\text{п2}}$  соответственно в числитель и знаменатель аддитивной и мультипликативной составляющих, а также в саму аддитивную составляющую погрешности воспроизведения варианты. Тогда значение варианты определяется по модифицированному УЧЗ

$$k'_{\text{хп60}} = k_x + \left( \frac{\{\Delta U_q\} + \{\Delta U'_{\text{п1}}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\} + \{\Delta U'_{\text{п2}}\}} + \Delta k_{\text{п1}} \right) - \left( k_x \frac{\{\Delta U_3\} + \{\Delta U''_{\text{п1}}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\} + \{\Delta U''_{\text{п2}}\}} \right) = k_x + \Delta k_{\text{ха7}} - \Delta k'_{\text{хм4}}, \quad (70)$$

где  $\Delta k_{\text{ха7}}$  и  $\Delta k'_{\text{хм4}}$  — аддитивная и мультипликативная составляющие погрешности воспроизведения варианты с учетом поправок  $\Delta U'_{\text{п1}}$ ,  $\Delta U''_{\text{п1}}$ ,  $\Delta U'_{\text{п2}}$ ,  $\Delta U''_{\text{п2}}$  и  $\Delta k_{\text{п1}}$ .

*Метод 62.* Введение поправок  $\Delta U'_{\text{п1}}$ ,  $\Delta U_{\text{п2}}$ ,  $\Delta k'_{\text{п1}}$  и  $\Delta U''_{\text{п1}}$ ,  $\Delta k''_{\text{п1}}$  в числитель и знаменатель аддитивной составляющей, в саму составляющую, в числитель и знаменатель мультипликативной составляющей и, непосредственно, в саму мультипликативную составляющую погрешности воспроизведения варианты. В данном случае значение варианты определяется по модифицированному УЧЗ

$$k'_{\text{хп61}} = k_x + \left( \frac{\{\Delta U_q\} + \{\Delta U'_{\text{п1}}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\} + \{\Delta U_{\text{п2}}\}} + \Delta k'_{\text{п1}} \right) - \left( k_x \frac{\{\Delta U_3\} + \{\Delta U''_{\text{п1}}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\}} + \Delta k''_{\text{п1}} \right) = k_x + \Delta k_{\text{ха7}} - \Delta k'_{\text{хм5}}, \quad (71)$$

где  $\Delta k_{\text{ха7}}$  и  $\Delta k'_{\text{хм5}}$  — аддитивная и мультипликативная составляющие погрешности воспроизведения варианты с учетом поправок  $\Delta U'_{\text{п1}}$ ,  $\Delta U_{\text{п2}}$ ,  $\Delta k'_{\text{п1}}$  и  $\Delta U''_{\text{п1}}$ ,  $\Delta k''_{\text{п1}}$ .

*Метод 63.* Введение поправок  $\Delta U_{\text{п1}}$ ,  $\Delta U'_{\text{п2}}$ ,  $\Delta k'_{\text{п1}}$  и  $\Delta U''_{\text{п2}}$ ,  $\Delta k''_{\text{п1}}$  соответственно в числитель и знаменатель аддитивной составляющей, в саму составляющую, в знаменатель мультипликативной составляющей и, непосредственно, в саму мультипликативную составляющую погрешности воспроизведения варианты. Значение варианты определяется по УЧЗ

$$k'_{\text{хп62}} = k_x + \left( \frac{\{\Delta U_q\} + \{\Delta U_{\text{п1}}\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\} + \{\Delta U'_{\text{п2}}\}} + \Delta k'_{\text{п1}} \right) - \left( k_x \frac{\{\Delta U_3\}}{\{\Delta U_{32}\} + \{\Delta U_3\} + \{\Delta U''_{\text{п2}}\}} + \Delta k''_{\text{п1}} \right) = k_x + \Delta k_{\text{ха7}} - \Delta k'_{\text{хм6}}, \quad (72)$$

где  $\Delta k_{\text{ха7}}$  и  $\Delta k'_{\text{хм6}}$  — аддитивная и мультипликативная составляющие погрешности воспроизведения варианты с учетом поправок  $\Delta U_{\text{п1}}$ ,  $\Delta U'_{\text{п2}}$ ,  $\Delta U''_{\text{п2}}$ ,  $\Delta k'_{\text{п1}}$  и  $\Delta k''_{\text{п1}}$ .

Представленные методы повышения точности обработки результатов измерительного преобразования физических величин имеют одно и то же назначение — путем введения поправок изменить значения

аддитивной и/или мультипликативной составляющих погрешности воспроизведения базового значения варианты. Конечный результат определяется как произведение нормированной по значению физической величины  $x_0$  на уточненное базовое значение варианты  $k'_{\text{лт}} = k_x + \Delta k_{\text{ха}} - \Delta k'_{\text{хм}}$ .

### Выводы

1. В результате вычислений значений искомой физической величины по УЧЗ (5), (6), (7), (9), (10), (11) конечные результаты получают завышенными, поскольку абсолютные и относительные значения погрешностей суммируются по модулю, т.е. без учета их знаков.

