

УДК 621.01:531

Дяченко П. В.*

АНАЛІТИЧНИЙ ОГЛЯД ТА ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ МОДЕЛЕЙ ДИНАМІКИ ЗУБЧАСТИХ ПЕРЕДАЧ

У статті проводиться аналітичний огляд робіт вітчизняних та зарубіжних авторів з дослідження динаміки зубчастих передач. Здійснюється детальний порівняльний аналіз існуючих моделей динаміки зубчастих передач, розглядаються їх особливості, аналізуються недоліки та переваги кожної з них. Досліджуються причини виникнення динамічних зусиль у зачепленнях, наводяться формули їх обчислень.

Ключові слова: Модель динаміки, зубчаста передача, динамічне навантаження, рівняння руху.

Дяченко П. В. Аналитический обзор и сравнительный анализ моделей динамики зубчатых передач. В статье проводится аналитический обзор работ отечественных и зарубежных авторов по исследованию динамики зубчатых передач. Осуществляется подробный сравнительный анализ существующих моделей динамики зубчатых передач, рассматриваются их особенности, анализируются недостатки и преимущества каждой из них. Исследуются причины возникновения динамических усилий в зацеплениях, приводятся формулы их вычисления.

Ключевые слова: Модель динамики, зубчатая передача, динамическая нагрузка, уравнение движения.

P.V. Dyachenko. The analytical review and comparative analysis of the models dynamic teeth of the issues. In article is conducted analytical review of the work domestic and foreign authors with studies dynamic toothed issues. It is realized detailed benchmark analysis existing models speakers toothed issues, are considered their particularities, are analysed defect and advantage each of them. The reasons of the origin dynamic force are researched in grapping, happen to the formulas of their calculations.

Keywords: Model of dynamics, toothed issue, dynamic loadings, equalization of motion.

Постановка проблеми. Багатолітня експлуатаційна практика та сучасний рівень розвитку інформаційних технологій у машинобудуванні сприяли поглибленню досліджень, пов'язаних з питаннями уточнення оцінки динамічної міцності зубчастих передач. Основною вимогою при проектуванні редукторів є якомога повніше врахування додаткових динамічних навантажень, що виникають із-за технологічних похибок виготовлення та монтажу елементів редукторів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Дослідженню динаміки зубчастих передач присвячена велика кількість робіт вітчизняних та зарубіжних дослідників: Е. Бакінгема, А.І. Петрусевича, Н.Д. Генкіна, В.К. Грінкевича, В.А. Доллежала, Б.М. Абрамова, М.С. Полоцького, М.В. Скрабелінського, І.Ш. Давидова, М.А. Ковальова, Х. Мерріта, М. Боша та багатьох інших [1-12]. Найбільш глибокі дослідження динаміки зубчастих передач проводилися в ЦНІИТМАШі, в Інституті машинознавства та в цілому ряді науково-дослідних інститутів, лабораторіях машинобудівних підприємств, на кафедрах ВНЗів. Основним напрямком досліджень є визначення теоретичним та експериментальним шляхом дійсних значень динамічних зусиль, що діють в зачепленні.

Метою даної статті є проведення аналітичного огляду робіт вітчизняних та зарубіжних вчених з дослідження динаміки зубчастих передач та порівняльний аналіз їх динамічних моделей з метою їх доповнення просторовим підходом.

Викладання основного матеріалу. Природа виникнення динамічних зусиль пояснюється похибками в геометрії зубчастих коліс, які знаходяться у зачепленні через неточності виготовлення і монтажу, а також наявністю пружних властивостей матеріалу коліс, що перебувають у зачепленні. В реальній зубчастій передачі евольвентного зчеплення нараховується близько п'ятидесяти похибок, з яких близько двадцяти дають похибки положення підвимої ланки. Детально це питання розглянуто в роботах з точ-

* ст. викладач, мл. наук. співробітник, Черкаський державний технологічний університет, м. Черкаси

ності зубчастих передач М.А. Калашникова, академіка М.Г. Брусевича та інших дослідників.

