

УДК 621.397

DOI: 10.31891/2219-9365-2019-63-1-32-38

ТАРАНЧУК А. А.,

КУШНИР Б. В.

Хмельницький національний університет

ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ МЕХАНІЧНИХ КОЛИВАНЬ КВАРЦОВИХ П'ЄЗОЕЛЕМЕНТІВ АТ-ЗРІЗУ

Побудована COMSOL-модель кварцових п'єзоелементів товщинно-зсувних коливань та досліджені особливості їх збудження на основних та додаткових модах механічних коливань. Проведено порівняльний аналіз резонансних частот п'єзоелементів АТ-зрізу, розрахованих аналітичним шляхом та отриманих в результаті моделювання в COMSOL Multiphysics, який підтверджує адекватність проведених досліджень. Підтверджено високу ефективність використання пакету COMSOL Multiphysics для дослідження та оптимізації параметрів п'єзорезонансних пристроїв.

Ключові слова: кварцовий резонатор, п'єзоелемент АТ-зрізу, товщинно-зсувні коливання, мода збудження коливань, двовимірний модель.

TARANCHUK A.,

KUSHNYR B.

Khmelnitskyi National University

NUMERICAL AND ANALYTICAL MODELING OF THICKNESS-VIBRATION OF AT-CUT QUARTZ PIEZOELEMENT

COMSOL - a model of quartz piezo-element of thickness-shear vibrations was constructed and the features of their excitation on the basic and additional modes of mechanical vibrations were investigated. A comparative analysis of resonance frequencies of AT-cut piezo-elements, calculated analytically and obtained as a result of simulation in COMSOL Multiphysics, which confirms the adequacy of the conducted researches, was carried out. The high efficiency of the COMSOL Multiphysics package for research and optimization of piezo-resonance device parameters has been confirmed. A number of theoretical and practical works are devoted to solving the problems of oscillations of elastic piezoelectric plates. Thus, in the authors developed a two-dimensional plate theory, which is used to analyze the low-order modes of thickness-shear oscillations. This theory for the study of mechanical oscillations of quartz piezoelectric elements has become widespread, in particular in [8,9] the proposed two-dimensional scalar differential equation describing higher-order modes for quartz PE AT-sections and SC-sections. The calculations presented are accurate only through the introduction of significant simplifications in the analysis of the mechanical vibrations of the piezoelectric plates. Thus, the assumption is that the effects occurring in the direction of the length and width of the piezoelectric elements of the TC of limited size oscillations are negligible compared to the deformations determined by their thickness. Therefore, in two-dimensional studies of piezoplates, their sizes are usually assumed to be infinitely large in length and width (or diameter). This does not in many cases provide the required accuracy of the calculations of the resonance frequencies, for example, for single- and double-convex (lens) PEs, and the determination of the quantities included in the calculation formulas is rather complicated and time-consuming.

Keywords: quartz resonator, AT-cut piezo-element, thickness-shear vibration, mode of oscillation excitation, 2-D model.

Вступ. Найбільше поширення серед елементів п'єзорезонансних пристроїв генерації, стабілізації, вимірювання і керування частотою коливань отримали акустичні хвильові резонатори. При виготовленні п'єзорезонаторів найчастіше використовуються кварцові кристалічні елементи, технологія виготовлення яких добре відпрацьована. Бурний розвиток радіоелектронних і телекомунікаційних пристроїв вимагає подальшого підвищення точностних характеристик та розширення функціональних можливостей кварцових резонаторів (КР), що обумовлює необхідність ретельного дослідження особливостей механічних коливань кварцових п'єзоелементів [1–4].

У більшості застосувань, в кварцових резонаторах використовується збудження товщинно-зсувного (ТЗ) типу механічних коливань п'єзоелемента (ПЕ). Відомо, що в КР, крім збудження основної (робочої) моди коливань можуть збуджуватись інші моди коливань, що є невід'ємною фізичною властивістю кварцових пластин відповідної форми, розмірів і кутів зрізу [5].

