

удельный расход топлива по ГТУ больше, чем по установкам КЭС,  $q = \frac{1}{\eta} > q_{КЭС} = \frac{1}{\eta_{КЭС}}$ , что с учетом этого экономия топлива на отпуск теплоты внешним потребителям составит

$$Q_{эк} = \frac{Q_{вн}}{\eta_{кот}} - \Delta(q - q_{кэс}), \quad (27)$$

где  $\Delta$  – выработка электроэнергии за рассматриваемое время.

Удельная экономия тепла на единицу отпущенного составит

$$q_{эк} = \frac{Q_{эк}}{Q_{вн}} = \frac{1}{\eta_{кот}} - \frac{\Delta}{Q_{вн}(q - q_{кэс})} = \frac{1}{\eta_{кот}} - w(q - q_{кэс}) = \frac{1}{\eta_{кот}} - w\left(\frac{1}{\eta} - \frac{1}{\eta_{кэс}}\right). \quad (28)$$

Формула (28) дает возможность проанализировать влияние на величину экономии  $q_{эк}$  характеристик ГТУ и удельной выработки электроэнергии на тепловом потреблении.

### Выводы

1. Энергетическая эффективность газотурбинных ТЭЦ определяется в основном КПД ГТУ и температурой уходящих газов из котла – утилизатора.
2. Удельный расход топлива на ГТЭЦ заметно ниже, чем на современных паротурбинных установках большой мощности практически для всей номенклатуры отечественных ГТУ.
3. Предложенная методика оценки эффективности ГТЭЦ позволит оптимальным образом подбирать утилизационное оборудование при проектировании.

### Список использованных источников:

1. Чаташвили Г.П. К методике расчета показателей эффективности газотурбинных ТЭЦ / Г.П. Чаташвили // Теплоэнергетика. – 2001. – №8. – С. 32-40.
2. Сазанов П.В. Теплоэнергетические системы промышленных предприятий / П.В. Сазанов, В.И. Ситас. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 356 с.

### Bibliography:

1. Chatashvili G.P. By the method of calculating the performance of gas turbine TPP / G.P. Chatashvili // Thermal Power Engineering. – 2001. – № 8. – P. 32-40. (Rus.)
2. Sazanov P.V. Thermal energy systems of industrial enterprises / P.V. Sazanov, V.I. Sitas. – M.: Energoatomizdat, 1986. – 356 p. (Rus.)

Рецензент: В.А. Маслов  
д-р техн. наук, проф., ГВУЗ «ЛПГУ»

Статья поступила 24.04.2014

УДК 621.412

© Ткаченко К.І.\*

### ДО ПИТАННЯ МОДЕЛЮВАННЯ РОБОТИ ДВИГУНІВ СТИРЛІНГА

*Запропонована математична модель вільнопоршневого двигуна Стирлінга. З використанням отриманої методики розраховані параметри роботи серійно виробляемого прототипу, що підтвердило коректність розробленої математичної моделі.*

**Ключові слова:** двигун Стирлінга, вільнопоршневий двигун, математичне моделювання.

**Ткаченко К.І. К вопросу моделирования работы двигателей Стирлинга. Предложена математическая модель свободнопоршневого двигателя Стирлинга. С использованием полученной методики рассчитаны параметры работы серийно про-**

\* канд. техн. наук, доцент, ДВНЗ «Приазовський державний технічний університет», м. Маріуполь, kostyantyn@gmail.com

изводимого прототипа, что подтвердило корректность разработанной математической модели.

**Ключевые слова:** двигатель Стирлинга, свободнопоршневой двигатель, математическое моделирование.

**К.І. Tkachenko. On The question of modelling functioning of Steerling engines.** The mathematical model of free-piston Steerling engine was developed. The parameters of work cycle for stock-produced Steerling engine was calculated based on proposed methods that confirmed correctness of mathematical model.

