

## МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИХ ДАТЧИКІВ ДЛЯ ВИМІРЮВАННЯ ВІБРАЦІЙНИХ ПАРАМЕТРІВ

*Вимірюванню параметрів вібрації при дослідженні коливальних процесів на етапах розробки, випробування та експлуатації різноманітних технічних і технологічних пристроїв, в різних галузях (енергетиці, машинобудуванні, металургії, авіаційній і ракетно-космічній, суднобудуванні, геології, нафто-газовидобувній та переробній промисловості, медицині) приділяється велика увага. В сучасному обігу існує такий термін як віброметрія – це сукупність засобів і методів для вимірювання параметрів вібрації їх обробці та аналізу.*

*За допомогою віброметрії успішно вирішуються питання, пов'язані як із загальним розвитком техніки на етапі проектування, так і з підвищенням її надійності і безпеки в процесі експлуатації. В останні роки широке поширення набувають вимірювально-інформаційні системи вібраційного контролю, моніторингу, діагностики, активного віброзахисту та автоматичного управління складними технічними системами і технологічними процесами, що дають не тільки великий техніко-економічний ефект, але і сприяють запобіганню аварій і можливих техногенних та екологічних катастроф.*

*Початковою ланкою таких систем є датчики параметрів вібраційних і ударних коливань, розташовані безпосередньо на контрольованому об'єкті. Вони здійснюють перетворення вимірюваної механічної величини в електричний сигнал, що надходить на вимірюючий пристрій для подальшої обробки.*

*Датчики вібраційних параметрів часто працюють в складних і несприятливих умовах - при високих температурах, сильних змінних магнітних полях, інтенсивних вібраційних і ударних перевантаженнях, високому тиску і проникаючих випромінюваннях. До них пред'являються особливі вимоги по точності та достовірності вимірювань. Тому їх вивчення та вдосконалення є нагальним питанням сьогодення.*

*Ключові слова: датчик, віброметрія, коливання, математична модель.*

PEREDERKO A.

Odessa State Academy of Technical Regulation and Quality

## MATHEMATICAL MODELS OF PIEZOELECTRIC SENSORS FOR MEASURING VIBRATION PARAMETERS

*Measurement of vibration parameters in the study of oscillation processes at the stages of development, testing and operation of various technical and technological devices, in various fields (power engineering, mechanical engineering, metallurgy, aviation and rocket-space, shipbuilding, geology, oil and gas production) is receiving a great attention. In modern circulation, there is a term such as vibrometry - a set of tools and methods for measuring the vibration parameters and their processing and analysis.*

*Vibrometry successfully solves issues related to both the general development of technology at the design stage and to improving its reliability and safety during operation. In recent years, measurement and information systems of vibration control, monitoring, diagnostics, active vibration protection and automatic control of complex technical systems and technological processes, which give not only great technical and economic effect, but also contribute to the prevention of accidents and possible man-made and ecological catastrophes, have become widespread. The initial link to such systems are vibration and shock oscillation sensors located directly on the monitored object. They convert the measured mechanical value into an electrical signal incoming to the measuring device for further processing. Sensors of vibration parameters often work in difficult and unfavorable conditions - at high temperatures, strong alternating magnetic fields, intense vibration and shock overloads, high pressure and penetrating radiation. They have special requirements for accuracy and accuracy of measurements. Therefore, their study and improvement is a pressing issue today.*

*Keywords: sensor, vibrometry, vibrations, mathematical model.*

В системах вимірювання та контролю вібрації використовують датчики вібропереміщення, віброшвидкості і віброприскорення. Застосування трьох типів датчиків обумовлено необхідністю контролю вібрації на об'єктах з різними частотними характеристиками.

З усього різноманіття існуючих датчиків для вимірювання параметрів вібрацій найбільшого поширення набули датчики з п'єзоелектричними перетворювачами. Датчики, призначені для вимірювання вібраційного переміщення (зсуву), отримали назву-віброметрів. Датчики, які забезпечують вимір вібраційної швидкості, називаються велосіметрами, а прискорення - акселерометрами.