Перші спроби врахувати при конструюванні додаткові динамічні навантаження в зубчастих передачах зводились до того, щоб уточнити розрахункове колове зусилля коефіцієнтами, отриманими дослідним шляхом. Оскільки величина удару залежить від швидкості обертання зубчастих коліс, то першим таким коефіцієнтом був коефіцієнт швидкості. Визначення цього коефіцієнту теоретично являє собою значні труднощі, пов'язані з великою кількістю невідомих параметрів і короткочасністю співударяння зубців, тому значення коефіцієнта швидкості визначались експериментально, а його вирази записувалися емпіричними формулами.

У подальших роботах А.І. Петрусевича, М.Д. Генкіна, В.К Грінкевича [1, 2] при виведенні розрахункової залежності для визначення сили удару розрахункова схема подається не у вигляді співударення двох тіл, а як коливальний процес двох мас, пов'язаних жорсткістю зачеплення і отримуючих прискорення при спряженні зубців. Розрахункова схема коливального процесу зубчастих коліс з урахуванням тільки крутильних коливань зображена на рис. 1,а.

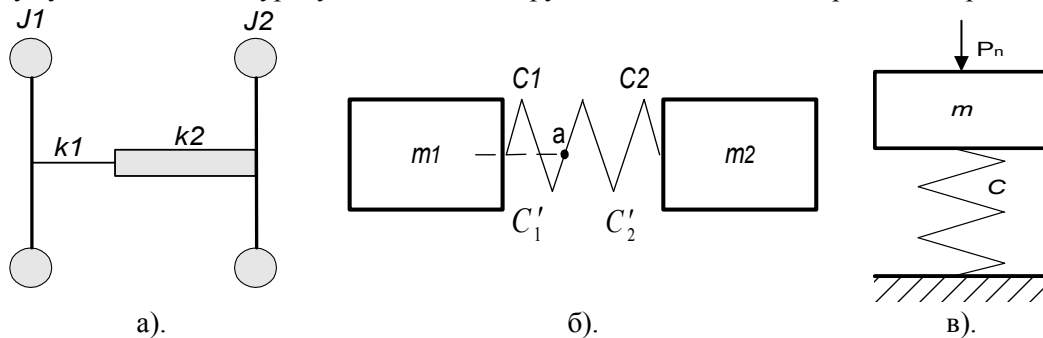


Рис. 1 - Динамічна схема зубчастої пари з масами m_1, m_2 на жорсткості зубців C_1, C_2

Від двохмасової крутильної системи, що відповідає оберտальному рухові зубчастих коліс з моментами інерції J_1, J_2 , з'єднаних пружними зубцями з жорсткостями k_1, k_2 , можна перейти до еквівалентної схеми, що відповідає поступальному рухові двох приведених до основного кола мас m_1 і m_2 зубчастих коліс на жорсткості зубців C_1 і C_2 (рис. 1,б). Такий перехід до лінійних коливань є більш зручним. З цієї розрахункової схеми випливає спрощена схема, наведена на рисунку 1в, яка являє собою прямолінійне колювання приведеної маси на жорсткості, що відповідає жорсткості двох лінійних питомих жорсткостей зубців у зачепленні. Для повної аналогії, до маси m прикладена питома сила P_n (колове зусилля в зачепленні), де a – центр колювання двох мас.

В подальшому ця схема була використана і при визначенні динамічного зусилля з урахуванням змінної жорсткості зачеплення і зношенні головок зубців. Змінна кромочна жорсткість зубців призводить до того, що час переспраження зубців збільшується, оскільки його потрібно відраховувати не з моменту виходу контакта в кінцеву точку лінії зачеплення пари зубців, що не співударяються, а дещо раніше, що зменшує динамічне навантаження. Однією з основних характеристик, що визначають силу удару або величину динамічного навантаження є параметр, що залежить від частоти динамічної взаємодії профілів та часу кромочного контакту пари зубців, що виходять з контакту. Цей параметр показує, скільки періодів власних коливань зубчастих коліс здійснюється за час передачі зусилля з попередньої пари на наступну. Динамічне навантаження за умови дії тільки циклічної похибки визначається за формулою [1]:

$$U = \frac{0.75 \Delta_{\Sigma C}}{2 \sqrt{\left[1 - C \left(\frac{300}{av} \right)^2 \right]^2 + \left(\frac{\psi}{2\pi} \right)^2 C \left(\frac{300}{av} \right)^2}}, \quad (1)$$