Наявність акустичного зв'язку між модами може послужити причиною провалів активності КР на робочій частоті та виникненню додаткових (паразитних) коливань. Аналітичний тривимірний (3D) аналіз механічних коливань кварцових резонаторів довільної форми як п'єзоакустичних тіл з анізотропними, нелінійними електромеханічними властивостями та додатковими конструктивними елементами у вигляді електродів збудження та кварцоутримувачів є вельми складною задачею.

Тому побудова чисельно-аналітичних та імітаційних моделей за допомогою яких можна зняти обмеження щодо конструктивних особливостей, анізотропних та нелінійних властивостей кварцових резонаторів є актуальною задачею. Одним із перспективних напрямів розв'язання даної задачі є використання методу скінченних елементів (МСЕ), який є основою чисельних розрахунків 3D-аналізу одного із найбільш поширеного пакету програм для фізичного моделювання COMSOL Multiphysics [6, 7].

Постановки завдання. Вирішенню задач коливань пружних п'єзоелектричних пластин присвячено ряд теоретичних та практичних робіт. Так в роботах [8, 9] авторами розроблена двовимірна теорія пластин, що використовується для аналізу режимів низького порядку товщинно-зсувних коливань. Дана теорія для дослідження механічних коливань кварцових п'єзоелементів отримала широке розповсюдження, зокрема в роботах [8, 9] запропоноване двовимірне скалярне диференціальне рівняння, яке описує моди вищого порядку для кварцових ПЕ АТ-зрізу та SC-зрізів [10, 11]. Представлені розрахунки є точними тільки за рахунок введення суттєвих спрощень при аналізі механічних коливань п'єзопластин. Так, вводиться припущення, що ефекти, які виникають в напрямках довжини і ширини п'єзоелементів ТЗ коливань обмежених розмірів є незначними в порівнянні з деформаціями, що визначаються їх товщиною. Тому, при двовимірних дослідженнях п'єзопластин їх розміри, зазвичай, приймаються нескінченно великими за довжиною і шириною (або діаметром) [10, 11]. Це не дозволяє в багатьох випадках забезпечити необхідну точність розрахунків резонансних частот, наприклад, для одно- та двовипуклих (лінзових) ПЕ, а визначення величин, які входять в розрахункові формули є достатньо складним і трудомістким.

Мета роботи: побудова чисельно-аналітичної моделі кварцових п'єзоелементів товщинно-зсувних коливань та дослідження особливостей їх збудження на основних та додаткових модах механічних коливань.

Аналітичний розрахунок механічних зміщень товщинно-зсувних коливань п'єзоелемента.

Для кварцових резонаторів обернутих Y-зрізів (рис. 1) механічні коливання п'єзоелемента можуть бути представлені як

$$u_{nmp}(x_1, x_2, x_3, t) = A^{nmp} \left\{ H_{m-1}(\sqrt{\alpha_n} x_1) H_{p-1}(\sqrt{\beta_n} x_3) \sin\left(\frac{n\pi x_2}{2h}\right) e^{-\frac{\alpha_n x_1^2 + \beta_n x_3^2}{2}} \right\} e^{j\omega_{nmp} t}, \quad (1)$$

де $n=1,3,5\dots$ та $m, p=1,2,3\dots$ – числа, які визначають кількість напівхвиль, що вкладаються повздовж осей x_2 , x_1 та x_3 відповідно (рис. 1); $H_{m-1}(\bullet)$, $H_{p-1}(\bullet)$ – поліноми Ерміта; $\alpha_n^2 = \frac{n^2 \pi^2 \hat{c}}{8R'h_0^3 M_n}$,

$\beta_n^2 = \frac{n^2 \pi^2 \hat{c}}{8R'h_0^3 P_n}$ – константи, які залежать від номера гармоніки коливань n , радіуса кривизни R' , максимальної товщини $2h_0$ та пружних властивостей кварцу \hat{c} [8–11].