**Keywords:** Steerling engine, free-piston engine, mathematical modelling.

**Постановка проблеми.** В зв'язку з паливною кризою, посиленням вимог щодо емісії шкідливих речовин енергогенеруючими установками, в певних галузях доцільним стає використання двигунів Стирлінга. Проте, методики проектування та розрахунку їх параметрів на сьогодні не можна вважати досконалими, і, особливо, для двигунів нетрадиційних схем, внаслідок чого є доцільним зосередити зусилля на математичному моделюванні двигунів Стирлінга.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Найбільш широко відомий аналіз роботи двигунів Стирлінга, розроблений Шмідтом [1], дає можливість лише напівкількісно оцінити параметри двигуна через великий ступінь ідеалізації. В пізніших роботах Фількенштейна, Уокера [2] та Йоші, Квейла, Сміта [3] та інш. були зроблені спроби підвищити точність розрахунків для певних застосувань апаратів, що працюють за циклом Стирлінга. На цей час визнається перспективним і такий різновид двигуна, як термоакустичний двигун Стирлінга, теоретичним аналізом роботи якого займаються Університет Осаки (Сугімото), Енергетичний Дослідницький Центр Нідерландів (Тіжиані) та інш.

**Мета статті** – запропонувати теоретичний аналіз роботи вільнопоршневого двигуна Стирлінга з певними ідеалізаціями та спрощеннями, перевірити вірність запропонованої методики для реальної моделі двигуна шляхом розрахунку параметрів робочого циклу.

**Виклад основного матеріалу.** Вільям Білл, проф. Університету Огайо в 1964 році розробив конструкцію вільнопоршневого двигуна Стирлінга [4]. Двигун є самозапущним, не потребує кривошипного механізму, певні конструкції можуть бути виготовлені без будь-яких ущільнень для газу. Принципова схема двигуна наведена на рис. 1. Двигун Біла може виконувати корисну роботу при з'єднанні поршня, що коливається, з навантаженням – привід поршня компресора, рухомої частини лінійного генератора електричної енергії. З певними змінами цей тип двигуна знайшов втілення у когенераційній установці фірми Viessman – 300-W [5] електричною потужністю 1 кВт та електричним ККД 16% (рис. 2).

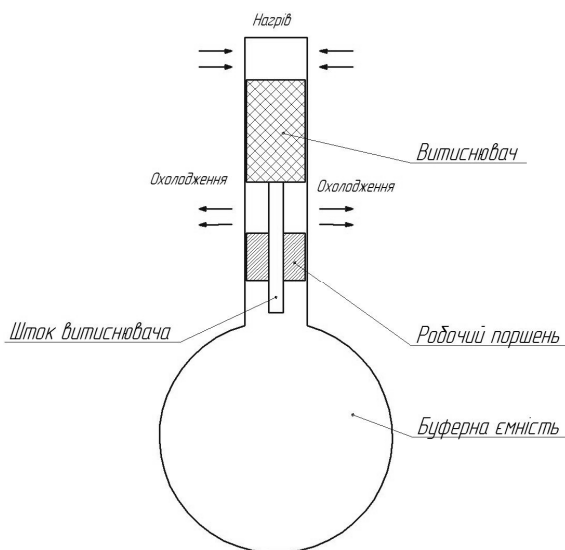


Рис. 1 – Принципова конструкція вільнопоршневого двигуна Стирлінга

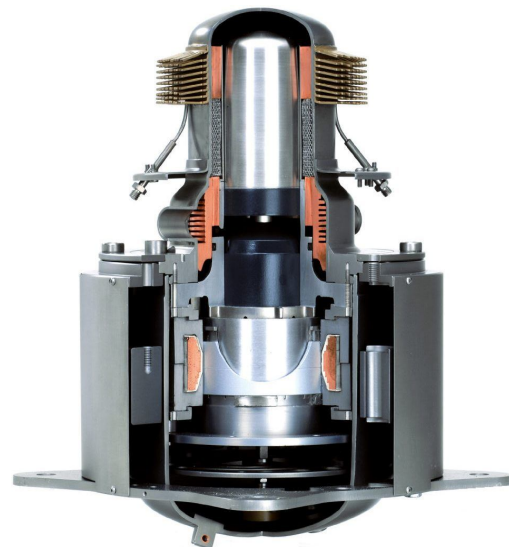


Рис. 2 – Електричний генератор Viessman 300-W

Для аналізу роботи існуючих двигунів та конструювання нових необхідна вдосконалена, у порівнянні з теорією Шмідта, математична модель двигуна. Таким чином, в даній роботі, на основі припущень Шмідта, окрім гармонічного руху поршнів, була створена математична модель з використанням диференційних рівнянь руху поршня та витиснювача, рівнянь стану газу при нагріві й охолодженні та інш.

