УДК 621.396

Н.А. ОДЕГОВ
Одесская национальная академия связи им. А.С. Попова

ИНВАРИАНТНОСТЬ СИММЕТРИИ ОПТИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСОВ

Работа посвящена исследованиям аналитических свойств математических моделей оптических импульсов. Рассматривается частный случай влияния материальной дисперсии на форму оптического импульса. Доказывается, что при выполнении ряда условий свойство симметрии оптического импульса оказывается инвариантным к материальной дисперсии в оптическом волокне.

Для доказательства устойчивости симметрии оптического импульса рассматриваются свойства четных и нечетных функций. Данные функции объединены в общий класс функций с четным квадратом. Рассматриваются свойства интегральных преобразований с сохранением симметрии. Показано, что преобразование Фурье относится к данному классу интегральных преобразований.

Инвариантность симметрии оптического импульса показана как для случая дисперсии второго порядка, так и для дисперсии высших порядков. Соответственно обосновано, что распределение энергии в спектральной области также будет симметричной функцией относительно несущей частоты в случае, если в оптическое волокно вводится симметричный импульс.

Ключевые слова: *дисперсия, функции с четным квадратом, сигнал, спектр, преобразование Фурье, оптическое волокно.*

N.A. ODEGOV
Odessa national academy of communications n.a. A.S. Popov

INVARIANCE OF THE SYMMETRY OF OPTICAL PULSES

The work is devoted to the research of analytical properties of mathematical models of optical pulses. A special case of the influence of material dispersion on the shape of the optical pulse is considered. It is proved that, when a number of conditions are satisfied, the symmetry property of the optical pulse proves to be invariant to the material dispersion in the optical fiber.

Analytical conclusions are obtained in the following assumptions:

– the effective width of the spectrum of the low-frequency component of the pulse is much smaller than the carrier frequency;

– the optical fiber functions in a single-mode regime and the material dispersion prevails over the other components of the dispersion (waveguide, mode, polarization);

– the effective width of the spectrum of the low-frequency component of the pulse is sufficiently small to neglect the dependence of the damping function on the frequency;

– nonlinear effects such as phase self-modulation or four-wave mixing are negligibly small.

To prove the stability of the symmetry of an optical pulse, the properties of even and odd functions are considered. These functions are combined into a common class of functions with an even square.

The properties of integral transformations with preservation of symmetry are considered. It is shown that the Fourier transform belongs to this class of integral transformations.

As a starting point, the model for the evolution of the electric field of an optical signal in the form of an inverse Fourier transform of the spectral density is adopted. The initial spectral density varies in accordance with the phase coefficient, which depends on the wave function. We use a well-known method of representing phase functions in the form of a Taylor expansion.

The invariance of the symmetry of the optical pulse is shown both for the case of second-order dispersion and for higher-order dispersion. Accordingly, it is justified that the energy distribution in the spectral region will also be a symmetric function with respect to the carrier frequency in the case when a symmetric pulse is introduced into the optical fiber.

Keywords*: dispersion, even-square functions, signal, spectrum, Fourier transform, optical fiber.*

Введение

Во многих источниках, посвященных исследованию дисперсии в оптическом волокне (ОВ) можно обнаружить иллюстрацию дисперсионного искажения оптического импульса (ОИ) приблизительно такую, как показано на рис.1.

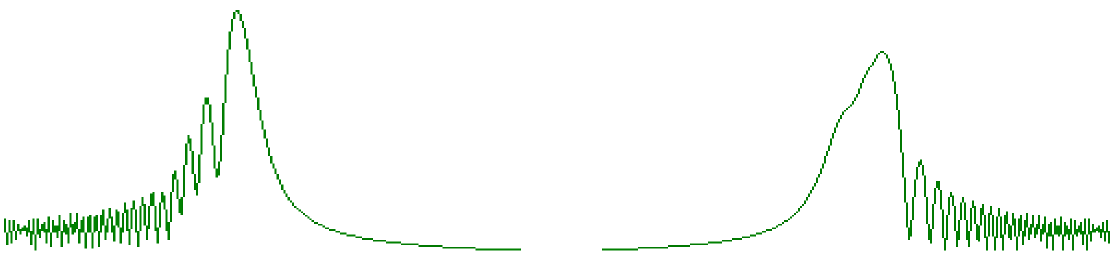

Рисунок 1 – Интуитивные представления о форме оптического импульса, подверженного материальной дисперсии: слева – нормальная дисперсия; справа – аномальная дисперсия