Вібраційне прискорення відноситься до неелектричних величин, які неможливо без додаткових перетворень трансформувати в електричний сигнал, тому функціонально проміжні перетворення виконує чутливий елемент датчика. На рис. 1 приведена конструкція п'єзоелектричного вібродатчика. Основними елементами конструкції є інерційна (сейсмічна) маса 3 і перетворювач неелектричної величини (зусилля  $F_y$ ) в електричний сигнал 2. Чутливим елементом в даному випадку є інерційна маса  $m$ , жорстко скріплена з п'єзоелектричним перетворювачем 2 котрий закріплений на основі корпусу вібраційного датчика 1. Характеристики чутливого елемента, залежать не тільки від величини  $m$ , а й від жорсткості перетворювача, а також від наявності демпфірування (опору руху по швидкості).

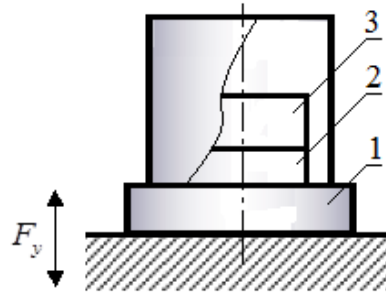


Рис.1. Конструкція п'єзоелектричного вібрдатчика.

Сила пружності  $F_y$ , діюча на інерційну масу, як відомо дорівнює

$$F_y = -kx, \quad (1)$$

де  $k$  - коефіцієнт жорсткості,  
 $x$  - величина зміщення.

Перетворювач, з точки зору реакції на стискаюче чи розтяжне зусилля  $F_y$ , можна замінити механічним аналогом - пружиною, яка має таке ж значення жорсткості. Тоді еквівалентна схема вібрдатчика являє собою масу на пружині, причому остання закріплена на основі. Характерною особливістю віброакселерометрів є те, що вони розглядаються як системи з кінематичним збудженням [1]. У таких системах вимірювана величина діє не на чутливий елемент, а на основу датчика [2]. Розглянемо схему механічну модель вібрдатчика, представлену на рис. 2.

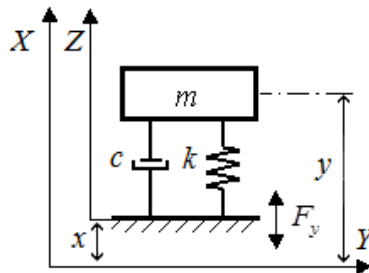


Рис. 2. Механічна модель п'єзоелектричного вібрдатчика.

Введемо дві системи координат: абсолютну  $X$ , розташовану довільно, і систему  $Z$ , жорстко пов'язану з основою вібрдатчика.

Тоді:

$$F_y = -k(y - x); F_\partial = -c[d(y - x)/dt]; F_{in} = m[d^2 y / dt^2], \quad (2)$$

де:  $F_y$  - сила пружності;

$F_\partial$  - демпфуюча сила;

$F_{in}$  - інерційна сила;

$c$  - коефіцієнт демпфірування.

Відповідно до принципу Даламбера:

$$F_{in} = F_y + F_\partial, \quad (3)$$

або

$$m[d^2 y / dt^2] = -k(y - x) - c[d(y - x)/dt]. \quad (4)$$

Перетворимо рівняння (4) до наступного вигляду:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{dz}{dt} + kz = -md^2 \frac{x}{dt^2}, \quad (5)$$

$$z = y - x.$$

Величина  $z$  являє собою зсув сейсмічної маси щодо основи датчика, а  $x$  - зміщення основи датчика щодо абсолютної системи відліку. Припускаємо, що віброзміщення  $x$  змінюється за гармонійним законом, тоді

$$d^2 / dt^2 \Rightarrow -\omega^2, \quad i \quad d / dt \Rightarrow j\omega^2.$$

Звідки:

$$-\omega^2 z(t) + (c/m)j\omega z(t) = \omega^2 x(t), \quad (6)$$

де  $z(t)$  і  $x(t)$  - гармонійні функції,  $\omega$  - частота вібраційних коливань.

Розглянемо типові частотні і фазові характеристики, характерні для вищеписаних трьох видів датчиків, що застосовуються в віброметрії.