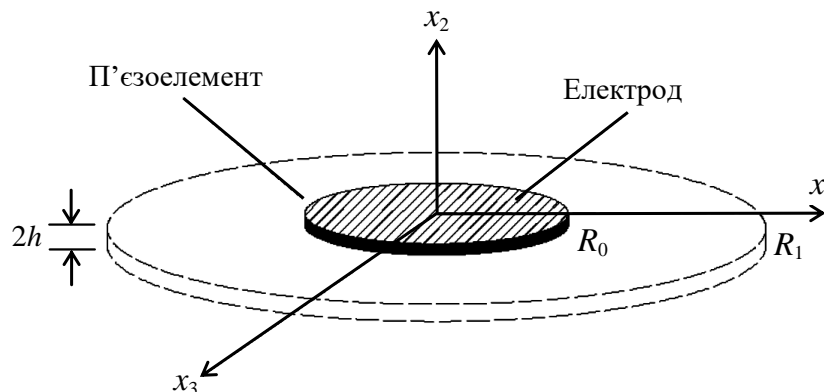


Рис. 1. Геометрична модель кварцового резонатора

Для однообернутих кварцових резонаторів АТ-зрізу константи \hat{c} , M_n і P_n визначаються у відповідності до співвідношень:

$$M_n = c_{11} + (c_{12} + c_{66})r' + 4 \frac{(r'\bar{c}_{66} - c_{66})(c_{22}r' + c_{12}) \operatorname{ctg} \frac{n\pi\chi}{2}}{c_{22}n\pi\chi}, \quad P_n = c_{55}, \quad (2)$$

де $\hat{c} = \bar{c}_{66} \left(1 - \frac{8k_{26}^2}{n^2 \pi^2} - 2\hat{R} \right)$; $\bar{c}_{66} = c_{66} + \frac{e_{66}^2}{\varepsilon_{22}}$; $k_{26}^2 = \frac{e_{26}^2}{\bar{c}_{66} \varepsilon_{22}}$; $\hat{R} = \frac{2\rho'h'}{\rho h}$; $\chi = \sqrt{\frac{\bar{c}_{66}}{c_{22}}}$;
 $r' = \frac{c_{12} + c_{66}}{\bar{c}_{66} - c_{22}}$;

ρ' , ρ і h' , h – щільність і товщина електродів та п'єзопластини відповідно; c_{11} , c_{12} , c_{22} , c_{55} , c_{66} та e_{26} , e_{66} , ε_{22} – модулі пружності та п'єзоелектричні постійні кварцу.

В свою чергу, частоти коливань в (1) $u_{nmp}(x_1, x_2, x_3, t)$ (резонансні частоти ПЕ) з урахуванням (2) знаходяться із співвідношення [8-11]

$$\omega_{nmp}^2 = \frac{n^2 \pi^2 \hat{c}}{4h_0^2 \rho} \left(1 + \frac{1}{n\pi} \sqrt{\frac{2h_0}{R'\hat{c}}} \left(\sqrt{M_n} (2m+1) + \sqrt{P_n} (2p+1) \right) \right). \quad (3)$$

На рис. 2 - 4 представлені типові розподіли нормованих значень механічних зміщень U111, U112 та U122, розраховані у відповідності до (1), (2) для круглих резонаторів зсуву за товщиною АТ-зрізу з радіусом ПЕ $R_1 = 7$ мм, радіусом електрода $R_0 = 2$ мм та номінальною частотою 10752,900 кГц.

Аналіз отриманих залежностей показує, що при переході до ангармонічних режимів коливань (рис. 3,4) розподіл механічних зміщень ПЕ набуває достатньо складного характеру, що треба враховувати при аналізі ангармонічних режимів роботи обернутих п'єзоелементів Y – зрізів круглої форми [12,13].

