

УДК 621:913:621. 633

А.В. Кривошея, канд. техн. наук, В.Е. Мельник,  
А.А. Микищенко, Киев, Украина  
А.Л. Мироненко, канд. техн. наук,  
Ю.Г. Гуцаленко, Т.Е. Третьяк, Харьков, Украина

## **УНИФИКАЦИЯ ОБОЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ И ОПЕРАТОРОВ ПРИ РАЗРАБОТКЕ ОБОБЩЕННЫХ СТРУКТУРНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ФОРМОБРАЗОВАНИЯ ЗУБЧАТЫХ ЗВЕНЬЕВ**

*Запропоновано новий принцип уніфікації при позначенні параметрів та операторів, заснований на теорії відображення афінного простору, для вирішення теоретичних і технологічних задач формоутворення механічною обробкою вищих кінематичних пар. Наведено узагальнені уніфіковані математичні моделі елементів, ланок, їх рухів і процесів формоутворення.*

*Предложен новый принцип унификации при обозначении параметров и операторов, основанный на теории отображения аффинного пространства, для решения теоретических и технологических задач формообразования механической обработкой высших кинематических пар. Приведены обобщенные унифицированные математические модели элементов, звеньев, их движений и процессов формообразования.*

*Proposed a new principle of the unification of the designation of parameters and operators, based on the theory display affine space for the solution of theoretical and technological problems of forming and machining higher kinematic pairs. Generalized uniform mathematical models of the elements, links, their movements and the processes of morphogenesis.*

**Введение.** При современном уровне развития компьютерных технологий в сочетании с высокими технологиями механической обработки появляется возможность оптимального теоретического и технологического синтеза сложных высших кинематических пар. К таким высшим кинематическим парам относятся зубчатые передачи и зубчатые соединения.

По современным представлениям теоретическое и технологическое формообразование зубчатых передач определяется формообразующе-производящей системой зубчатых зацеплений [1]. Эта система включает, как теоретическое формообразование зубчатых передач исходным формообразующим телом (исходным инструментальным телом), так и их технологическое формообразование группой последовательно работающих зубообрабатывающих инструментов.

**Анализ основных достижений и литературы.** Для анализа и синтеза

взаимосвязанных процессов теоретического и технологического формообразования зубчатых передач различных классов, видов и типов необходимы следующие математические модели:

- обобщенная математическая модель множества отрезков кинематических линий, как элементов профиля зубьев зубчатых звеньев;

- обобщенная математическая модель множества исходных формообразующих профилей зубьев или впадин зубьев, состоящих из объединенных отрезков различных кинематических линий;

- обобщенная математическая модель множества контуров зубчатых звеньев, состоящих из объединенных профилей зубьев или профилей впадин зубьев;

- обобщенная математическая модель отсеков множества различных поверхностей зубьев или впадин зубьев исходного формообразующего зубчатого звена, как траектории движения исходного формообразующего профиля;

- обобщенная математическая модель отсеков поверхностей всех зубьев исходного формообразующего зубчатого звена, как объединение поверхностей всех зубьев или, как траектория движения контура исходного формообразующего зубчатого колеса;

- обобщенная математическая модель заготовки формообразуемого зубчатого звена, т.е. заготовки зубчатого колеса или заготовки инструмента при решении прямой и обратной задач формообразования [2];

- обобщенная математическая модель движения профилей зубьев, зубчатых контуров, отсеков поверхностей отдельных зубьев или поверхностей всего зубчатого венца исходного формообразующего зубчатого звена относительно заготовки формообразуемого зубчатого звена;

- обобщенная математическая модель формообразования зубчатых звеньев.

Эти математические модели, которые являются основой теоретического и технологического синтеза зубчатых передач, необходимо разрабатывать, используя современный математический аппарат.

Для разработки таких математических моделей, по нашему глубокому убеждению, наиболее рациональным является математический аппарат многопараметрических отображений аффинного пространства, развитый в приложении к теории формообразования поверхностей резанием проф. Б. А. Перепелицей его учениками [3,4]. Этот аппарат позволяет в структурном матричном виде, без вывода громоздких аналитических зависимостей, математически описывать поверхности любой сложности и их движения [3,4]. К тому же он легко реализуется на ПЭВМ во многих пакетах прикладных и графических программ – Компас, Mathlab, Mathcad, Maple, 3D-таx и др.