Завданням датчиків, що вимірюють вібропереміщення, є вимір коливань в області низьких (стосовно віброметрії) частот. При виготовленні таких датчиків використовуються чутливі елементи з високою віддачею, тобто чутливість таких механічних систем на низьких частотах (НЧ) на порядок, а то і два порядки вище, ніж у акселерометрів. Зазвичай, це досягається за рахунок укрупнення і, відповідно, збільшення маси конструкції датчика. Природно, при такому підході до побудови механічної системи датчика його резонансна частота зсувається в область НЧ, що істотно обмежує частотну область застосування цих датчиків.

Тобто, якщо в рівнянні (6) виконуються умови  $k/m \ll \omega^2$  і  $c/m \ll \omega$ , то  $z(t) = x(t)$ . Останнє означає, що чутливий елемент працює в режимі віброметра, і в сталому режимі відстежує величину вібраційного зсуву. Амплітудно-частотна характеристика (АЧХ)  $A(\omega)$  і фазо-частотна характеристика (ФЧХ)  $\varphi(\omega)$  віброметра в частотній області наведена на рис. 3.

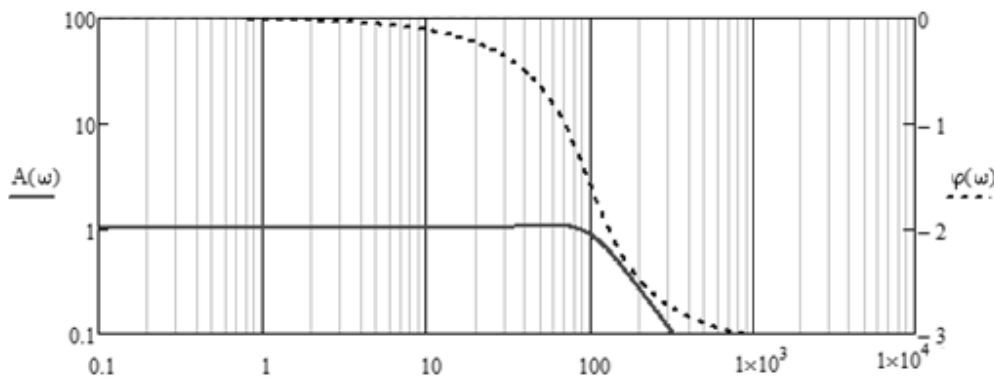


Рис. 3. АЧХ  $A(\omega)$  і ФЧХ  $\varphi(\omega)$  віброметра.

Для датчиків, які вимірюють вібраційну швидкість, характеристики мають вже більш яскраво виражену лінійність в більш широкому діапазоні частот. Датчики легші, ніж попередні, але менш чутливі. На АЧХ з'являється завал в області НЧ, де чутливий елемент датчика «відстає» від вхідного сигналу, слабо реагуючи на яке прикладають до нього віброшвидкість. Для цього випадку в рівнянні (6):

$c/m \gg \omega$  і  $c/m \gg k/m$ , то  $(c/m)z(t) = -j\omega x(t)$ , чутливий елемент працює в режимі велосіметра, тобто величина  $z(t)$  є пропорційною віброшвидкості діючого вібраційного впливу. АЧХ  $A(\omega)$  і ФЧХ  $\varphi(\omega)$  велосіметра в частотній області наведена на рис. 4.

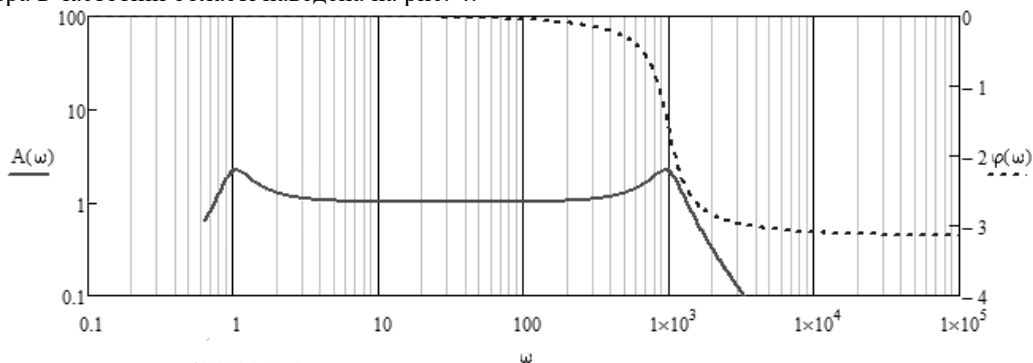


Рис. 4. АЧХ  $A(\omega)$  і ФЧХ  $\varphi(\omega)$  велосіметра.