де $\Delta_{\Sigma C}$ – циклічна похибка в кроці шестерні або колеса; C – питома жорсткість зачеплення (для сталених косих зубців $C=28$, для шевронних $C=22,5$, мається на увазі для косих $\beta < 20^\circ$, для шевронних $\beta > 20^\circ$); v – колова швидкість, м/с; a – кількість циклів за один оберт шестерні (наприклад, при циклічній похибці в коловому кроці на колесі, із-за похибки ділильної передачі зубонарізного верстата, $a = Z_{o.k}/i$, де $Z_{o.k}$ – кількість зубців ділильного колеса зубонарізного верстата, i – передавальне число); ψ – циклічне відносне розсіювання енергії, що враховує демпфування в масляній плівці. Рекомендується прийняти $\psi = 0,1 - 0,3$, де більші значення відповідають більшій в'язкості мастила та більшій швидкості; $0,75$ – коефіцієнт, що наближено враховує поперечну жорсткість валу.

Дещо інакше до питання визначення динамічного навантаження підійшов В.А. Доллежалъ [3]. Він вводить термін "реактивний крутний момент", що дорівнює добутку моменту інерції на кутове прискорення перед ударом і отримує формули прийнятні для практичних розрахунків, які враховують переспряження зубців та їх піддатливість. В.А. Доллежалъ висуває вимоги підвищення жорсткості валів і обґрунтовує це тим, що надмірна піддатливість порушує умови роботи зачеплення. Моделі, що приймаються при дослідженні динаміки зубчастих передач, різноманітні та різні прийняті в них допущення. У зв'язку з вищевикладеним, потрібно відмітити, що одним з найбільш суттєвих факторів, які впливають на точне визначення сили удару, є закон руху зубчастих коліс перед ударом, однак ця сила визначається з тими або іншими допущеннями.

Б.М. Абрамов [4] при дослідженні коливального процесу в цілому по всьому зубчастому колесу, отримав загальний розв'язок, складений з ділянок, що описуються лінійними рівняннями. Граничні умови окремих ділянок лінійних рівнянь узгоджувались. Окрім цього, було проведено дослідження розв'язку рівняння другого порядку з періодичними коефіцієнтами. На відміну від традиційного підходу при визначенні динамічного навантаження і його врахуванні, шляхом множення стаціонарного колового зусилля на коефіцієнт динамічності, де саме навантаження обчислюється в залежності від швидкості і різниці основних кроків, розгляд динаміки зубчастих передач як коливального процесу з урахуванням змінної жорсткості зачеплення дає змогу більш коректно оцінювати величину динамічної сили тиску на зуб.

Аналогічні дослідження були проведені Н.А. Ковальовим [5], в яких детально було розглянуте питання визначення динамічних зусиль для різних фаз зачеплення при переспряженні зубців. В результаті проведеного дослідження він встановив, що при переході контакту з однієї пари на іншу стрибка швидкості обертання коліс, як передбачав Б.М. Абрамов не спостерігається. У [5] розглядається колювання зубчастих передач з розмиканням зубців. Розрахункову схему показано на рисунку 2. Розрахункове рівняння, що описує цей процес має вигляд:

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + c(x - x^*) = P_n \quad (2)$$

де m – еквівалентна маса зубчастих коліс на пружності опор; x – переміщення маси; x^* – ефективна кінематична похибка зачеплення передачі; $(x - x^*)$ – деформація зубчастого зачеплення; h – коефіцієнт демпфування зубчастої передачі; $h\dot{x}$ – сила тертя у зачепленні; P_n – зовнішнє зусилля у зачепленні.

Проведене точне і наближене розв'язання рівняння (2) методом гармонічного балансу, яке підтвердило існування колювань з періодичним припиненням контакту зубців, що експериментально спостерігалось М. Харрісом, Г.А. Лівшицем та іншими дослідниками. Єдиним збудником вібрацій є ефективна кінематична похибка.