Видимо, такие иллюстрации отражают интуитивные представления авторов о том, что в случае нормальной (положительной) дисперсии передний фронт формируется низкочастотными составляющими, а задний – высокочастотными. Соответственно, в случае аномальной (отрицательной) дисперсии получается обратная картина.

Даже в классических монографиях можно встретить аналогичные иллюстрации. Например, в [1, с. 69] дисперсия высших порядков иллюстрируется рис. 2. В том же источнике находим иллюстрации [напр., 1, с. 65], где импульс, претерпевая существенные деформации, остается симметричным (рис. 3).

Казалось бы, какая разница – сохранит ли ОИ симметричную форму при распространении вдоль ОВ? Если речь идет об иллюстративном материале, то, возможно, и никакой. Если же решаются более серьезные задачи аналитического или численного моделирования физических процессов [2,3], то весьма важно представлять хотя бы общие свойства получаемых решений. Это помогает избежать грубых ошибок при синтезе моделей и анализе результатов моделирования.

Целью статьи является обоснование устойчивости свойства симметрии ОИ, подверженных дисперсионным искажениям.

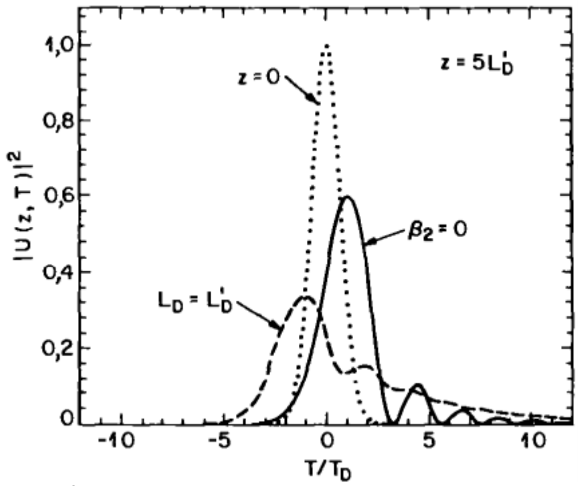

Рисунок 2 – Искажение формы гауссового импульса под влиянием дисперсии высшего порядка (цитируется по [1])

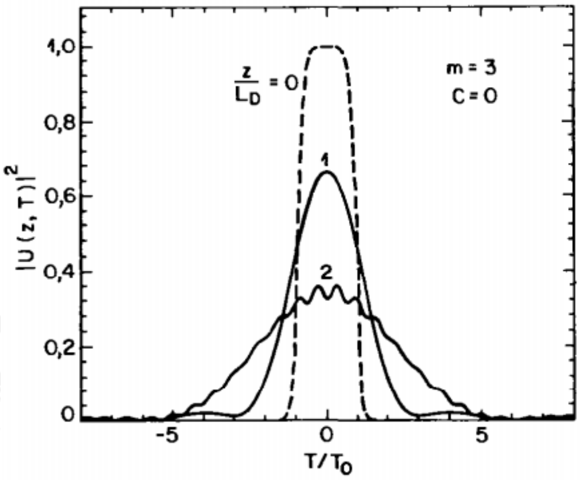

Рисунок 3 – Искажение формы супергауссового импульса под влиянием дисперсии (цитируется по [1])

1. Исходная модель, соглашения, предположения, допущения

Когда мы говорим о «форме» ОИ, то пользуемся, скорее слэнгом, нежели строгими категориями. Оптический импульс можно увидеть, когда занимаешься дуговой сваркой: не успел опустить маску и получил «зайчика». После этого наблюдаешь ОИ пару часов в виде змеек на сетчатке. Получить форму ОИ длительностью порядка 1…10 пс не позволит инерция электронно-лучевой трубки осциллографа. По крайней мере, решая задачу визуализации ОИ, необходимо существенно изменить масштаб времени, что представляет отдельную техническую задачу.