Для вимірювань вібраційного прискорення застосовуються акселерометри. Розміри цих датчиків варіюються від відносно невеликих до надмініатюрних. Область лінійності акселерометра більш плоска і тривала в частотному діапазоні. Присутні спад в області НЧ (0,5...3 Гц) і підйом в області високих частот (ВЧ).

Якщо для рівнянні (6) виконується:

$k/m \gg \omega c/m$  і  $k/m \gg \omega^2$ , то це вимірювання прискорення, тобто робота в режимі віброакселерометра. АЧХ  $A(\omega)$  і ФЧХ  $\varphi(\omega)$  віброакселерометра в частотній області наведена на рис. 5.

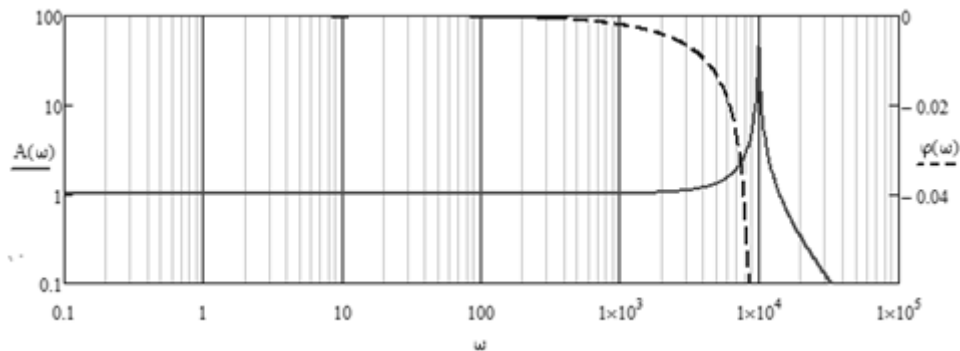


Рис. 5. АЧХ  $A(\omega)$  і ФЧХ  $\varphi(\omega)$  віброакселерометра

Розглянувши вказані режими можна зробити висновок, що кожен з них може бути реалізований вибором відповідних характеристик стосовно чутливого елементу:  $m$ ,  $k$ ,  $c$  і діапазону робочих частот. Так для віброметра важливо забезпечити як можна меншими відношення  $k/m$  та  $c/m$ , оскільки він працює в резонансній області частот. Для велосіметра необхідно використовувати глибоке демпфірування, а для акселерометра необхідний перетворювач з великою жорсткістю. В режимі акселерометра, як впливає з вищевикладеного,  $c \ll k/\omega$  для  $\omega \ll \omega_0$ , де  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  - частота власних коливань датчика.

Так як уже відзначалося раніше, в віброметрії використовуються, в основному, акселерометри, то проаналізуємо роботу акселерометра більш детально. Для цього замінімо оригінали в рівнянні (5) їх зображеннями:

$$z(t) = Z(s); \quad x(t) = X(s); \quad d/dt = s; \quad d^2/dt^2 = s^2,$$

де  $s$  - оператор Лапласа, і введемо такі позначення:

$T = 1/\omega_0$  - період власної кругової частоти датчика;

$c = 2\xi T$  - коефіцієнт демпфірування;

$\xi$  - ступінь демпфірування (безрозмірне відношення коефіцієнта демпфірування до критичного демпфірування).

Тоді рівняння (5) можна представити в наступному вигляді:

$$(T^2 p^2 + 2\xi T p + 1)Z(p) = -p^2 X(p)T^2, \quad (7)$$

або:

$$W_1(p) = Z(p)/p^2 X(p) = T^2 / (T^2 p^2 + 2\xi T p + 1) \quad (8)$$

Цей вираз є передавальною функцією чутливого елементу по прискоренню, так як

$$a(p) = p^2 X(p) = d^2 x(t)/dt^2 \quad (9)$$

Амплітудно-частотна -  $A(\omega)$  і фазо-частотна -  $\varphi(\omega)$  характеристики можуть бути отримані заміною  $p$  на  $j\omega$  в передавальній функції чутливого елементу і визначенням модуля і аргументу комплексного частотного спектра  $W(j\omega)$  відповідно:

$$A(\omega) = W(j\omega), \quad (10)$$

та

$$\varphi(\omega) = \arctg[W(j\omega)]. \quad (11)$$

Графік частотних характеристик віброакселерометра наведено на рис.1.6.