Сотрудничая много лет с проф. Б.А. Перепелицей и осваивая, с его помощью, методологию многопараметрических отображений, авторы убедились в простоте, универсальности и широких обобщающих возможностях аппарата многопараметрических отображений при создании обобщенных структурных математических моделей множества отрезков линий, множества исходных формообразующих профилей, множества зубчатых контуров, множества отсеков поверхностей зубьев, множества поверхностей зубчатых венцов исходных или исходных формообразующих зубчатых звеньев, множества возможных движений исходных формообразующих зубчатых звеньев относительно заготовки и, в конечном итоге, при создании обобщенных структурных унифицированных математических моделей теоретического и технологического формообразования зубчатых передач и зубообрабатывающих инструментов [5,6,7,8,9]. Такие обобщенные структурные унифицированные математические модели позволяют, систематизировать, классифицировать и создавать новые зубчатые передачи, зубообрабатывающие инструменты, способы обработки и новые компоновки зубообрабатывающих станков [9].

Однако теория отображения аффинного пространства, развитая проф. Б.А. Перепелицей в приложении к теории формообразования поверхностей резанием, до настоящего времени не приобрела широкую популярность среди научных сотрудников, инженеров, аспирантов, студентов в нашей стране и практически неизвестна за рубежом.

Одной из причин и трудностей при освоении и популяризации метода многопараметрических отображений, по нашему мнению, является отсутствие однозначности и унификации при обозначении параметров и операторов используемых при математическом описании отрезков линий, зубчатых профилей, зубчатых контуров, отсеков поверхностей зубчатых венцов зубчатых звеньев и их многопараметрических движений относительно заготовок.

**Цель исследования, постановка задачи.** Следовательно, необходимо унифицировать обозначения параметров и операторов используемых при математическом описании элементов, звеньев и процессов формообразующее-производящей системы зубчатых зацеплений. Эту цель, в приложении к теоретическому и технологическому формообразованию зубчатых передач, не претендуя на завершенность, и преследует данная статья. Такая унификация обозначений параметров и операторов облегчит и упростит разработку математических моделей задания и формообразования, как зубчатых передач, так и зубообрабатывающих инструментов.

**Материалы исследований.** Прежде всего, при многопараметрических отображениях авторы предлагают следовать следующим принципам:

1. Нумерацию систем координат при многопараметрических отображениях необходимо начинать с неподвижной системы, в которой определяется прообраз, а при формообразовании задается заготовка и этой системе координат, как неподвижной, присваивается нулевой номер [10].

2. Непрерывные отображающие операторы параллельного переноса должны действовать вдоль осей систем координат.

3. В кинематических схемах задания отрезков линий, поверхностей зубчатых венцов в каждой из систем координат может действовать один оператор вращения и один, два или три оператора параллельного переноса.

4. В кинематических схемах формообразования в каждой из систем координат может действовать один оператор вращения или один оператор параллельного переноса. Такое представление соответствует реальным процессам зубообработки и облегчает переход к координационным кодам и компоновкам зубообрабатывающих станков [9].

5. При математическом описании элементов, профилей, поверхностей зубчатых звеньев и их движений необходимо использовать матрицы 4-го порядка. Такое математическое представление (в однородных координатах) дает более компактную запись по сравнению с матрицами третьего порядка и, кроме того, одна и та же матрица пригодна для преобразования, как координат точек, так и проекций векторов [11].

Предлагаемая авторами унификация параметров и операторов заключается в следующих предложениях:

1. Все непрерывные отображающие параметры движения ( $\varphi$ ,  $l$ ) и постоянные координатные параметры ( $v$ ,  $c$ ) при отображении точки, профиля, контура, отсека поверхности зуба на кинематических схемах и во всех математических моделях должны обозначаться одними и теми же символами, но с разными верхними индексами:

– при движении точки и задании отрезков линий с верхним индексом –  $u$ ;

– при движении отрезка линии, профиля, контура и задании отсеков поверхностей зубьев с верхним индексом –  $v$ ;

– при движении профилей, контуров, отсеков поверхностей зубчатых звеньев и при формообразовании других зубчатых звеньев с верхним индексом –  $w$ ;

– постоянные координатные параметры кроме того должны иметь дополнительный верхний индекс – звездочку.

2. Каждый из параметров кроме верхних индексов должен иметь два нижних индекса обозначающих:

– для непрерывных отображающих параметров движения – обозначение оси вдоль которой или вокруг которой они действуют и номер системы координат в которой они действуют;

– для постоянных координатных параметров:

– для постоянного координатного параметра поворота ( $\nu$ ) – обозначение оси вокруг которой необходимо повернуть систему координат, из которой переходят для совмещения с одной или двумя осями системы координат, в которую переходят и номер системы координат из которой переходят к следующей системе;

– для постоянного координатного параметра ( $c$ ) – обозначение его проекции на соответствующую координатную ось и номер системы, из которой переходят к следующему реперу.