Ниже, говоря о «форме» ОИ, будем понимать распределение его энергии во временной области.

В качестве исходной модели эволюции низкочастотной составляющей (НЧС) ОИ примем известное представление составляющей электрического поля (составляющая магнитного поля описывается такими же зависимостями). Данное представление цитируется по [4], где очень аккуратно применены теоремы запаздывания и модуляции:

$$E(t,z,\omega_0) = \exp(-\gamma z,\omega_0)\exp(\omega_0 t)U(t,z)\,, \tag{1}$$

$$U(t,z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(j\Omega t)\exp\left(-j\frac{z}{m!}\sum_{m=2}^{M}\beta_0^{[m]}\Omega^m\right)G_0(\Omega)d\Omega\,, \tag{2}$$

$$\beta_0^{[m]} = \frac{\partial^m \beta(\omega)}{\partial\omega^m},\quad при\quad \omega=\omega_0,\quad \beta(\omega)=\frac{n(\omega)\omega}{c}\ ,$$

где $E(t,z,\omega_0)$ – напряженность электрической составляющей поля на расстоянии z от точки ввода ОИ в ОВ; ω_0 – несущая частота; $\exp(-\gamma z,\omega_0)$ – функция затухания; $U(t,z)$ – низкочастотная составляющая (НЧС) ОИ; $\Omega=\omega-\omega_0$ – отклонение частоты от несущей; $\beta(\omega)$ – волновая функция; $G_0(\Omega)$ – спектральная плотность НЧС ОИ в момент ввода в ОВ; $n(\omega)$ – зависимость коэффициента преломления от частоты.

Модель (1–2) можно считать адекватной при выполнении ряда условий:

– эффективная ширина спектра НЧС ОИ значительно меньше несущей частоты ω_0;

– ОВ функционирует в одномодовом режиме и материальная дисперсия превалирует над остальными составляющими дисперсии (волноводной, модовой, поляризационной);

– эффективная ширина спектра НЧС ОИ достаточно мала для того, чтобы пренебречь зависимостью функции затухания от частоты;

– нелинейные эффекты типа фазовой самомодуляции или четырехволнового смешивания пренебрежимо малы.

В этих условиях при рассмотрении формы ОИ достаточно ограничиться зависимостью (2). Исходным предположением будет условие симметрии формы импульса в момент ввода в ОВ. Чтобы строго показать устойчивость данного свойства, рассмотрим некоторые свойства симметрии функций и интегральных преобразований.

2. Свойства функций с четным квадратом

Рассмотрим класс функций, объединяющий четные $f(x)=f(-x)$ и нечетные $f(x)=-f(-x)$ функции. Общим свойством данного класса функций является четность их квадрата: $f^2(x)=f^2(-x)$. Далее такие функции называются функциями с четным квадратом (ФЧК). Ниже последовательно устанавливаются свойства таких функций. Очевидные положения приводятся без доказательства.

Сначала рассмотрим свойства вещественных ФЧК. Если это не будет вызывать недоразумений, указание аргумента опустим.

Свойство 1. ФЧК имеет четный модуль и вообще $\left|f(x)\right|^{\alpha}=\left|f(-x)\right|^{\alpha}$, где α – любое действительное число.

Свойство 2. В результате умножения ФЧК на любое действительное число b получается ФЧК. В самом деле, $[bf(-x)]^2=b^2(\pm1)^2f^2(x)=[bf(x)]^2$.

Свойство 3. Произведение двух ФЧК $f(x)$ и $q(x)$ – также ФЧК, поскольку $[f(-x)g(-x)]^2=(\pm1)^2[f(x)g(x)]^2=[f(x)g(x)]^2$.