Основні умовні позначення, використані в подальших розрахунках:

$D_{cyl}$  – діаметр основного циліндра;

$D_{disp}$  – діаметр витиснювача;

$D_{rod}$  – діаметр штока витиснювача;

$D_{pist}$  – діаметр робочого поршня (робочого циліндра);

$\Delta$  – величина кільцевої щілини між витиснювачем та основним циліндром (регенератор)

$$\Delta = 0,5 \cdot (D_{cyl} - D_{disp});$$

$L_{pist}$  – відстань між поршнем та дном основного циліндра;

$L_{disp}$  – довжина витиснювача;

$L_{cyl}$  – довжина основного циліндра;

$k_{pist}$  – жорсткість пружини робочого поршня;

$k_{disp}$  – жорсткість пружини витиснювача;

$k_{el}$  – коефіцієнт гальмування поршню за рахунок генерації електричного струму в котушках генератора;

$k_{db}$  – коефіцієнт гальмування витиснювача за рахунок тертя в ущільнювачі та при перетіканні газу в регенераторі;

$F_{dpc}$  – сила, що діє на витиснювач з боку газу в порожнині всередині витиснювача;

$F_{dpc}$  – сила, що діє на витиснювач з боку газу в порожнині робочого циліндра;

$F_{ds}$  – сила пружини, що повертає витиснювач в нульове положення;

$F_{ppc}$  – сила, що діє на поршень з боку газу в порожнині робочого циліндра;

$F_{ppb}$  – сила, що діє на поршень з боку газу в буферній ємності;

$F_{ps}$  – сила пружини, що повертає поршень в нульове положення;

$F_{pe}$  – сила гальмування за рахунок генерації електричного струму в котушках генератора, що діє на поршень;

$p_{buf}$  – тиск в буферній ємності;

$p_{cyl}$  – тиск в порожнині основного циліндра;

$p_{disp}$  – тиск в порожнині всередині витиснювача;

$S_{cyl}$  – площа поперечного перетину основного циліндра;

$S_{disp}$  – площа поперечного перетину витиснювача;

$S_{rod}$  – площа поперечного перетину штока витиснювача;

$S_{pist}$  – площа поперечного перетину робочого поршня;

$T_{env}$  – температура оточуючого середовища;

$T_{hot}$  – температура газу в гарячій порожнині основного циліндра;

$T_{cold}$  – температура газу в холодній порожнині основного циліндра та робочому циліндру;

$M$  – молярна маса робочого газу.

Обсяг газу  $V_{disp}$  в певний момент часу (моментальний обсяг) у внутрішній порожнині витиснювача залежить від зсуву його  $x_{disp}$  від нульового положення (витиснювач розташований посередині робочого циліндра по довжині)

$$V_{disp} = S_{disp} \cdot L_{disp} - \frac{1}{2} L_{disp} \cdot S_{rod} - x_{disp} \cdot S_{rod} \quad (1)$$

Обсяг газу  $V_{cyl}$  в певний момент часу в циліндрах (основному та робочому) є функцією як зсуву витиснювача, так і зсуву робочого поршня  $x_{pist}$  від його нульового положення (відстань від поршня до основного циліндра)

$$V_{cyl} = S_{cyl} \cdot L_{cyl} - L_{disp} \cdot S_{disp} + S_{rod} \cdot \left( x_{disp} - \frac{L_{cyl} - L_{disp}}{2} \right) + S_{pist} \cdot (x_{pist} + L_{pist}) \quad (2)$$

Обсяг газу  $V_{hot}$ , що знаходиться в певний момент часу в гарячій частині основного цилін-

дра (прийнято, що половина кільцевої щілини регенератора відповідає гарячій частині циліндра)

$$V_{hot} = \frac{1}{2} S_{cyl} \cdot (L_{cyl} - L_{disp}) + \frac{1}{2} (S_{cyl} - S_{disp}) \cdot L_{disp} + x_{disp} \cdot S_{cyl} \cdot \quad (3)$$

Обсяг газу  $V_{cold}$ , що знаходиться у холодній частині основного циліндра, половині кільцевої щілини регенератора та у робочому циліндрі

$$V_{cold} = V_{cyl} - V_{hot} \cdot \quad (4)$$

Кількість газу, що знаходиться в обсязі  $V_{cyl_0}$  за початкових умов (нульові положення витиснювача та робочого поршня):

$$v_0 = \frac{p_{buf_0} \cdot V_{cyl_0}}{R \cdot T_{env}}, \quad (5)$$

де  $p_{buf_0}$  – тиск у буферній ємності при температурі всього двигуна  $T_{env}$ ;

$R$  – універсальна газова константа, 8,31 Дж/(К·моль).