3. Дискретные отображающие в отличие от непрерывных при задании зубчатых звеньев, должны иметь два верхних индекса и два нижних индекса:

– верхние индексы – первый индекс - звездочка обозначает, что параметр дискретный и второй индекс - буква П-для дискретного переноса или вращения отрезка (т.е. для задания профиля), буква К – для дискретного переноса или вращения профиля зуба (т.е. для задания контура), буквы ЗЗ – для дискретного переноса или вращения поверхности зуба или впадины зуба;

– нижние индексы обозначают ось, вдоль или вокруг которой действует дискретный оператор поворота или переноса и номер репера, в котором он действует.

**Результаты исследований.** Следуя выше представленным предложениям для математического описания элементов, звеньев и процессов формообразующе-производящей системы зубчатых зацеплений авторы предлагают следующую систему обозначений параметров и операторов:

$c_{xi}^{*u}, c_{yi}^{*u}, c_{zi}^{*u}$  – проекции постоянного вектора  $c$ , которые определяют координаты начала координат  $i$ -ой системы координат в  $i-1$  системе координат при непрерывном отображении точки и переходе от  $i$ -ой к  $i-1$ -ой системе координат, т.е. при задании отрезка линии;

$c_{xi}^{*v}, c_{yi}^{*v}, c_{zi}^{*v}$  – проекции постоянного вектора  $c$ , которые определяют координаты начала координат  $i$ -ой системы координат в  $i-1$ -ой системе координат при непрерывном отображении отрезка линии или профиля и переходе от  $i$ -ой к  $i-1$ -ой системе координат, т.е. при задании отсека поверхности зуба;

$c_{xi}^{*w}, c_{yi}^{*w}, c_{zi}^{*w}$  – проекции постоянного вектора  $c$ , которые определяют координаты начала координат  $i$ -ой системы координат в  $i-1$ -ой системе координат при непрерывном отображении профиля, контура, отсека поверхности зуба или поверхности зубчатого звена в процессе формообразования и переходе от  $i$ -ой к  $i-1$ -ой системе координат;

$V_{xi}^{*u}, V_{yi}^{*u}, V_{zi}^{*u}$  – постоянные углы поворота  $i$ -ой системы координат вокруг

соответствующих осей  $X_i, Y_i, Z_i$  до совмещения направления ее осей с осями  $i-1$ -ой системы координат при отображении точки при задании отрезков линий и переходе от  $i$ -ой к  $i-1$ -ой системе координат;

$V_{xi}^{*v}, V_{yi}^{*v}, V_{zi}^{*v}$  – постоянные углы поворота  $i$ -ой системы координат вокруг

соответствующих осей  $X_i, Y_i, Z_i$  до совмещения направления ее осей с осями  $i-1$ -ой системы координат при отображении отрезка, профиля или контура при задании отсека поверхности и переходе от  $i$ -ой к  $i-1$ -ой системе координат;

$V_{xi}^{*w}, V_{yi}^{*w}, V_{zi}^{*w}$  – постоянные углы поворота  $i$ -ой системы координат вокруг

соответствующих осей  $X_i, Y_i, Z_i$  до совмещения направления ее осей с осями  $i-1$ -ой системы координат при отображении, профиля, контура, отсека поверхности зуба, поверхности зубчатого венца в процессе формообразования и переходе от  $i$ -ой к  $i-1$  системе координат;

$\varphi_{xi}^u, \varphi_{yi}^u, \varphi_{zi}^u$  – параметры вращения при отображении точки в  $i$ -ой системе

координат вокруг соответствующих осей  $X_i, Y_i, Z_i$  при задании отрезка линии;

$\varphi_{xi}^v, \varphi_{yi}^v, \varphi_{zi}^v$  – параметры вращения при отображении отрезка линии,

профиля или контура в  $i$ -ой системе координат вокруг соответствующих осей  $X_i, Y_i, Z_i$  при задании отсека поверхности;

$\varphi_{xi}^w, \varphi_{yi}^w, \varphi_{zi}^w$  – параметры вращения при отображении профиля, зубчатого

контура, отсека поверхности зуба или поверхности всего зубчатого звена в  $i$ -ой системе координат вокруг соответствующих осей  $X_i, Y_i, Z_i$  в процессе формообразования;

$l_{xi}^u, l_{yi}^u, l_{zi}^u$  – параметры параллельного переноса при отображении точки в  $i$ -

ой системе координат вдоль соответствующих осей  $X_i, Y_i, Z_i$  при задании отрезка линии;

$l_{xi}^v, l_{yi}^v, l_{zi}^v$  – параметры параллельного переноса при отображении отрезка