2. Относительная погрешность результата избыточных измерений обратно пропорциональна произведению абсолютных значений образцовой физической величины  $x_0$  и варианты  $k'_x$ . При неизменном значении физической величины  $x_0$ , значение относительной погрешности можно изменять только путем изменения значения варианты  $k'_x = k_x + \Delta k_{\text{ха}} - k_x \Delta k_{\text{хм}}$  или путем введения поправок в результаты вычисления разностей  $\Delta U'_{31}$  и  $\Delta U'_{32}$ .

3. Исследования показали, что принятые допущения в ряде частных случаев приводят к завышенным в 1,1 – 2 раза границам полосы неопределенности.

4. Рекомендации математиков (см. табл. 1) по определению погрешностей выполнения машинных операций обработки приближенных данных (чисел) дают оценочные результаты и не могут быть использованы для решения задачи повышения точности машинной обработки данных при избыточных измерениях.

5. Погрешность воспроизведения нормированной по значению физической величины  $x_0$  не всегда удается получить весьма малого значения. Поэтому основные усилия разработчиков средств измерений следует прилагать к созданию и использованию высокоточных многозарядных аналого-цифровых преобразователей для каналов измерительного преобразования физических величин. Значение погрешности измерительного преобразования физических величин должна быть на порядок меньше значения погрешности воспроизведения нормированной по значению физической величины.

6. Установлено 63 метода введения поправок в аддитивную и мультипликативную составляющие погрешности воспроизведения базового значения варианты. Приведены 63 модифицированных УЧЗ, по которым вычисляется значение варианты, а, следовательно, и искомой физической величины, с повышенной точностью.

7. Практический интерес представляют методы введения одной поправки, как более простые в реализации. Полагаем, что выбор значений поправок должен осуществляться в пределах младшего разряда, содержащего сомнительную цифру. Знак поправки определяется знаком погрешности и местоположением «поправляемой» величины (числитель и/или знаменатель).

8. Недостатком описанных методов является сложность выбора значений поправок, необходимость использования и развития эвристических методов повышения точности определения базового значения варианты.

### Литература

1. Кондратов В.Т. Фундаментальная метрология: Теория структурного анализа уравнений избыточных и сверхизбыточных измерений. Сообщение 6 (Аналитические методы)/ В.Т.Кондратов // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. — 2017. — №2. — С. 199 – 215.

2. Кондратов В.Т. Фундаментальная метрология: Теория структурного анализа уравнений избыточных и сверхизбыточных измерений. Сообщение 5 (Графоаналитические методы введения поправок)/ В.Т.Кондратов // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. — 2017. — №2. — С. 7 – 23.

3. Кондратов В.Т. Фундаментальная метрология: Теория структурного анализа уравнений избыточных и сверхизбыточных измерений. Сообщение 3 / В.Т.Кондратов // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. — 2016. — №3. — С. 7 – 26.

4. Кондратов В.Т. Фундаментальная метрология: Теория структурного анализа уравнений избыточных и сверхизбыточных измерений. Сообщение 4. Методология повышения точности обработки округленных данных / В.Т.Кондратов // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. — 2017. — №1. — С. 7 – 26.

### References

1. Kondratov V.T. Fundametal'naya metrologiya: Teoriya struktornogo analiza uravneniy izbytochnykh i sverkhizbytochnykh izmereniy. Soobshcheniye 6 (Analiticheskiye metody)/ V.T.Kondratov // Vimiryuval'na ta obchislyuval'na tekhnika v tekhnologichnikh protsesakh. — 2017. — №2. — S. 199 – 215.

2. Kondratov V.T. Fundametal'naya metrologiya: Teoriya struktornogo analiza uravneniy izbytochnykh i sverkhizbytochnykh izmereniy. Soobshcheniye 6 (Grafoanaliticheskiye metody vvedeniya popravok)/ V.T.Kondratov // Vimiryuval'na ta obchislyuval'na tekhnika v tekhnologichnikh protsesakh. — 2017. — №2. — S. 7 – 23.

3. Kondratov V.T. Fundametal'naya metrologiya: Teoriya struktornogo analiza uravneniy izbytochnykh i sverkhizbytochnykh izmereniy. Soobshcheniye 3 / V.T.Kondratov // Vimiryuval'na ta obchislyuval'na tekhnika v tekhnologichnikh protsesakh. — 2016. — №3. — S. 7 – 26.

4. Kondratov V.T. Fundamental'naya metrologiya: Teoriya struktur-nogo analiza uravneniy izbytochnykh i sverkhizbytochnykh izmereniy. Soobshcheniye 4. Metodologiya povysheniya tochnosti obrabotki okruglennykh dannykh / V.T.Kondratov // Vimiryuval'na ta obchislyuval'na tekhnika v tekhnologichnikh protsesakh. — 2017. — №1. — S. 7 – 26.

Отримана/Received : 21.9.2017 р. Надрукована/Printed : 6.10.2017 р.  
Стаття рецензована редакційною колегією