Кількість газу, що знаходиться в обсязі витиснювача  $V_{disp_0}$  за початкових умов:

$$v_{disp_0} = \frac{p_{buf_0} \cdot V_{disp_0}}{R \cdot T_{env}} \cdot \quad (6)$$

Тиск газу в основному та робочому циліндрах, розраховується за формулою:

$$p_{cyl} = v \cdot R \cdot \frac{T_{hot} \cdot T_{cold}}{V_{cold} \cdot T_{hot} + V_{hot} \cdot T_{cold}}, \quad (7)$$

де  $v$  – кількість газу в обсязі  $V_{cyl}$ , яка враховує витік газу з основного та робочого циліндра до буферної ємності і внутрішньої порожнини витиснювача після запуску через недосконалість ущільнень витиснювач – шток витиснювача, робочий поршень – робочий циліндр.

Тиск газу в порожнині витиснювача обчислюється наступним чином:

$$p_{disp} = v_{disp} \cdot R \cdot \frac{(T_{hot} + T_{cold})}{2} \cdot \frac{V_{disp_0}^\gamma}{V_{disp}^\gamma}, \quad (8)$$

де  $v_{disp}$  – кількість газу в обсязі  $V_{disp}$ , яка враховує перетік газу з основного та робочого циліндра до внутрішньої порожнини витиснювача після запуску через недосконалість ущільнень витиснювач – шток витиснювача.

Кількість газу, що перетікає в одиницю часу з основного та робочого циліндра до витиснювача, визначається наступним чином:

$$\Delta v_d = \text{sgn}(p_{cyl} - p_{disp}) \cdot \sqrt{2 \cdot |p_{cyl} - p_{disp}|} \cdot S_{rod-disp} \cdot \sqrt{\rho_{cyl-disp}} \cdot \mu / M, \quad (9)$$

де  $S_{rod-disp} = \pi \cdot ((D_{rod} + \delta)^2 - D_{rod}^2) / 4$  – площа поперечного перетину зазору ущільнювача витиснювача та його штока,  $\delta$  – зазор ущільнювача;

$\rho_{cyl-disp} = (p_{cyl} + p_{disp}) \cdot M / [R \cdot (T_{cold} + T_{hot})]$  – середня густина газу в циліндрі та витиснювачі;

$\mu$  – коефіцієнт витрати кільцевої щілини.

Кількість газу, що перетікає в одиницю часу з основного та робочого циліндра до буферної ємності, визначається наступним чином:

$$\Delta v_b = \text{sgn}(p_{cyl} - p_{buf}) \cdot \sqrt{2 \cdot |p_{cyl} - p_{buf}|} \cdot S_{pist} \cdot \sqrt{\rho_{cyl-buf}} \cdot \mu / M, \quad (10)$$

де  $S_{pist} = \pi \cdot ((D_{pist} + \delta)^2 - D_{pist}^2) / 4$  – площа поперечного перетину зазору ущільнювача робочого поршня та робочого циліндра,  $\delta$  – зазор ущільнювача;

$\rho_{cyl-buf} = (p_{cyl} + p_{buf}) \cdot M / (2 \cdot R \cdot T_{cold})$  – середня густина газу в циліндрі та буферній ємності.

Рівнодіюча сила  $R_{disp}$ , що діє на витиснювач, складається з декількох компонентів, як вказано нижче (див. рис. 3)

$$R_{disp} = F_{dpc} + F_{dpd} + F_{ds} + F_{db}, \quad (11)$$

$$F_{dpc} = S_{rod} \cdot p_{cyl}, \quad (12)$$

$$F_{dpd} = S_{rod} \cdot p_{disp}, \quad (13)$$

$$F_{ds} = -x_{disp} \cdot k_{disp}, \quad (14)$$

$$F_{db} = -\text{sgn}\left(\frac{dx_{disp}}{d\tau}\right) \cdot \left(\frac{dx_{disp}}{d\tau}\right)^2 \cdot k_{db}. \quad (15)$$