или профиля линии в  $i$ -ой системе координат вдоль соответствующих осей  $X_i, Y_i, Z_i$  при задании отсека поверхности;

$l_{xi}^w, l_{yi}^w, l_{zi}^w$  – параметри параллельного переноса при отображении профиля, зубчатого контура, отсека поверхности зуба или поверхности всего зубчатого звена в  $i$ -ой системе координат вокруг соответствующих осей  $X_i, Y_i, Z_i$  в процессе формообразования;

$l_{xi}^{*\Pi}, \varphi_{zi}^{*\Pi}$  – обозначение дискретных параметров вращения и параллельного переноса вдоль оси  $X_i$  или вокруг оси  $Z_i$  при задании плоского профиля в  $i$ -ой системе координат;

$l_{xi}^{*K}, \varphi_{zi}^{*K}$  – обозначение дискретных параметров вращения и параллельного переноса вдоль оси  $X_i$  или вокруг оси  $Z_i$  при задании плоского контура в  $i$ -ой системе координат;

$l_{xi}^{*33}, \varphi_{zi}^{*33}$  – обозначение дискретных параметров вращения и параллельного переноса вдоль оси  $X_i$  или вокруг оси  $Z_i$  при задании всей поверхности зубчатого венца в  $i$ -ой системе координат;

$m_{\varphi_{xi}^u}, m_{\varphi_{yi}^u}, m_{\varphi_{zi}^u}, m_{l_{xi}^u}, m_{l_{yi}^u}, m_{l_{zi}^u}$  – отображающие операторы движения в матричном виде при задании отрезка линии;

$m_{\varphi_{xi}^v}, m_{\varphi_{yi}^v}, m_{\varphi_{zi}^v}, m_{l_{xi}^v}, m_{l_{yi}^v}, m_{l_{zi}^v}$  – отображающие операторы движения в матричном виде при задании отсека поверхности зуба;

$m_{\varphi_{xi}^w}, m_{\varphi_{yi}^w}, m_{\varphi_{zi}^w}, m_{l_{xi}^w}, m_{l_{yi}^w}, m_{l_{zi}^w}$  – отображающие операторы движения в матричном виде при формообразовании зубчатых звеньев.

$m_{v_{xi}^{*u}}, m_{v_{yi}^{*u}}, m_{v_{zi}^{*u}}, m_{c_{xi}^{*u}}, m_{c_{yi}^{*u}}, m_{c_{zi}^{*u}}$  – координатные операторы в матричном виде при задании отрезка линии;

$m_{v_{xi}^{*v}}, m_{v_{yi}^{*v}}, m_{v_{zi}^{*v}}, m_{c_{xi}^{*v}}, m_{c_{yi}^{*v}}, m_{c_{zi}^{*v}}$  – координатные операторы в матричном виде при задании отсека поверхности;

$m_{v_{xi}^{*w}}, m_{v_{yi}^{*w}}, m_{v_{zi}^{*w}}, m_{c_{xi}^{*w}}, m_{c_{yi}^{*w}}, m_{c_{zi}^{*w}}$  – координатные операторы в матричном виде при формообразовании зубчатых звеньев.

$m_{r_{Ai}}$  – матричное уравнение (однородные координаты) точки А в  $i$ -ой системе координат;

$m_{r_{ji}}$  – матричное уравнение отрезка линии в  $i$ -ой системе координат;

$m_{r_{лji}}$  – матричное уравнение отрезка линии в системе координат профиля;

$m_{r_{ni}}$  – матричное уравнение (оператор) профиля зуба или профиля впадины зуба состоящего из объединенных отрезков различных линий в  $i$ -ой системе координат;

$m_{r_{пз0}}$  – матричное уравнение (оператор) профиля заготовки в 0-ой системе координат;

$m_{r_{кi}}$  – матричное уравнение (оператор) контура зубчатого звена состоящего из объединенных профилей в  $i$ -ой системе координат;

$m_{r_{зi}}$  – матричное уравнение (оператор) поверхности зуба или поверхности впадины зуба исходного формообразующего зубчатого звена в  $i$ -ой системе координат;

$m_{r_{зз}}$  – матричное уравнение (оператор) всей поверхности зубчатого венца исходного формообразующего зубчатого звена в  $i$ -ой системе координат;

$m_{r_{пз0}}$  – матричное уравнение поверхности заготовки зубчатого венца формообразуемого зубчатого звена в 0-ой системе координат;

$m_{r_{п0} \text{ И / Д}}$  – матричное уравнение движения профиля зуба или профиля впадины зуба, состоящего из объединенных отрезков различных линий в системе координат заготовки при формообразовании;