Аналізуючи графік амплітудно-частотної характеристики на рис.1.6, можна відмітити, що тільки в діапазоні  $[0, \omega_g]$  гармонічне прискорення перетворюється чутливим елементом без динамічної (частотної) похибки. Якщо задана допустима величина динамічної похибки  $\delta_g$ , що визначається як

$$\delta_{\varepsilon} = \{A_1(\omega_{\varepsilon}) - A_1(0)\} / A_1(0), \quad (12)$$

то гранична частота в робочого діапазону знаходиться з умови:

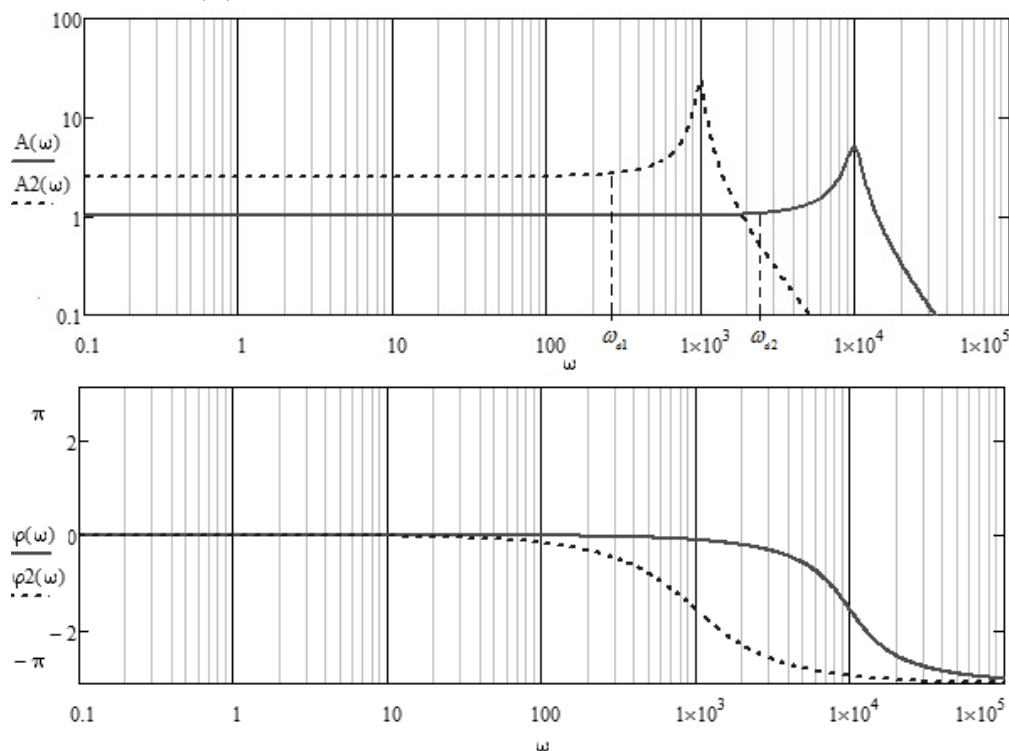
$$\delta_{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{\left[ (1 - T^2 \omega_{\varepsilon}^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega_{\varepsilon}^2 \right]}} - 1. \quad (13)$$

Частота  $\omega_0$ , на якій має місце резонанс системи "чутливий елемент-перетворювач" визначається

як:

$$\omega_0 = \frac{1}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (14)$$

Для розширення діапазону робочих частот, як впливає з (14), необхідно зменшити сейсмічну масу  $m$  або збільшити жорсткість її кріплення  $k$ . Однак при цьому зменшується і чутливість датчика в цілому, оскільки вона пропорційна величині  $T^2$  (8). Тому високочастотні датчики володіють меншою чутливістю до вібрацій ( $A(\omega)$  на графіку рис. 6).