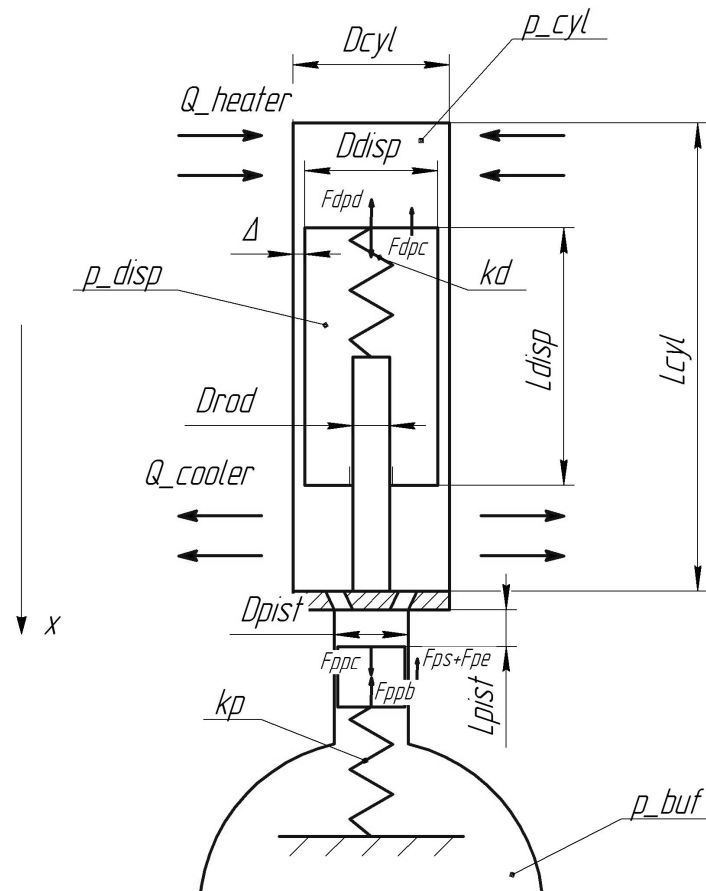


Рис. 3 – Схема вільнопоршневого двигуна Стирлінга, умовні позначення та діючі сили

В свою чергу, рівнодіюча сила  $R_{pist}$ , яка діє на робочий поршень, та її складові визначаються наступними виразами (рис. 3):

$$R_{pist} = F_{ppc} + F_{ppb} + F_{ps} + F_{pe}, \quad (16)$$

$$F_{ppc} = S_{pist} \cdot p_{cyl}, \quad (17)$$

$$F_{ppb} = -S_{pist} \cdot p_{buf}, \quad (18)$$

$$F_{ds} = -x_{pist} \cdot k_{pist}, \quad (19)$$

$$F_{el} = -\frac{dx_{disp}}{d\tau} \cdot k_{el}. \quad (20)$$

Зважаючи на наведені вище формули, можливо записати систему диференціальних рівнянь математичної моделі вільнопоршневого двигуна Стирлінга

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 x_{pist}}{d\tau^2} = \frac{R_{pist}}{m_{pist}}, \\ \frac{d^2 x_{disp}}{d\tau^2} = \frac{R_{disp}}{m_{disp}}, \\ \frac{dv_{disp}}{d\tau} = \Delta v_{disp}, \\ \frac{dv_{buf}}{d\tau} = \Delta v_{buf}, \\ \frac{dv_{cyl}}{d\tau} = -\Delta v_{buf} - \Delta v_{disp}. \end{array} \right. \quad (21)$$

Для перевірки правильності математичної моделі були використані дані електричного генератора фірми Viessman. Використовуючи наведені вище залежності, за допомогою вільно розповсюджуваної програми SmathStudio, була створена комп'ютерна реалізація математичної моделі вільнопоршневого двигуна Стирлінга. В якості вихідних даних використовувалися параметри Vitotwin 300-W, наявні у відкритому доступі: геометричні параметри були обчислені на основі відомих габаритів пристрою та зображень пристрою у розрізі, температура холодної частини основного циліндра оцінена на основі температури зворотної води системи опалення та певного температурного напору вода-робочий газ, температура нагрівача прийнята за аналогами.