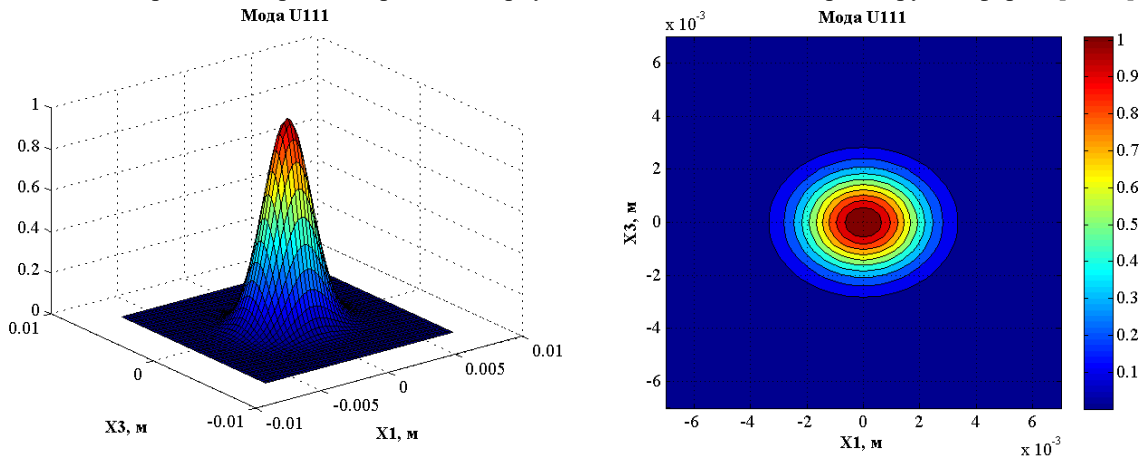


Рис. 2. Розподіл нормованих значень величин механічних зміщень для моди коливань U111

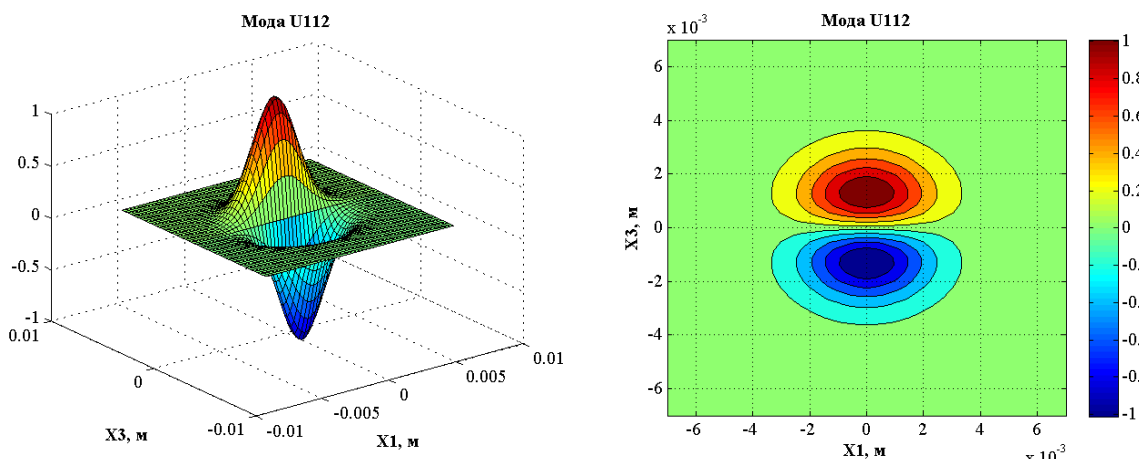


Рис. 3. Розподіл нормованих значень величин механічних зміщень для моди коливань U112