$m_{r_{к0} \text{ И / Д}}$  – матричное уравнение движения контура зубчатого звена состоящего из объединенных профилей в системе координат заготовки при формообразовании;

$m_{r_{з0} \text{ И / Д}}$  – матричное уравнение движения поверхности зуба или поверхности впадины зуба исходного формообразующего зубчатого звена в системе координат заготовки при формообразовании;

$m_{r_{зз0} \text{ И / Д}}$  – матричное уравнение движения поверхности зубчатого венца исходного формообразующего зубчатого звена в системе координат заготовки при формообразовании;

$m_{r_{n0}}$  – матричное уравнение вектора единичной нормали в каждой точке поверхности зубчатого звена в системе координат заготовки;

$m_{r_{v0}}$  – матричное уравнение, аналога вектора относительной скорости точки поверхности зубчатого звена, в системе координат заготовки;

$m_s$  – оператор симметрии;

$m_E = \text{diag}(1,1,1,1)$  – матрица отсутствующих координатных преобразований или единичная матрица.



С использованием предлагаемой системы обозначений можно унифицировать матричное представление операторов движения и операторов координатных преобразований (табл.).

Таблица – Представление в матричном виде унифицированных операторов движения и операторов координатных преобразований при отображении формообразующего звена в процессе формообразования

$m_{\varphi_{xi}}^w$	$m_{\varphi_{yi}}^w$	$m_{\varphi_{zi}}^w$
$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_{xi}^w & -\sin \varphi_{xi}^w & 0 \\ 0 & \sin \varphi_{xi}^w & \cos \varphi_{xi}^w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \cos \varphi_{yi}^w & 0 & \sin \varphi_{yi}^w & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_{yi}^w & 0 & \cos \varphi_{yi}^w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \cos \varphi_{zi}^w & -\sin \varphi_{zi}^w & 0 & 0 \\ \sin \varphi_{zi}^w & \cos \varphi_{zi}^w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$
$m_{l_{xi}}^w$	$m_{l_{yi}}^w$	$m_{l_{zi}}^w$
$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & l_{xi}^w \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_{yi}^w \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_{zi}^w \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$
$m_{v_{xi}}^{*w}$	$m_{v_{yi}}^{*w}$	$m_{v_{zi}}^{*w}$
$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos v_{xi}^{*w} & \sin v_{xi}^{*w} & 0 \\ 0 & -\sin v_{xi}^{*w} & \cos v_{xi}^{*w} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \cos v_{yi}^{*w} & 0 & -\sin v_{yi}^{*w} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin v_{yi}^{*w} & 0 & \cos v_{yi}^{*w} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} \cos v_{zi}^{*w} & \sin v_{zi}^{*w} & 0 & 0 \\ -\sin v_{zi}^{*w} & \cos v_{zi}^{*w} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$
$m_{c_{xi}}^{*w}$	$m_{c_{yi}}^{*w}$	$m_{c_{zi}}^{*w}$
$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & c_{xi}^{*w} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & c_{yi}^{*w} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c_{zi}^{*w} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Изменяя только индексы при параметрах движения и параметрах преобразования координат (т.е. меняя индекс  $w$  на индексы  $u$  или  $v$ ) мы получим матрицы при отображении точки и при задании отрезка линии, профиля или контура при задании отсека зуба.

Параметры  $\varphi_{xi}^w, \varphi_{yi}^w, \varphi_{zi}^w$  считаются положительными, когда поворот осуществляется против часовой стрелки, если смотреть с вершины соответствующей оси. Параметры  $l_{xi}^w, l_{yi}^w, l_{zi}^w$  считаются положительными, если движение осуществляется в положительном направлении соответствующей оси. Параметры  $c_{xi}^{*w}, c_{yi}^{*w}, c_{zi}^{*w}$  – определяют координаты центра  $i$ -ой системы координат  $i$ -1-ой системе координат при переходе от  $i$ -ой к  $i$ -1-ой системе. Параметры  $v_{xi}^{*w}, v_{yi}^{*w}, v_{zi}^{*w}$  считаются положительными, если старую систему ( $i$ -ю) координат до совмещения с новой ( $i$ -1-ой) поворачивают вокруг соответствующей оси против часовой стрелки.

Можно унифицировать комбинации операторов координатных преобразований соответствующих возможным вариантам относительного расположения соседних систем координат [7].

С использованием предложенных обозначений унифицированных параметров и операторов можно записать обобщенные унифицированные математические модели элементов, звеньев, их движений и процессов формообразования.