В результаті аналізу показано, що певним чином ідеалізований вільнопоршневий двигун Стирлінга, за використаних параметрів може мати електричну потужність у 1150 Вт при початковому тиску в системі 15 бар, що, в цілому, відповідає технічним даним прототипу. На рис. 4 наведена розрахована індикаторна pV діаграма робочого процесу від запуску двигуна (0 с) і до 6 с роботи (модель не враховує теплову інерцію та кінцеву швидкість теплопередачі в двигуні). Тиск у системі протягом розігріву та виходу на робочий режим, а потім і на робочому режимі, змінювався з 15 бар до, приблизно, 20 бар. З діаграми видно, що переміщення робочого газу з холодної частини в гарячу відбувалося не ізохорічно через не зовсім точний підбір жорсткості повертаючих пружин, відношення мас поршня й витиснювача та площин поршня й штока витиснювача.

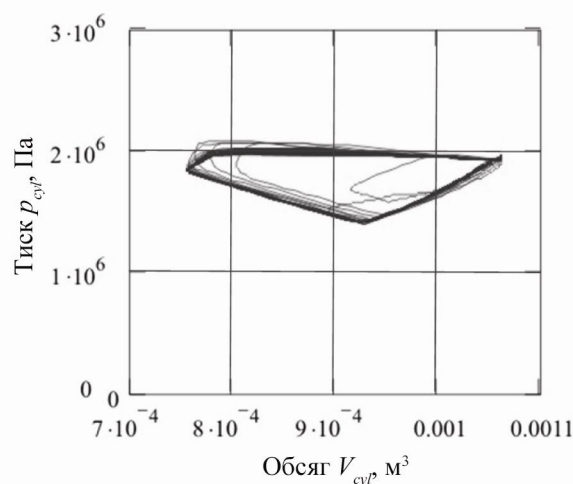


Рис. 4 – Розрахована pV діаграма роботи двигун

Залежність переміщення робочого поршня та витиснювача від часу наведена на рис. 5, залежність обсягу холодної, гарячої частини циліндра та обсягу циліндра в цілому від часу – на рис. 6: помітно, що виконується випереджальний рух витиснювача, порівняно з робочим порш-

нем, тобто стискання робочого газу переважно проходить підчас його знаходження у холодній частині основного циліндра, а розширення – у гарячій.

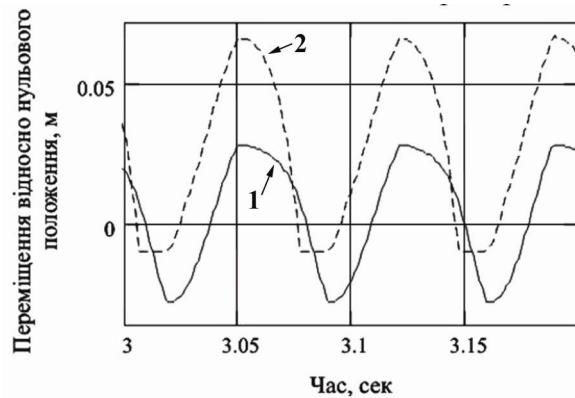


Рис. 5 – Залежність переміщення від часу: 1 – робочого поршня,  $x_{pist}$ ; 2 – витиснювача,  $x_{disp}$

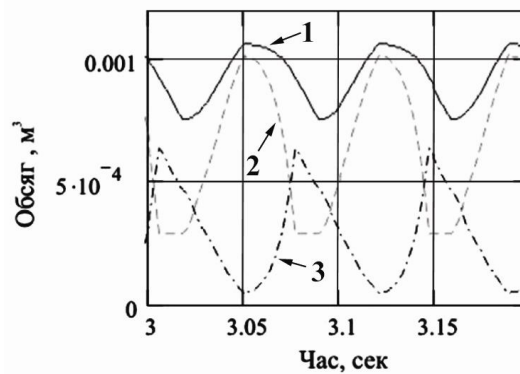


Рис. 6 – Зміна обсягів у часі: 1 – основного циліндра,  $V_{cyl}$ ; 2 – гарячої частини,  $V_{hot}$ ; 3 – холодної частини,  $V_{cold}$

Зміна тиску в основному та робочому циліндрі, а також в буферній ємності показана на рис. 7. Амплітуда тиску в буферній ємності менша за амплітуду в основному та робочому циліндрах та зсунута в часі через перетікання частини газу через ущільнювачі робочого поршня.