Свойство 4. Применяя рекурсивно Свойство 3, приходим к выводу, что если имеется множество ФЧК $f_1(x), f_2(x), ..., f_K(x)$, то $\prod_{k=1}^{K} f_k(x)$ – также ФЧК.

Свойство 5. Алгебраическая сумма четных функций – четная функция, алгебраическая сумма нечетных функций – нечетная функция. В том и другом случае данные алгебраические суммы суть ФЧК. Следовательно, сумма квадратов ФЧК – также ФЧК.

Свойство 6. На множестве вещественных функций класс ФЧК включает только и только четные и нечетные функции.

В случае комплексных функций их квадрат определяется

$$f^2=f\cdot f^*=\mathrm{Re}^2 f+\mathrm{Im}^2 f. \tag{3}$$

Четность квадрата такой функции однозначно определяется равенством, которое и полагается определением ФЧК на множестве комплексных функций:

$$\mathrm{Re}^2 f(x)+\mathrm{Im}^2 f(x)=\mathrm{Re}^2 f(-x)+\mathrm{Im}^2 f(-x). \tag{4}$$

Свойство 7. Если действительная и мнимая части комплексной функции ФЧК, то и сама эта функция – также ФЧК. Это непосредственно следует из определений (3 – 4) и Свойства 5.

Свойство 8. Произведение комплексных ФЧК – также ФЧК. В самом деле, произведение комплексных функций: $fq=\mathrm{Re}f\,\mathrm{Re}q-\mathrm{Im}f\,\mathrm{Im}q+j(\mathrm{Im}f\,\mathrm{Re}q+\mathrm{Re}f\,\mathrm{Im}q)$. Квадрат этого произведения

$$(fq)^2=(fq)(fq)^*=(\mathrm{Re}f\,\mathrm{Re}q-\mathrm{Im}f\,\mathrm{Im}q)^2+(\mathrm{Im}f\,\mathrm{Re}q+\mathrm{Re}f\,\mathrm{Im}q)^2=$$
$$=(\mathrm{Re}^2 f+\mathrm{Im}^2 f)(\mathrm{Re}^2 q+\mathrm{Im}^2 q),$$

т.е., получаем произведение квадратов комплексных функций. Свойство 8 следует, таким образом, из определения (4) и Свойства 3.

Свойство 9. Произведение нескольких комплексных ФЧК – также ФЧК. Это следствие Свойства 4.

Для функций нескольких аргументов четность или нечетность можно рассматривать, если зафиксировать значения всех аргументов кроме одного, т.е. свести задачу исследования к функции одного аргумента. В целях настоящей работы достаточно рассмотреть некоторые свойства четности/нечетности функций двух аргументов.

Определение 1. Функция двух аргументов $g(x,y)$ называется далее всюду симметричной по аргументу y, если при любом фиксированном значении $y = y_0$ она сохраняет свойство четности или нечетности.

Определение 2. Функция двух аргументов $g(x,y)$ называется далее функцией с двойной симметрией, если она симметрична всюду как по аргументу x, так и по аргументу y.

Свойство 10. Если функция $g(x,y)$ всюду симметрична по аргументу y, то и функция $g(x,\alpha y)$, зависящая от скалярного множителя α также всюду симметрична по аргументу y. Доказывает это свойство то, что свойство симметрии справедливо при любом значении второго аргумента.

Свойство 11. Пусть функция $g(x,y)$ является функцией произведения аргументов $g(x,y) = q(xy)$ и всюду симметрична по любому из этих аргументов. Тогда она всюду симметрична и по другому аргументу, а также обладает свойством двойной симметрии. Первое из этих утверждений доказывается заменой переменных, а второе следует из Определения 2 двойной симметрии.

Свойство 12. Из Свойств 10 и 11 следует, что если функция $g(x,y) = q(xy)$ и функция $q(xy)$ всюду симметрична по одному из аргументов, то функция $q(\alpha xy)$, где α – скаляр, дважды симметрична.