У перелічених вище роботах з дослідження динамічних процесів динаміка зачеплення розглядається в залежності тільки від крутильних форм колювань зубчастих коліс, при постійній згинальній (поперечній) жорсткості системи, що враховується постійним коефіцієнтом ψ , вперше введеним А.І. Петрусевичем з метою врахування пружності валів. Залишаючись

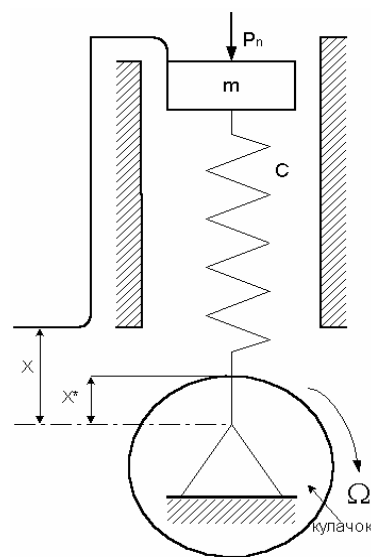


Рис. 2 - Модель динаміки зубчастої передачі за Н. А. Ковальовим

в рамках дослідження крутильних колювань, питанням динаміки зубчастих передач присвячені роботи М. Боша [6]. Математична модель, складена Бошем для дослідження динаміки зубчастих передач враховує такі основні фактори, які викликають коливальний процес: похибка форм профілю; похибка основного кроку; радіальне биття; колювання крутильної жорсткості зачеплення; бічний зазор; демпфування системи.

У динамічній моделі, що показана на рис. 3, радіальне биття проявляється один раз за оберт, і може не враховуватись із-за малої частоти його прояву. Із зовнішніх і внутрішніх збудників у системі, які сприяють виникненню динамічних навантажень, основний акцент у роботі спрямовано на внутрішні збудники.

До зовнішніх збудників системи належать колювання крутного момента привідного двигуна і зміни величини зовнішнього навантаження виконавчого механізму.

Для динамічної схеми показаної на рисунку 3, рівняння руху мають вигляд:

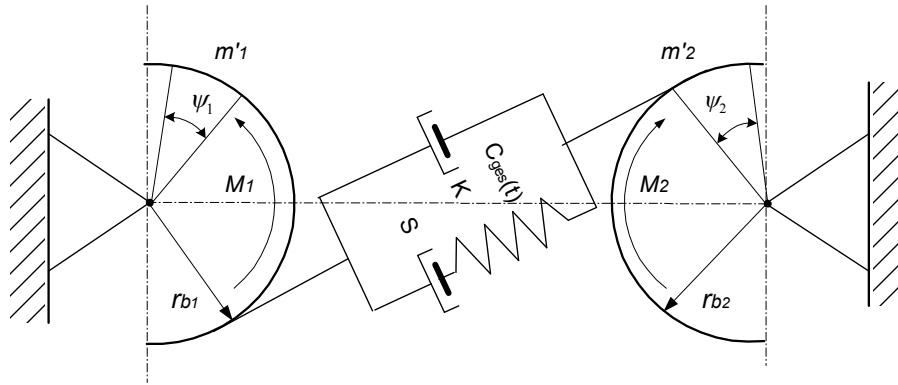


Рис.3 - Модель динаміки зубчастої передачі за М. Бошем

$$\begin{aligned}
 m_{1red} r_{b1}^2 \ddot{\psi}_1 &= -r_{b1} k(r_{b1}\psi_1 - r_{b2}\psi_2) - r_{b1} C_{ges}(t) * f(r_{b1}\psi_1 - r_{b2}\psi_2; S) + M_1; \\
 m_{2red} r_{b2}^2 \ddot{\psi}_2 &= r_{b2} k(r_{b1}\psi_1 - r_{b2}\psi_2) + r_{b2} C_{ges}(t) * f(r_{b1}\psi_1 - r_{b2}\psi_2; S) - \frac{r_{b1}}{r_{b2}} M_2,
 \end{aligned} \quad (3)$$

де m_{1red} ; m_{2red} – маси зубчастих коліс, віднесені до радіуса основного кола r_b ;
 $f(r_{b1}\psi_1 - r_{b2}\psi_2; S)$ – похибка зачеплення; S – бічний зазор.