Так множество отрезков различных плоских кинематических линий отрезки которых могут быть элементами различных профилей зубьев задается обобщенным структурным унифицированным матричным уравнением в системе XYZ (000) в виде [5]:

где,  $i = 1,2,3$  – номер отображения;  $K_{xi}^u, K_{yi}^u, K_{zi}^u$  – коэффициенты пропорциональности в уравнениях связи (последние три уравнения). Матрица  $m_{E0}$  означает, что первая и нулевая системы совпадают.

$$\left\{ \begin{array}{l} m_{r10} = m_{E0} m_{\varphi_{z1}^u l_{x1}^u l_{y1}^u} m_{c_{y2}^u} m_{\varphi_{z2}^u l_{x3}^u l_{y3}^u} m_{c_{y3}^u} m_{\varphi_{z3}^u l_{x3}^u l_{y3}^u} m_{rA3} \\ 0 \leq \varphi_{z3}^u \leq 2\pi n \\ l_{xi}^u = K_{li}^u \varphi_{z3}^u \\ l_{yi}^u = K_{lyi}^u \varphi_{z3}^u \\ \varphi_{zi}^u = K_{\varphi_{zi}^u} \varphi_{z3}^u \end{array} \right. \quad (1)$$

Используя отрезки линий как составные элементы исходного формообразующего профиля заданные в системе координат профиля обобщенное унифицированное матричное уравнение плоского профиля запишется следующим образом [ 6]:

$$m_{r_{ni}} = m_{r_{лп1}} \cup m_{r_{лп2}} \cup \dots \cup m_{r_{лп3}} \dots \cup m_{r_{лпK}} \quad (2)$$

где,  $\cup$  – знак объединения;

$K$  – количество элементов ИФП (количество различных отрезков кинематических линий).

При симметричном относительно оси профиле матричное уравнение плоского профиля запишется в виде:

$$m_{r_{ni}} = m_S m_{r_{лп1}} \cup m_{r_{лп1}} \cup \dots \cup m_{r_{лп3}} \dots \cup m_{r_{лпK}} \quad (3)$$

Для конкретного задания профиля необходимо задать базис профиля, т.е. координаты точек стыка (объединения) элементов профиля. К уравнению (2) также необходимо добавить условия объединения отрезков в каждой точке базиса профиля (совпадение или не совпадение нормалей и равенство или не равенство радиусов кривизны в точке объединения отрезков) [6].

Плоские: реечные и дисковые контура с постоянным шагом задаются объединением плоских ИФП вдоль делительных линий. Такое объединение является частным случаем аффинных отображений при дискретном изменении параметра движения ИФП и математически запишется следующим образом [8]:

а) для прямолинейных реечных контуров:

$$m_{r_{k,i}} = m_{r_{ni}} \cup m_{l_{xi}^{*K}} m_{r_{ni}} \cup m_{2l_{xi}^{*K}} m_{r_{ni}} \dots \cup m_{il_{xi}^{*K}} m_{r_{ni}} \dots \cup m_{(z-1)l_{xi}^{*K}} m_{r_{ni}} \quad (4)$$

б) для круговых дисковых контуров:

$$m_{r_{k,i}} = m_{r_{ni}} \cup m_{\varphi_{zi}^{*K}} m_{r_{ni}} \cup m_{2\varphi_{zi}^{*K}} m_{r_{ni}} \dots \cup m_{i\varphi_{zi}^{*K}} m_{r_{ni}} \dots \cup m_{(z-1)\varphi_{zi}^{*K}} m_{r_{ni}} \quad (5)$$

где,  $z$  – число зубьев контура;

$l_{xi}^{*K}$ ,  $\varphi_{zi}^{*K}$  – дискретные параметры движения профиля, которые численно равны соответственно линейному и угловому шагу контуров.

С достаточным для практики числом отображений обобщенная унифицированная математическая модель отсека поверхности зуба или впадины зуба зубчатых венцов исходных формообразующих зубчатых звеньев различных классов, видов и типов в матричном виде запишется следующим образом [7]:

$$\begin{cases} m_{r_{ni}} = m_{\varphi_1^v} m_{v_2^v c_2^v} m_{\varphi_2^v} m_{r_{n1}} \\ \varphi_{3A}^v \leq \varphi_3^v \leq \varphi_{3B}^v \\ l_i^v = f_{l_i^v}(\varphi_3^v) \\ \varphi_i^v = f_{\varphi_i^v}(\varphi_3^v) \end{cases} \quad (6)$$

где,  $\varphi_i^v, l_i^v$  – параметры движения профиля,  $v_i^{*v}, c_i^{*v}$  – координатные параметры.

Эта же обобщенная математическая модель задает и описывает поверхности заготовок формообразуемых звеньев, если вместо профиля поставить образующую плоского осевого сечения заготовки [9].