Свойство 13. Если ядро интегрального преобразования $g(x,y)$ – всюду симметричная функция по аргументу y, а функция $f(x)$ – ФЧК, то в результате интегрального преобразования в симметричных пределах

$$u(y) = \int_{-a}^{a} g(x,y) f(x) dx \tag{5}$$

также будет получена функция $u(y)$ со свойствами ФЧК. Для доказательства представим интеграл (5) в виде суммы двух интегралов:

$$u(y) = I_+ + I_- = \int_{0}^{a} g(x,y) f(x) dx + \int_{-a}^{0} g(x,y) f(x) dx . \tag{6}$$

В силу четности (нечетности) функции $f(x)$ и симметрии всюду по y второй интеграл в выражении (6):

$$I_- = (\pm 1)\int_{0}^{a} g(x,y) f(x) dx = (\pm 1) I_+ ,$$

т.е. функция $u(y)$ или тождественно равна нулю и при этом тривиально сохраняет четность, или

$$u^2(y) = 4\left(\int_{0}^{a} g(x,y) f(x) dx\right)^2 . \tag{7}$$

Доказательство четности функции (7) элементарно следует из определения интеграла Римана (напр., [5, с.113]) и свойства симметрии ядра интегрального преобразования.

Определение 3. Интегральные преобразования над ФЧК, в результате которых также получается ФЧК, далее называются преобразованиями с сохранением симметрии.

Свойство 14. Если ядро интегрального преобразования $g(x,y)$ дважды симметрично, то прямое и обратное преобразование с таким ядром являются преобразованиями с сохранением симметрии. Доказательство данного предложения аналогично предыдущему с учетом двойной симметрии ядра.

Свойство 15. Ядра интегральных преобразований в виде функций $\cos(\alpha x^k y^m)$ или $\sin(\alpha x^k y^m)$, где k, m – целые числа, являются функциями двойной симметрии. Первая из этих функций является четной как по одному, так и по второму аргументу. Четность или нечетность второй функции определяется четностью или нечетностью степеней при аргументах. Доказательство двойной симметрии данных ядер элементарно следует из свойств четности и нечетности соответствующих тригонометрических функций.

Свойство 16. Прямое и обратное преобразования Фурье в симметричных пределах являются преобразованиями с сохранением симметрии.

Доказательство данного утверждения для вещественной ФЧК $u(t)$ следует из свойств тригонометрических функций по Свойству 15. В самом деле, в случае прямого преобразования Фурье:

$$g(\omega) = \int_{-T}^{T} \exp(-j\omega t) u(t) dt = \operatorname{Re} g(\omega) + j \operatorname{Im} g(\omega) = \int_{-T}^{T} \cos(\omega t) u(t) dt - j\int_{-T}^{T} \sin(\omega t) u(t) dt . \tag{8}$$

В силу Свойства 12 функции $\mathrm{Re}\, g(\omega)$ и $\mathrm{Im}\, g(\omega$ в зависимости (8) – ФЧК, а в силу Свойства 7 $g^2(\omega)$ – также ФЧК.

Для доказательства в случае комплексной функции $u(t) = v(t) + js(t)$ положим, что ее реальная и мнимая части – четные или нечетные функции. В силу Свойства 7 функция $u(t)$ – ФЧК. Прямое преобразование Фурье представим в виде:

$$g(\omega) = \int_{-T}^{T} \cos(\omega t)[v(t) + js(t)]dt - j\int_{-T}^{T} \sin(\omega t)[v(t) + js(t)]dt \,,$$

откуда следует:

$$\mathrm{Re}\, g(\omega) = \int_{-T}^{T} \cos(\omega t) v(t)dt + \int_{-T}^{T} \sin(\omega t) s(t)d \,, \quad \mathrm{Im}\, g(\omega) = \int_{-T}^{T} \cos(\omega t) s(t)dt - \int_{-T}^{T} \sin(\omega t) v(t)dt \,. \qquad (9)$$

Рассмотрим отдельно полученную действительную часть преобразования. Для сокращения записей воспользуемся английским словом «parity» – четность. И введем функционал над множеством функций $par(f) = 1$, если функция f – четная, $par(f) = -1$, если функция f – нечетная. В зависимости от четности или нечетности вещественной и мнимой частей преобразуемой функции $u(t)$ получим 4 возможных варианта:

а) $par(v) = par(s) = 1 \;\Rightarrow \mathrm{Re}\, g(\omega) = 2\int_{0}^{T} \cos(\omega t) v(t)dt$;

б) $par(v) = par(s) = -1 \;\Rightarrow \mathrm{Re}\, g(\omega) = 2\int_{0}^{T} \sin(\omega t) s(t)dt$;

в) $par(v) = 1,\, par(s) = -1 \;\Rightarrow \mathrm{Re}\, g(\omega) = g_c + g_s = \int_{-T}^{T} \cos(\omega t) v(t)dt + \int_{-T}^{T} \sin(\omega t) s(t)dt$, причем $par(g_c) = par(g_s) = 1$;

г) $par(v) = -1,\, par(s) = 1 \;\Rightarrow \mathrm{Re}\, g(\omega) = g_c + g_s = \int_{-T}^{T} \cos(\omega t) v(t)dt + \int_{-T}^{T} \sin(\omega t) s(t)dt$, причем $par(g_c) = par(g_s) = -1$.

В случаях а) и б) то, что $\mathrm{Re}\, g(\omega)$ является ФЧК, следует из Свойства 13 и формулы (7). В случаях в) и г) четность слагаемых в сумме $g_c + g_s$ одинаковая и $\mathrm{Re}\, g(\omega)$ – также ФЧК на основании Свойства 5. Аналогично доказывается, что и $\mathrm{Im}\, g(\omega)$ – также ФЧК. Рассуждая таким же образом, выясняем, что и обратное преобразование Фурье над ФЧК дает в результате ФЧК. Таким образом, пара преобразований Фурье – прямое и обратное – являются преобразованиями с сохранением симметрии.

3. Инвариантность симметрии оптического импульса, подверженного материальной дисперсии

Здесь уже проще. Вернемся к зависимостям (1–2). Если на вход ОВ подается симметричный импульс, $U(t, z = 0) = U(-t, z = 0)$, то соответствующая спектральная плотность его НЧС будет определяться:

$$G_0(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j\Omega) U(t, z = 0)dt$$

и в соответствии со Свойством 15 $G_0(\Omega)$ – ФЧК. Рассмотрим фазовые множители в подынтегральном выражении (2). Их общий вид:

$$G_m(\Omega, z) = -j\frac{z}{m!}\sum_{m=2}^{M} \beta_0^{[m]}\Omega^m = \mathrm{Re}\, G_m - j\,\mathrm{Im}\, G_m = \frac{z}{m!}\cos(\beta_0^{[m]}\Omega^m) - j\frac{z}{m!}\sin(\beta_0^{[m]}\Omega^m) \,. \qquad (10)$$

Очевидно, что в формуле (10) $par(\mathrm{Re}\, G_m) = 1$ и $par(\mathrm{Im}\, G_m) = par(\Omega^m) = \pm 1$. Т.е., и действительная, и мнимая части функции $G_m(\Omega, z)$ – ФЧК. Тогда и сама функция $G_m(\Omega, z)$ – также ФЧК в силу Свойства 7.

С учетом обозначений в формуле (10) представим преобразуемую функцию в выражении (2) в виде:

$$G(\Omega, z) = G_0(\Omega)\prod\nolimits_{m=2}^{M} G_m(\Omega, z) \,,$$

где все сомножители – ФЧК. Тогда в силу Свойства 8 и функция $G(\Omega, z)$ – также ФЧК. Обратное преобразование Фурье в формуле (2) теперь можно представить в виде:

$$U(t,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(j\Omega t) G(\Omega, z) d\Omega\,. \tag{11}$$

Преобразование (11) в силу Свойства 16 является преобразованием с сохранением симметрии. Поскольку спектральная плотность $G(\Omega, z)$ – ФЧК, то и результат преобразования $U(t,z)$ – также ФЧК.