У цій системі рівнянь враховуються усі впливи, які діють у кінематичному колі, як внутрішні джерела збудження. Розв'язок системи рівнянь (3) був отриманий шляхом математичного моделювання на аналогових обчислювальних машинах. Додатково результати розрахунку одноступінчастих приводів були поширені і на випадок двоступінчастих передач. У результаті теоретичних і експериментальних досліджень тензометричним методом, було встановлено, що навіть у точно виготовлених передачах у резонансних зонах, в яких частота переспряження дорівнює або кратна власній частоті системи, виникають значні додаткові зусилля.

Подібні дослідження, але для прямозубих передач були проведені у роботі [7]. Динаміка процесу розглядалася як залежності від похибки обкату (похибки профілю) при змінній жорсткості зубців у зачепленні з урахуванням зазору між профілями. У результаті було встановлено, що відношення сумарного динамічного навантаження і статичного тим більше, чим менше статичне навантаження і чим більші похибки однопрофільного прокату. У зубчастих коліс з великими похибками виготовлення мають місце подвоєння частот коливань з-за розмикання. При випробуваннях зубчастих коліс, за умови роботи зубців без розмикання у випадку малих навантажень і значних похибках обкату, резонансна частота виявляється нижчою власної частоти коливань.

З метою дослідження динамічних явищ у зубчастих редукторах з урахуванням впливу опор, динамічна схема зубчастих коліс була доповнена новими елементами. Такий підхід значно ускладнив розгляд динаміки зубчастих передач, однак відповідав більш точному характеру опису динамічного процесу. Однією з перших робіт у цьому напрямку було дослідження, проведене в Інституті машинознавства АН СРСР [8]. Запропонована авторами цієї роботи динамічна схема показана на рис. 4. Схема динаміки враховує такі параметри: h , h_1 – демпфери зачеплення та опори колеса відповідно; C_3 , C_{on} – пружні жорсткості зачеплення та опори колеса відповідно; m_1 , J , r – маса, момент інерції та радіус колеса відповідно; φ – кут закрутки колеса; $\Delta(t)$ – пружна деформація зубця.

У результаті проведеного дослідження було встановлено існування трьох коливальних станів за формами, визначеними співвідношенням крутильної і поперечної складових коливань зубчастого колеса. Вплив динамічної взаємодії сусідніх зубців в утворенні коливального процесу розглядуваної пари зубців не враховується. Експериментальна перевірка за допомогою п'єзодатчиків, встановлених на корпусі колеса, дала змогу виявити для

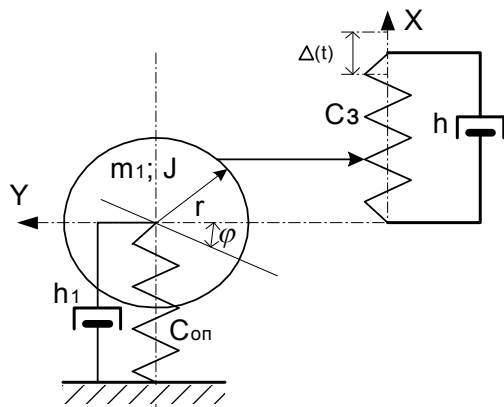


Рис. 4 - Динамічна схема зачеплення з урахуванням крутильної і поперечної складових

першої форми коливань, для якої характерним є переважання крутильно-згинальних коливань, зміщення центру коливань з геометричної осі до площини зачеплення. Ця форма супроводжується розривом контактів зубців і утворенням ударно-коливальних станів шестерень у процесі зачеплення. Ця форма спостерігається при малих швидкостях обертання, у якій крутильна складова є переважаючою. Друга форма коливань шестерні характеризується поперечними коливаннями і виникає при середніх числах обертів. Амплітуда коливань у цьому випадку дорівнює діючій похибці зачеплення. При третій формі коливань, що виникає при високих частотах збудження, коливання шестерень здійснюються біля центру коливань, зміщеного з геометричної осі від площини зачеплення. Поперечна складова коливань у цьому випадку призводить до зменшення динамічного навантаження.