Поверхность зубчатой рейки или зубчатого колеса с постоянным шагом задаются объединением поверхностей всех зубьев. Такое объединение является частным случаем аффинных отображений при дискретном изменении параметра движения поверхности зуба вдоль делительной поверхности и математически запишется следующим образом:

а) поверхность зубчатой рейки:

$$m_{r_{33}} = m_{r_3} \cup m_{l_{xi}^{*33}} m_{r_3} \cup m_{2l_{xi}^{*33}} m_{r_3} \dots \cup m_{il_{xi}^{*33}} m_{r_3} \dots \cup m_{(z-1)l_{xik}^{*33}} m_{r_3} \quad (7)$$

б) поверхность зубчатого колеса :

$$m_{r_{33}} = m_{r_3} \cup m_{\varphi_{z1}^{*33}} m_{r_3} \cup m_{2\varphi_{z1}^{*33}} m_{r_3} \dots \cup m_{i\varphi_{z1k}^{*33}} m_{r_3} \dots \cup m_{(z-1)\varphi_{z1k}^{*33}} m_{r_3} \quad (8)$$

где,  $z$  – число зубьев контура;

$l_{xii}^{*33}, \varphi_{zii}^{*33}$  – дискретные параметры движения поверхности зуба, которые численно равны соответственно линейному и угловому шагу звеньев.

Обобщенная математическая модель движения профилей, зубчатых контуров, отсеков поверхностей отдельных зубьев или поверхностей зубчатого венца исходного формообразующего зубчатого звена относительно заготовки формообразуемого зубчатого звена может быть представлена в виде [8]:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_{r_{33}0 \text{ И } / \text{ Д}} = m_{v_1 c_1^{*w}} m_{\varphi_{z1}^{*w}} m_{v_2 c_2^{*w}} m_{\varphi_{z2}^{*w}} m_{v_3 c_3^{*w}} m_{\varphi_{z3}^{*w}} m_{v_4 c_4^{*w}} m_{\varphi_{z4}^{*w}} \\ m_{v_5 c_5^{*w}} m_{\varphi_{z5}^{*w}} m_{v_6 c_6^{*w}} m_{\varphi_{z6}^{*w}} m_{r_{33}6} \\ \varphi_{1A}^u \leq \varphi_1^u \leq \varphi_{1A}^u \\ \varphi_{1A}^v \leq \varphi_1^v \leq \varphi_{1B}^v \\ \varphi_{z6A}^w \leq \varphi_{z6}^w \leq \varphi_{z6B}^w \\ \varphi_{zi}^w = f_{\varphi_{zi}^w}(\varphi_{z6}^w) \\ l_{zi}^w = f_{l_{zi}^w}(\varphi_{z6}^w) \end{array} \right. \quad (9)$$

где,  $m_{v_i c_i}$  – одно из произведений матриц координатных преобразований [8].

Каждому из этих произведений можно присвоить код и тогда можно пользоваться этим кодом как одним оператором.

Используя частные случаи этой модели можно математически описать практически все кинематические схемы формообразования зубчатых колес

разных классов, видов и типов [8].

Обобщенная математическая модель формообразования зубчатых звеньев разных классов, видов и типов в общем случае при двухпараметрическом огибании запишется в виде [9].

$$\left\{ \begin{array}{l} m_{r330} H / D = m_{V_{y1}}^{*w} m_{c_{y1}}^{*w} m_{V_{x1}}^{*w} m_{\varphi_{z1}}^w m_{\ell_{z1}}^w m_{V_{y2}}^{*w} m_{c_{y2}}^{*w} m_{V_{x2}}^{*w} m_{\varphi_{z2}}^w m_{\ell_{z2}}^w m_{V_{y3}}^{*w} \cdot \\ \cdot m_{c_{y3}}^{*w} m_{V_{x3}}^{*w} m_{\varphi_{z3}}^w m_{\ell_{z3}}^w m_{V_{y4}}^{*w} m_{c_{y4}}^{*w} m_{V_{x4}}^{*w} m_{\varphi_{z4}}^w m_{\ell_{z4}}^w m_{V_{y5}}^{*w} \cdot \\ \cdot m_{c_{y5}}^{*w} m_{V_{x5}}^{*w} m_{\varphi_{z5}}^w m_{\ell_{z5}}^w m_{V_{y6}}^{*w} m_{c_{y6}}^{*w} m_{V_{x6}}^{*w} m_{\varphi_{z6}}^w m_{\ell_{z6}}^w m_{r336} \\ \varphi_{z6A}^w \leq \varphi_{z6}^w \leq \varphi_{z6B}^w \\ \varphi_{zi}^w = f_{\varphi_{zi}^w}(\varphi_{z6}^w) \\ l_{zi}^w = f_{l_{zi}^w}(\varphi_{z6}^w) \\ m_{r_{n0}} m_{r_{v0}} = 0 \text{ при } \varphi_{z6}^w = const \\ m_{r_{m0}} m_{r_{v0}} = 0 \text{ при } \varphi_{zi}^w = const \end{array} \right. \quad (10)$$