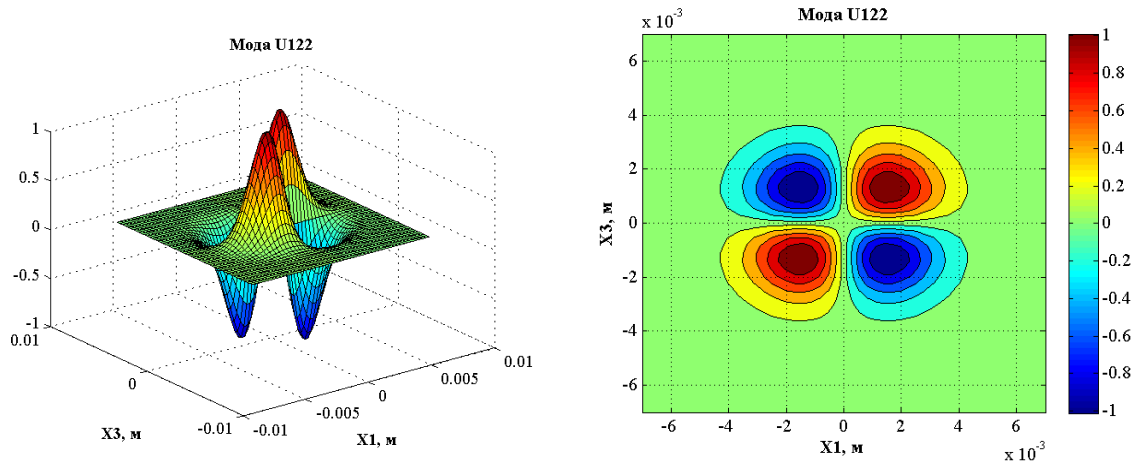


Рис. 4. Розподіл нормованих значень величин механічних зміщень для моди коливань U122

Чисельне моделювання механічних зміщень товщинно-зсувних коливань п'єзоелемента. Для чисельного розв'язання задачі (1) за допомогою програмного забезпечення COMSOL Multiphysics у відповідності до рис. 1. побудована COMSOL – модель п'єзоелемента (рис. 5). Для зниження розмірності моделі до двовимірної (2D) товщина ПЕ задана у вигляді залежності від координат $x_1(x)$ та $x_3(y)$. При такому підході щільність розрахункової сітки скінчених елементів в піделектродній області збільшується, що дозволяє отримувати рішення з достатньою точністю (рис. 5).

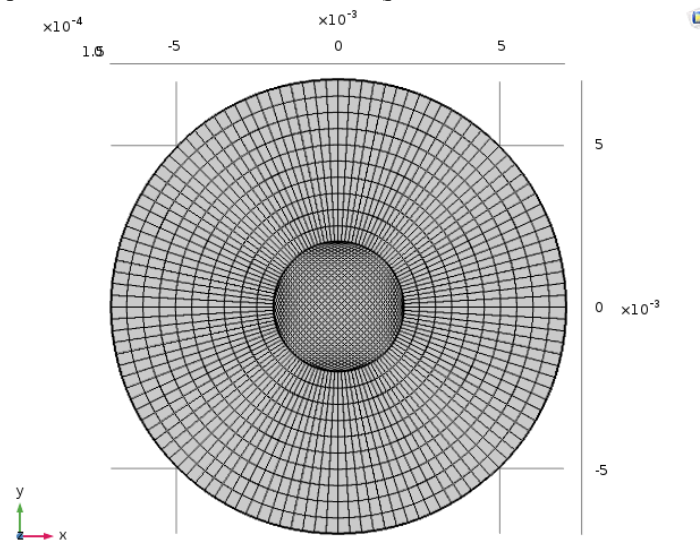


Рис. 5. COMSOL – модель ПЕ з побудованою сіткою скінчених елементів

Розподіл амплітуд u механічних зсувів п'єзоелемента АТ-зрізу (рис. 6, 7) в COMSOL Multiphysics отримується шляхом розв'язку узагальненого диференційного рівняння з частинними похідними (англ. Partial Differential Equations – PDE), коефіцієнти якого задаються користувачем у відповідності до специфіки задачі:

$$\lambda^2 e_a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \lambda d_a \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (-c \nabla u - \alpha u + \gamma) + \beta \cdot \nabla u + \alpha u = f, \quad (4)$$

де λ – власні значення; $e_a = 4\pi^2 \rho$ – коефіцієнт маси (для кварцу $\rho = 2,646 \cdot 10^3$ кг/м³); $d_a = 0,001$ – коефіцієнт демпфірування; ∇ – оператор диференціювання (для 2D - задачі $\nabla = [\partial/\partial x, \partial/\partial y]$); c – матриця пружності; α – коефіцієнт поглинання; α, β, γ та f – коефіцієнти, пов'язані з теплообмінними процесами середовища, зокрема кондуктивними та конвективними процесами та наявністю джерел тепла; t – час [6].