Глибокі дослідження впливу піддатливості опор на динаміку зубчастих передач з урахуванням змінної жорсткості зачеплення і коефіцієнтів демпфування проведені у роботі [10]. Як пружні підшипники, розглядалися підшипники ковзання, для яких було надане обґрунтування вибору оптимальних жорсткостей несучих опор, що забезпечують або мінімальні крутильно-поперечні коливання, або відстроювання роботи від резонансів. Динамічна схема використана у даному дослідженні, наведена на рис. 5. Результати роботи констатують, що основна частота крутильних і поперечних коливань коліс визначається частотою зміни жорсткості і похибки зачеплення. При середніх обертах частота коливань визначається частотою переспряження зубців. Зі зменшенням швидкості коливання відбуваються з подвоєною частотою переспряження, а зі збільшенням швидкості - з частотою удвічі меншою основної зубцевої частоти. Зміна жорсткості опор сильніше впливає на низькі власні частоти і на амплітуди крутильних і поперечних коливань на цих частотах.

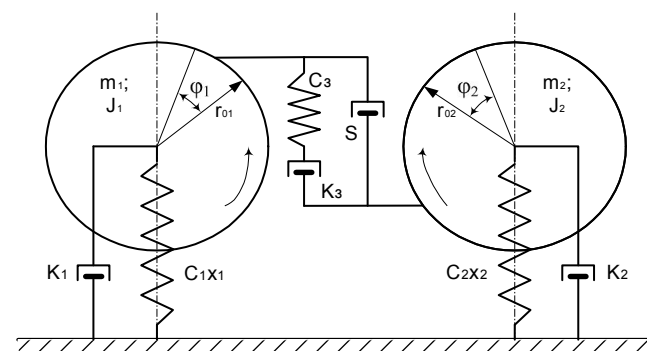


Рис. 5 - Модель динаміки зубчастої передачі за Д.Т. Демітрадзе

математична модель зачеплення на жорсткостях і опорах ковзання. У роботі дається тільки опис рівнянь вимушених коливань зубчастого зачеплення з урахуванням динамічних властивостей мастильного шару.

Насьогодні, у вивченні динаміки зубчастих передач намітилась тенденція уточнення дослідження динамічних процесів, шляхом створення моделей динаміки з розподіленими параметрами. Фундаментальних досліджень з цього питання не проведено [11, 12].

Висновки

Проведено аналітичний огляд та порівняльний аналіз чотирьох, найбільш типових моделей динаміки зубчастих передач, з метою визначення напрямів їх подальшого вдосконалення. Результати проведеного аналізу дали можливість зробити такі висновки:

1. Динаміка зубчастого зачеплення у моделі Н. А. Ковальова розглядається тільки в залежності від крутильних форм коливань зубчастих коліс, при постійній поперечній жорсткості коливальної системи. Застосування нелінійної теорії коливань при розв'язку рівнянь математичної моделі, дало змогу підтвердити існування коливань зубчастих коліс з періодичним припиненням контакту зубців, і оцінити резонансні режими у зоні нестійкого режиму роботи. Отримана велика кількість зон нестійкості і розривних коливань прямозубих коліс для стрибкоподібної зміни жорсткості зачеплення і навантаження.
2. Модель динаміки М. Боша залишається у рамках дослідження крутильних коливань, і враховує такі чинники, що викликають коливальний процес: похибка форм профілю, похибка основного кроку, радіальне биття, коливання крутильної жорсткості зачеплення, бічний зазор, демпфування системи. Зовнішніми збудниками коливань вважаються коливання крутного моменту

привідного двигуна і зміна величини зовнішнього навантаження.

3. Модель Інституту Машинознавства СРСР побудована з врахуванням впливу опор і враховує такі параметри: демпфери зачеплення та коліс, пружні жорсткості зачеплення та коліс, маси, моменти інерції та радіуси коліс, кут закрутки та пружну деформацію коліс. На моделі досліджувалась крутильна і поперечна складові коливань зубчастих коліс.

4. Модель Д. Т. Демітрадзе дає можливість розглядати крутильні і поперечні коливання зубчастих коліс. На даній моделі досліджувався вплив піддатливості опор на динаміку зубчастої передачі, з урахуванням змінної жорсткості зачеплення і коефіцієнтів демпфування зубців і опор. Результати досліджень констатують, що основна частота крутильних і поперечних коливань коліс визначається частотою зміни жорсткості зубців і похибкою зачеплення.