Математическая модель формообразования (9) не всегда определяет полный формообразуемый профиль. Для определения формообразуемого профиля с учетом всех особенностей, а именно с учетом формообразования особой точкой излома или с учетом подрезания и пересечения смежных поверхностей эту математическую модель необходимо дополнить логической частью. Логическая часть теоретической модели формообразования определяется алгоритмом расчета переходных кривых образованных особыми точками излома, а также особых точек формообразуемого зубчатого звена получаемых в результате подрезания [12].

В дальнейшем эти математические модели необходимо программно реализовать отдельным пакетом или интегрировать в пакет «КОМПАС» в рамках договора о творческом содружестве с ООО «АСКОН-КР».

### **Общие выводы:**

1. Представлена унифицированная система обозначений параметров и операторов при многопараметрических отображениях точки, отрезка линии, отсека поверхности в приложении к решению вопросов задания и формообразования зубчатых передач и зубчатых соединений.

2. Приведены с учетом унификации обозначений обобщенные унифицированные структурные матричные уравнения множества отрезков различных линий, множества плоских профилей состоящих из объединенных отрезков различных линий, множества плоских контуров состоящих из объединенных профилей, множества поверхностей зубьев зубчатых звеньев, математических моделей формообразования зубчатых звеньев различных классов, типов и видов.

**Список использованных источников:** 1. *Кривошея А.В., Данильченко Ю.М.* Обобщенная унифицированная математическая модель формообразования звеньев системы зубчатых зацеплений. Сб. Сучасні процеси механічної обробки з НТМ та якість поверхні деталей машин. (Серія 1 «Процеси механічної обробки, верстати та інструменти») НАН України ІНМ ім. В.М. Бакуля.- Київ, 2006.- С.169-180. 2. *Родин П.Р.* Основы формообразования поверхностей резанием. – Киев: Вища школа, 1981. – 152 с. 3. *Перепелица Б.А.* Отображения аффинного пространства в теории формообразования поверхностей резанием. — Харьков: Вища шк. 1981-152с. 4. *Грабченко А.И., Кондусова Е.Б.* и др. 3D-Моделирование инструментов, формообразования и съема припуска при обработке резанием. – Харьков, 2001. – 302 с. 5. *Кривошея А.В., Пасичный О.О.* и др. Математическое описание и классификация плоских кинематических линий с позиции многопараметрического отображения аффинного пространства. //Межд. научн.-техн. Сборник. – Кировоград: Изд-во КГТУ, 2003. Вып. 13. – С. 43-47. 6. *Кривошея А.В., Петасюк О.У.* и др. Методика задания и математического описания исходных формообразующих профилей. // Сверхтвердые материалы. – Киев. – 2004. – Вып. 1. – С. 52-65. 7. *Кривошея А.В., Данильченко Ю.М.* и др. Задание, математическое описание и методика исследования поверхностей зубчатых венцов исходных формообразующих зубчатых звеньев. Резание и инструмент в технологических системах: Межд. научн.-техн. сборник. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2008 – Вып. 75. – 488 с. С.177-195. 8. *Кривошея А.В., Данильченко Ю.М.* и др. Обобщенная классификация кинематических схем формообразования зубчатых колес. Високі технології в машинобудуванні: Збірник наукових праць. НТУ «ХПБ». – Харків. 2006.-Вип.2 (36). с. 48-69. 9. *Кривошея А.В., Данильченко Ю.М.* и др. Совершенствование обобщенной унифицированной математической модели формообразования и обработки зубчатых колес. С. 46-51. «Оборудование и инструмент для профессионалов», международный информационно-технический журнал № 4 /127/ 2010. – 120 с. 10. *Решетов Д.Н., Портман В.Т.* Точность металлорежущих станков. – М.: Машиностроение, 1986. – 336 с. 11. *Литвин Ф.Л.* Теория зубчатых зацеплений. – М.: Наука, 1968. – 584 с. 12. *А.В. Кривошея, В.Е. Мельник* и др. Особенности прямого и обратного формообразования эвольвентных цилиндрических зубчатых колес с модифицированным профилем у вершины зуба. С. 80-88. Вісник Національного Технічного університету «ХПБ». Збірник наукових праць. – Харків: НТУ «ХПБ», 2012. – № 36. – 186 с.

*Поступила в редколлегию 25.11.2013*