Кристал кварцу є анізотропним тілом з тригональною симетрією класу 3:2, для якої існує шість незалежних пружних коефіцієнтів жорсткості (де c_{11} , c_{12} , c_{13} , c_{14} , c_{33} , c_{44}). Тому матриця пружності, яка входить до (4), набуває вигляду [5, 6]

$$[c_{ij}] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & 0 & 0 \\ & c_{11} & c_{13} & -c_{14} & 0 & 0 \\ & & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44} & 0 & 0 \\ & & & & c_{44} & c_{14} \\ & & & & & \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \end{bmatrix}, \quad (5)$$

де $c_{11}=86,7362$ ГПа; $c_{12}=6,98527$ ГПа; $c_{13}=11,9104$ ГПа; $c_{14}=17,9081$ ГПа; $c_{33}=107,194$ ГПа; $c_{44}=57,9428$ ГПа.

Пакет програм COMSOL Multiphysics здійснює автоматичне обчислення компонент тензорів матеріальних констант з урахуванням бібліотечних значень в оберненій системі координат, яка відповідає кутам зрізу конкретного типу ПЕ відносно початкової орієнтації (відносно кристалографічних осей кристалу кварцу).

Розподіли механічних коливань п'єзоелемента АТ - зрізу (uxl/β_{AT} , $35^\circ \leq \beta_{AT} \leq 35^\circ 30'$) отримані за допомогою COMSOL – моделі (рис. 5) для основної (фундаментальної) моди коливань КР U111 ($n = 1$), третього обертону U311 ($n = 3$) та ангармонічних коливань U112 ($p = 2$), U121 ($m = 2$) представлені на рис. 6, 7.

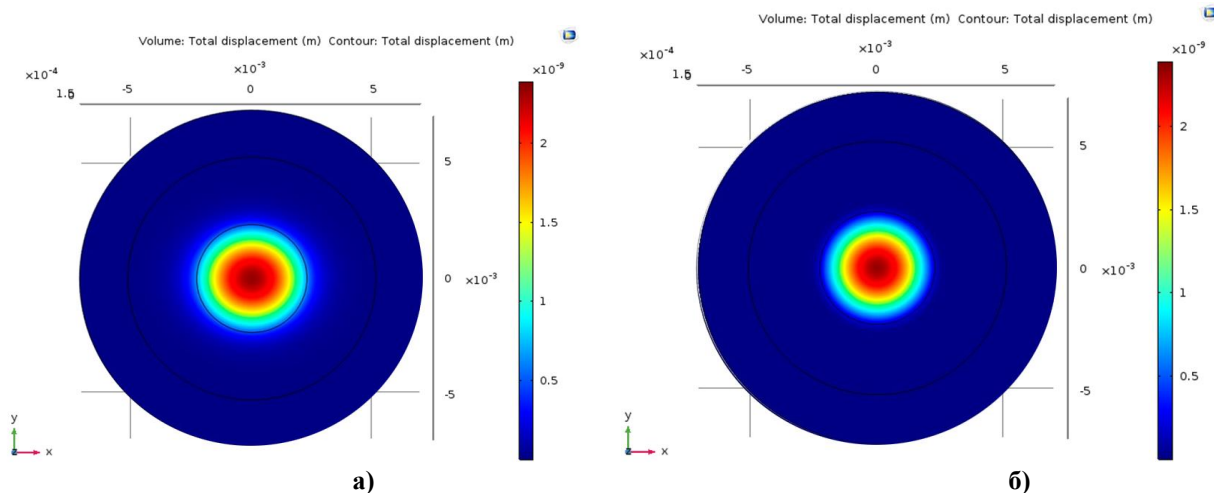


Рис. 6. Розподіл механічних зміщень п'єзоелемента (COMSOL Multiphysics): основна мода U111 (а); третій обертон (мода U311) (б)

Отримані результати показують (рис. 6), що із-за ефекту захоплення енергії коливань в піделеєктродній області п'єзоелемента максимальні деформації спостерігаються в центральній області ПЕ, в той же час, на периферійні областях – деформації відсутні. Це дозволяє використовувати периферійне кріплення кварцових п'єзоелементів ТЗ коливань на великій площині без суттєвого впливу на їх параметри, що є вельми актуальним при використанні їх як в генераторах високостабільних опорних коливань, так і сенсорах фізичних величин [4].