**Рис. 6. Частотні характеристики віброакселерометра**

Важливою характеристикою чутливого п'єзоелектричного елемента є також його імпульсна перехідна характеристика, яка визначається як зворотнє перетворення Лапласа від функції  $W(p)$ :

$$K(t) = (1/2\pi j) \int_{x'-j\omega}^{x'+j\omega} W(p) e^{pt} dp \quad (15)$$

де  $K(t)$  - імпульсна функція;

$x'$  - абсциса абсолютної збіжності.

У свою чергу  $W(p)$  може бути виражена через імпульсну перехідну функцію  $K(t)$  шляхом застосування до останньої прямого перетворення Лапласа:

$$W(p) = \int_0^{t=\infty} K(t) e^{-pt} dt \quad (16)$$

Підставивши функцію  $W(p)$ , яка визначається за допомогою співвідношення (8), в формулу (15) отримуємо

$$K(t) = - \left[ T / \sqrt{1 - \xi^2} \right] \cdot e^{-\xi t/T} \cdot \sin \left[ \left[ \sqrt{1 - \xi^2} / T \right] \cdot t \right]. \quad (17)$$

Графік імпульсної перехідної функції для розглянутого випадку наведено на рис. 7.

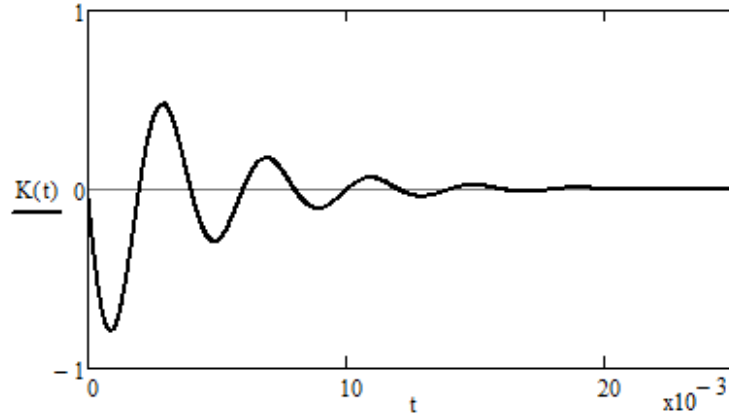


Рис. 7. Імпульсна перехідна функція віброакселерометра

Відомо, що імпульсна перехідна функція являє собою реакцію системи на дельта вплив Дірака, тобто імпульс нескінченно малої тривалості і нескінченно великої амплітуди, інтегральний параметр якого дорівнює одиниці [5]. Якщо на вхід системи діє неперіодична сила, то в загальному випадку функція відгуку  $y(t)$  визначається інтегралом Дюамеля:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)K(t-\tau)d\tau, \quad (18)$$

де  $x(\tau)$  - функція вхідного впливу.

Якщо ж  $x(\tau)$  являє собою імпульсний сигнал кінцевої тривалості і амплітуди, то при малій тривалості цього імпульсу в порівнянні з періодом циклічної резонансної частоти справедлива формула

$$y(t) = S_0 K(t) \quad (19)$$

$$S_0 = \int_0^{t_n} x(\tau_i) d\tau_i \quad (20)$$

де  $\tau_i$  - тривалість імпульсу.

На рис. 3, 4, 5 наведені відносно ідеалізовані криві АЧХ і ФЧХ п'єзоелектричного віброметра, велосімметра і акселерометра, та перехідної функції акселерометра (рис. 7) які отримані шляхом моделювання в системі MATHCAD [6].

Відповідно до теорії механічних коливань, графіком зсуву (переміщення) тіла, що зазнає гармонійні коливання, є синусоїда. Коли зміщення максимально, швидкість дорівнює нулю, так як в цьому положенні відбувається зміна напрямку руху тіла. Звідси випливає, що тимчасова реалізація швидкості буде зрушена по фазі на  $90^\circ$  вліво щодо тимчасової реалізації зсуву. Іншими словами, швидкість випереджає по фазі зсув на  $90^\circ$ . Прискорення - це швидкість зміни швидкості, отже, прискорення об'єкта, що зазнає гармонійні коливання дорівнює нулю, коли швидкість максимальна. І навпаки, коли швидкість дорівнює нулю, прискорення максимально (швидкість змінюється найшвидше в цей момент). Таким чином, прискорення випереджає по фазі швидкість на  $90^\circ$ .