Заключение. Выводы

Итак, показано, что при выполнении условий п.1 введенный в оптическое волокно симметричный импульс будет сохранять свойство симметрии распределения энергии как во временной, так и в частотной области. Иными словами, свойство симметрии оптического импульса инвариантно к материальной дисперсии.

Заметим, что речь идет как о дисперсии второго порядка (когда $\left|\beta_0^{[2]}\right| > 0$), так и в общем случае дисперсии высших порядков, когда $\left|\beta_0^{[m]}\right| > 0,\ m > 2$.

Конечно, при нарушении допущений п. 1 деформация оптического импульса по мере его продвижения вдоль волокна может быть и несимметричной. Например, если рассматривать достаточно большую ширину спектра импульса, то его спектральная плотность может несимметрично искажаться за счет неравномерности функции затухания по частоте.

Результат, полученный здесь, имеет весьма локальный характер. Практическая польза подобных исследований заключается в том, чтобы дать специалистам, решающим задачи моделирования явлений в оптическом волокне некоторые общие представления о свойствах таких моделей. По крайней мере, это может помочь избежать грубых ошибок аналитического и численного моделирования.

Материал статьи изложен, как может показаться, с излишними подробностями. Но если имеются хотя бы малейшие расхождения представлений с классическими трудами [1], то приходится прибегать к убедительным аргументам.

Вообще-то Свойства 1 – 16 показывают удивительную устойчивость симметрии функций с четным квадратом. Даже странно, что в природе не все симметрично. Где-то недоработали…

Литература

1. Агравал Г. Нелинейная волоконная оптика // Г. Агравал ; пер. с англ. под ред. П. В. Мамышева. – М: Мир, 1996. – 323 с.

2. K. Thyagarajan and B.P. Pal. Modeling dispersion in opti-cal fibers: applications to dispersion tailoring and disper-sion compensation // Optical and fiber communications re-ports. Springer Science+Business Media, LLC. – 2007. – pp. 145-186.

3. Одегов Н.А. Косвенные измерения дисперсионных характеристик оптических импульсов методом динамического моделирования // Матеріали XVII науково-технічної конференції «Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах», 8 – 13 червня 2017 р. – Одеса. – С. 48 – 50.

4. Сергієнко І.-В. О. Вплив параметрів ґенерованих оптичним передавачем імпульсів на пропускну здатність волоконно-оптичного лінійного тракту // Сергієнко І.-В. О., Каток В. Б. – Телекомунікаційні та інформаційні технології. – №1. – 2016. – Київ: ДУТ. – С. 30-40.

5. Корн Г. Справочник по математике // Корн Г., Корн Т. – М: Наука, 1977. – 832 с.

References

1. Agraval G. Nelinejnsja volokonnaja optika // G. Agraval; per. s angl. Pod red. G.V.Mamysheva. – M: Mir, 1996. – 323 s.

2. K. Thyagarajan and B.P. Pal. Modeling dispersion in opti-cal fibers: applications to dispersion tailoring and disper-sion compensation // Optical and fiber communications re-ports. Springer Science+Business Media, LLC. – 2007. – pp. 145-186.

3. Odegov N.A. Kosvennye izmerenija dispersionnyh harakteristik opticheskih impulsov metodom dinamicheskogo modelirovanija // Materialy XVII naukovo-tehnicnoji konferenciji «Vymirjuvalna ta obchysljuvalna tehnika v tehnologichnyh procesah», 8 – 13 chervnja 2017 r. – Odesa. – S. 48 – 50.

4. Sergienko I.-V. O. Vplyv parametriv generorovanyh optychnym peredavachem impulsive na propusknu zdatnist' volokonno-optychnogo traktu // Sergienko I.-V. O., Katok V.B. – Telekomunikacijni ta informscijni tehnologiji. – №1. – 2016. – Kyjiv: DUT. – S. 30-40.

5. Korn G. Spravochnik po matematike // Korn G., Korn T. – M: Nauka, 1977. – 832 s.

Рецензія/Peer review : 02.11.2017 р. Надрукована/Printed :21.01.2018 р.
Стаття рецензована редакційною колегією