Форми розподілів амплітуд механічних зміщень практично однакові, але для третьої механічної гармоніки U311 (рис. 6,б) вони є більш сконцентрованими в піделеєктродній області, ніж для основної моди коливань U111 (рис. 6,а). Через анізотропні властивості кварцового ПЕ, область концентрації механічних коливань в середині пластини набуває еліптичності з розтягуванням в напрямку $x_1(x)$ та стисканням в напрямку $x_3(y)$ (рис. 2).

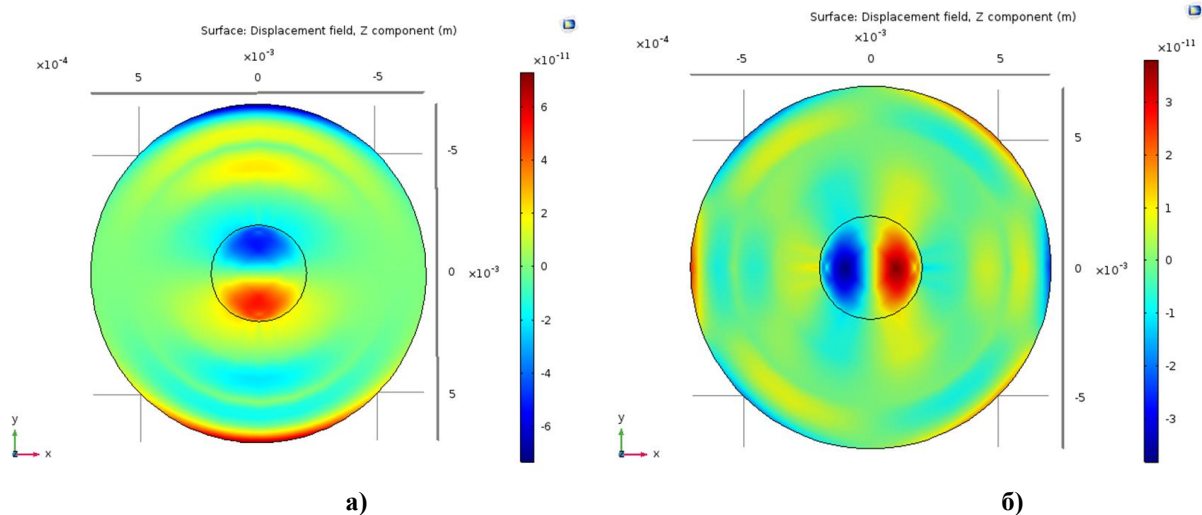


Рис. 7. Розподіл механічних зміщень ПЕ для ангармонічних коливань (COMSOL Multiphysics): мода U112 (а); мода U121 (б)

Для ангармонічних коливань U112 та U121 розподіл механічних зсувів носить більш складний характер, що пов'язано з наявністю двох напівхвиль в піделектродній області, що вкладаються вздовж напрямків $x_3(y)$ (рис. 7,а) та $x_1(x)$ (рис. 7,б). В той же час, розподіли механічних зміщень COMSOL – моделі для ангармонічних мод коливань ПЕ також наближаються до розподілів, отриманих розрахунковим шляхом у відповідності до (1), (2) (рис. 3) [12].

Для оцінки адекватності запропонованих COMSOL – моделей проведено порівняльний аналіз резонансних частот ПЕ АТ-зрізу, розрахованих у відповідності до (3) та отриманих шляхом чисельно-аналітичного моделювання в COMSOL Multiphysics (табл. 1). При цьому початкові параметри обох моделей забезпечували однакові параметри основної моди коливань ПЕ ($f_{111}=10752,900$ кГц).