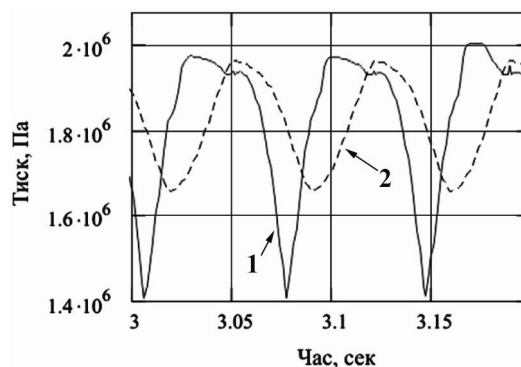


Рис. 7 – Залежність тиску від часу: 1 – в основному й робочому циліндрах,  $p_{cyl}$ ; 2 – в буферній ємності,  $p_{buf}$

На рис. 8 зображена крива залежності генерованої електричної потужності від часу; за даної математичної моделі електричний струм в котушках генератора утворюється за будь-якого напрямку руху поршня – видно, що прямий (розширення) та зворотній рух поршня відізняються за потужністю та часом генерації електричної енергії.

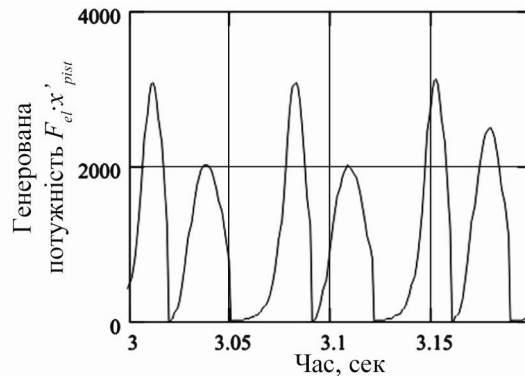


Рис. 8 – Залежність генерованої електричної потужності ( $F_{el} \cdot x_{pist}^{'}$ ) від часу

**Висновки**

1. Запропоновано математичну модель вільнопоршневого двигуна Стирлінга певного ступеню ідеалізації, з припущенням поведінки робочого тіла, як ідеального газу, а також нехтуючи швидкістю теплообміну між стінкою нагрівача/холодильника та робочим тілом.
2. Встановлено порівнянням з відомими параметрами серійно виробляемого двигуна Стирлінга, що модель є коректною та достатньо точною.
3. Дослідження в даному напрямку необхідно продовжувати, враховуючи питання теплообміну поміж робочим тілом та елементами двигуна Стирлінга.

**Список використаних джерел:**

1. Уокер Г. Машины, работающие по циклу Стирлинга: Пер. с англ. / Г. Уокер. – Москва: Энергия, 1978. – 152 с.
2. Finkelstein T. Design Optimization of Stirling-cycle cryogenic cooling engines, by digital simulation / T.Finkelstein, G. Walke // Cryogenic Engineering Conference. – Boulder, Colorado, USA, 1970. – Paper K4 – 1970b.
3. Rios P.A. An analytical and experimental evaluation of the pressure-drop losses in the Stirling cycle / P.A. Rios, J. Smith // A.S.M.E., 1969. – Paper. No.69-W 69-WA/Ener.8.
4. Beale W. Small Stirling Free-Piston Engines for Cogeneration / W. Beale, G. Chen. – Sunpower, Inc., Athens, Ohio, 1992. – 4 p.
5. Компанія Viessman [Електронний ресурс] (<http://www.viessmann.ua>).

**Bibliography:**

1. Walker G. Machines that working under Stirling cycle: Transl. from English. / G. Walker. – Moscow: Energiya, 1978. – 152 p. (Rus.)
2. Finkelstein T. Design Optimization of Stirling-cycle cryogenic cooling engines, by digital simulation / T.Finkelstein, G. Walker // Cryogenic Engineering Conference. – Boulder, Colorado, USA, 1970. – Paper K4 – 1970b.
3. Rios P.A. An analytical and experimental evaluation of the pressure-drop losses in the Stirling cycle / P.A. Rios, J. Smith // A.S.M.E., 1969. – Paper. No.69-W 69-WA/Ener.8.
4. Beale W. Small Stirling Free-Piston Engines for Cogeneration / W. Beale, G. Chen. – Sunpower, Inc., Athens, Ohio, 1992. – 4 p.
5. Viessman Company [Electronic resource] (<http://www.viessmann.ua>). (Ukr.)

Рецензент: В.О. Маслов  
д-р техн. наук, проф., ДВНЗ «ПДТУ»

Стаття надійшла 31.03.2014