5. Можливим напрямом удосконалення моделей динаміки, і як наслідок, уточнення відповідних їм математичних моделей, може бути збільшення кількості враховуваних конструктивних параметрів реальної зубчастої передачі. З метою подальшого розвитку динамічних моделей, автором пропонується модель, яка близько до реальних умов описує динаміку косозубої, циліндричної, евольвентної, одноступінчастої зубчастої передачі. Основні її характеристики такі: динаміка зубчастої передачі розглядається в залежності від крутильних, згинальних та поздовжніх коливань зубчастих коліс і ділянок валів між приєднаними масами та колесами; кожне зубчасте колесо має 6 ступенів вільності, вали – 3 ступені вільності. Враховуються такі параметри конструкції: – маси зубчастих коліс; маси привідної та робочої машин (приєднані маси). Обидві маси зубчастих коліс знаходяться на пружних опорах з рідинними демпферами, відповідно враховуються: поперечні жорсткості опор обох валів у вертикальній та горизонтальній площинах; поздовжні жорсткості опор; демпфери опор у вертикальній та горизонтальній площинах. Крім наведених параметрів, враховуються змінна жорсткість зачеплення зубців та бічний зазор.

6. Таким чином, динамічна модель, що пропонується автором, у повній мірі відображає усі основні геометричні, конструктивні, масо-жорсткісні і демпфуючі параметри евольвентної косозубої, циліндричної зубчастої передачі.

Список використаних джерел:

1. Петрусевич А.И. Динамические нагрузки на зубьях прямозубых колес. В кн.: Расчет и конструирование деталей машин. ИМАШ АН СССР, 1942 г.
2. Петрусевич А.Н. Динамические нагрузки в зубчатых передачах с прямозубыми колесами / А.Н. Петрусевич, М.Д. Генкин, В.К. Гриневич // М.: Изд-во АН СССР.- 1956. - 134 с.
3. Доллежалъ В.А. Расчетная нагрузка зубчатых передач / М.: Машгиз.- 1957.- 80 с.
4. Абрамов Б.М. Колебания прямозубых зубчатых колес.- Харьков: Изд-во ХГУ.- 1969. -175 с.
5. Ковалев Н.А. Колебания зубчатых передач с размыканием зубьев. М. В кн. Теория передач в машинах. Изд-во Машиностроение, 1966. С. 248-251.
6. Бош М. Динамика цилиндрических зубчатых колес с учетом точности их изготовления. Часть I. В кн. Экспресс-информация. Детали машин, №11, 1966.
7. Terauchi Yashio, Hidoka Teruaki, Nagashima Mitio. Eine Studie zur dynamischen Zusatzkraft gerad verzahnter Stienzäder (dez Einflubdes Einflanken Walzfeis ouf Zusatzkräft). Bull JSME, 1967, №42 1048-1056. (нем.) Экспресс-информация, Детали машин, №31, 1966.
8. Генкин М.Д. Динамические нагрузки в передачах с косозубыми колесами / М.Д. Генкин, В.К. Гриневич // М.: Изд-во АН СССР. Институт Машиноведения.- 1961. -.116 с.
9. Лившиц Г.А. Динамика зубчатой передачи в свяи с точностью зацепления. М.: Труды ЦНИИТМАШ, ОНТИ. - 1964. - 69 с.
10. Демитрадзе Д.Т. Экспериментальное исследование крутильных и поперечных колебаний в прямозубых цилиндрических зубчатых передачах с упругими опорами скольжения. Сообщ. АН Груз. ССР. - 1974, т. 75.- №2.
11. Айрапетов Э.Л. Динамика планетарных механизмов / Э.Л. Айрапетов, М.Д. Генкин // М.: Изд-во Наука. -1980. - 256 с.
12. Гриневич В.К. Влияние скоростного режима на динамику зацепления с составными колесами / В.К. Гриневич, В.Н. Прядков // Кн.: Вибрация механизмов с зубчатыми передачами. М., Изд-во Наука, 1978. С. 33-38.

Рецензент: М.В. Маргуліс
д-р техн. наук, проф., ДВНЗ «ПДТУ»

Стаття надійшла 02.12.2010