Таблиця 1

Порівняльні значення резонансних частот п'єзоелемента

Мода коливань	Частота резонансу, кГц		Відносна розбіжність, %
	Розрахункові значення	COMSOL Multiphysics	
U111	10752,899	10752,900	–
U311	32165,382	32295,100	0,4
U112	10784,378	10792,300	0,073
U121	10797,239	10831,800	0,32
U122	10828,588	10910,700	0,76

Аналіз отриманих результатів показує добре співпадіння результатів, отриманих розрахунковим шляхом у відповідності до (1)–(3) та в результаті використання COMSOL – моделювання (рис. 5). При цьому відносна розбіжність результатів не перевищує 1 % (табл. 1).

Висновки. Побудована COMSOL – модель кварцових п'єзоелементів ТЗ коливань обернутих Y-зрізів дозволяє визначити частоти власних резонансів, проаналізувати активність мод коливань, вивчити вплив розкиду геометричних розмірів ПЕ, термо- та вібродинамічні характеристики, що обумовлює її ефективне використання як на етапі проектування п'єзорезонансних пристроїв, так і для оптимізації параметрів вже існуючих пристроїв.

Порівняння розбіжності отриманих результатів COMSOL – моделювання з результатами аналітичних розрахунків підтверджують адекватність проведених досліджень. При цьому, похибка визначення резонансних частот для механічних гармонік і ангармонічних коливань складає (0,5...0,75) %. Точність COMSOL – моделювання може бути підвищена шляхом уточнення геометрії п'єзоелемента (розміру і форми електродів, кривизни поверхні п'єзопластини) та зменшення кроку триангулярної сітки елементів МСЕ, що, в свою чергу, вимагає суттєвого збільшення обчислювальних затрат для отримання результатів.

References

1. GEYER-Crystal Products Overview (2017). Available at: <http://www.geyer-electronic.com>.
2. Product Overview: Quartz Crystals and Crystal Oscillators (2017). Available at: <http://www.jauch.de>.
3. John R. Vig, "Quartz Crystal Resonators and Oscillators for Frequency Control and Timing Applications - A Tutorial", 2004 IEEE International Frequency Control Symposium Tutorials, May 2004.
4. Taranchuk A. and Pidchenko S. (2012) Applied Measurement System. Design Methodology to Construct Information Measuring Systems Built on Piezoresonant Mechanotrons with a Modulated Interelectrode Gap, Published by InTech, Janeza Trdine 9, 51000 Rijeka, Croatia, Chapter 12, p. 229-258, ISBN: 978-953-51-0103-1.13.
5. R.D. Mindlin, High frequency vibrations of piezoelectric crystal plates, International Journal of Solids and Structures, Volume 8, Issue 7, July 1972, p. 895-906.
6. COMSOL Multiphysics User's Guide (1998–2012), COMSOL, 1234 p.
7. P.M. Kurowski. Engineering analysis with solidworks simulation / SDC Publications, 2018. – 596 p.
8. Tiersten, H.E; Mindlin, R.D. Forced vibrations of piezoelectric crystal plates. Q. Appl. Math. 1962, 20, 107-119.
9. Mindlin, R.D. An Introduction to the Mathematical Theory of Vibrations of Elastic Plates Scientific: Singapore, December 2006.
10. Tiersten, H.F.; Smythe, R.C. Coupled thickness-shear and thickness-twist vibrations of unelectroded AT-cut quartz plates / Acoust. Soc. Am. 1985, 78, 1684-1689.
11. Stevens, D.S., Tiersten, H.R. An analysis of doubly rotated quartz resonators utilizing essentially thickness modes with transverse variation / Acoust. Soc. Am. 1986, 79, 1811-1826.
12. Taranchuk, A., Pidchenko, S., Koptinskiy R. Dynamics of temperature-frequency processes in multifrequency crystal oscillators with digital compensations of resonator performance instability. Radioelectronics and Communications Systems, [S.l.], v. 58, n. 6, p. 250-257, jun. 2015. ISSN 1934-8061.

Рецензія/Peer review : 17.10.2018 Надрукована/Printed : 07.02.2019
Рецензент: д. т. н., доц. Підченко С. К.