Щодо акселерометра, то в до резонансній зоні АЧХ (частота збуджуючої сили менше його власної частоти) зсуву фаз між коливаннями чутливого елемента акселерометра і силою збудження немає. Акселерометр рухається з частотою збуджуючої сили. На частотах, близьких до частоти резонансу закріпленого акселерометра, рух сейсмічної маси запізнюється відносно руху підстави акселерометра і, отже, фазове спотворення збільшується. При резонансі коливання системи зрушені по фазі на  $90^\circ$  щодо коливань збуджуючої сили. В зоні після резонансу коливання системи і збуджуючої сили знаходяться в протифазі (зрушені відносно один одного на  $180^\circ$ ). Резонансні посилення амплітуди відсутні. При подальшому збільшенні частоти збудження амплітуда вібрації знижується, однак різниця фаз в  $180^\circ$  зберігається для всіх частот в діапазоні вище частоти резонансу.

Необхідно також відмітити, що при застосуванні апаратури вимірювання вібрацій потрібно враховувати фазову характеристику використовуваних разом з акселерометром підсилювачів заряду або напруги. Особливу увагу потрібно приділяти застосуванню апаратури, обладнаної електронними інтеграторами і фільтрами. Питання, пов'язані з фазовою характеристикою і фазовим спотворенням, особливо важливі при дослідженнях коротко тимчасових механічних коливань і механічних ударів.

**Література**

1. Шарапов В.М. Пьезоэлектрические датчики / В.М. Шарапов, М.П. Мусиенко, Е.В. Шарапова. – М.: Техносфера, 2006. – 632 с.
2. Туричин А.М. Электрические измерения неэлектрических величин/ А.М.Туричин., П.В.Новицкий, Е.С.Левшина.-Л: Энергия. 1975. 576 с.
3. Гольдин А.С. Вибрация роторных машин/ А.С. Гольдин.- М.: Машиностроение, 1999. – 344 с.
4. Вибрация в технике. Справочник в 6 томах. М.: Машиностроение. 1981.
5. Брюль и Кьер. Мониторизация состояния машинного оборудования. Нэрум: Дания 1991 – 47 с.
6. Воскобойников Ю. Е. Решение инженерных задач в пакете MathCAD / Ю. Е. Воскобойников (и др.) ; под ред. Ю. Е. Воскобойникова.– Новосибирск: НГАСУ(Сибстрин), 2013. – 120 с.
7. Хорвиц П.Искусство схемотехники/ П.Хорвиц, У. Хилл.- М.: Мир, 1998. – 704 с.

**Reference**

1. Sharapov V.M. Pezoelektricheskie datchiki / V.M. Sharapov, M.P. Musienko, E.V. Sharapova. – M.: Tehnosfera, 2006. – 632 s.
2. Turichin A.M. Elektricheskie izmereniya neelektricheskikh velichin/ A.M.Turichin., P.V.Novickij, E.S.Levshina.-L: Energiya. 1975. 576 s.
3. Goldin A.S. Vibraciya rotornykh mashin/ A.S. Goldin.- M.: Mashinostroenie, 1999. – 344 s.
4. Vibraciya v tehnikе. Spravochnik v 6 tomah. M.: Mashinostroenie. 1981.
5. Bryul i Ker. Monitorizaciya sostoyaniya mashinnogo oborudovaniya. Nerum: Daniya 1991 – 47 s.
6. Voskoboynikov Yu. E. Reshenie inzhenernykh zadach v pakete MathCAD / Yu. E. Voskoboynikov (i dr.) ; pod red. Yu. E. Voskoboynikova.– Novosibirsk: NGASU(Sibstrin), 2013. – 120 s.
7. Horvic P.Iskusstvo shemotehniki/ P.Horvic, U. Hill.- M.: Mir, 1998. – 704 s.

Рецензія/Peer review : 04.09.2019

Надрукована/Printed : 08.01.2020