

УДК 621.923

В. И. Полянский, канд. техн. наук, Харьков, Украина

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕПЛОВОГО ПРОЦЕССА ПРИ ШЛИФОВАНИИ МАТЕРИАЛОВ

Запропоновано нові спрощені аналітичні рішення щодо визначення температури шліфування та глибини проникнення тепла в поверхневий шар оброблюваної деталі, при досягненні якої температура дорівнює нулю. Ці рішення відкривають нові технологічні можливості пошуку оптимальних умов шліфування, що забезпечують підвищення якості та продуктивності обробки. Наведено приклади розрахунку оптимальних параметрів режиму шліфування за температурним критерієм.

Ключові слова: шліфування, тепловий процес, тепловий потік, температура шліфування, продуктивність обробки, режим шліфування, математична модель

Предложены новые упрощенные аналитические решения по определению температуры шлифования и глубины проникновения тепла в поверхностный слой обрабатываемой детали, при достижении которой температура равна нулю. Эти решения открывают новые технологические возможности поиска оптимальных условий шлифования, обеспечивающих повышение качества и производительности обработки. Приведены примеры расчета оптимальных параметров режима шлифования по температурному критерию.

Ключевые слова: шлифование, тепловой процесс, тепловой поток, температура шлифования, производительность обработки, режим шлифования, математическая модель

New simplified analytical solutions are proposed for determining the temperature of grinding and the depth of penetration of heat into the surface layer of the workpiece, upon reaching which the temperature is zero. These solutions open up new technological opportunities for searching for optimal grinding conditions that improve the quality and productivity of processing. Examples are given of calculating the optimum parameters of the grinding mode according to the temperature criterion.

Keywords: grinding, thermal process, heat flow, grinding temperature, processing capacity, grinding mode, mathematical fashion

Постановка проблеми. Процес шліфування характеризується високою тепловою напруженістю, що приводить до виникненню на оброблюваних поверхностях деталей температурних дефектів. Як показує практика, основною причиною підвищення температури шліфування є висока енергоємність процесу в зв'язі з інтенсивним трінням в зоні різання і відносно низькою режущою здатністю круга. Тому ефективно застосовувати прогресивні методи прерывистого і алмазного шліфування, імпрегніровані і високопористі абразивні круги, забезпечуючі зменшення енергоємності обробки і температуру шліфування. Однак в повній мірі вирішити проблему їх зниження при шліфуванні не вдається, що негативно сказується на якості оброблюваних поверхностей і вимагає зменшення продуктивності обробки, особливо при шліфуванні таких труднооброблюваних матеріалів як тверді сплави, зносостійкі

наплавки и покрытия, алмазы, ферриты и т.д. В связи с этим важно провести теоретический анализ параметров теплового процесса при шлифовании и определить условия уменьшения температуры шлифования.

2. Анализ последних исследований и публикаций. Проблеме снижения тепловой напряженности процесса шлифования и определения условий уменьшения температуры шлифования в научно-технической литературе уделено достаточно большое внимание [1–3]. На основе решения дифференциального уравнения теплопроводности раскрыты закономерности формирования температуры шлифования [3]. Однако полученные аналитические решения обладают существенным недостатком – в поверхностном слое обрабатываемой детали температура не достигает нулевого значения, она лишь асимптотически приближается к нему. Это не позволяет установить истинную глубину проникновения тепла в поверхностный слой обрабатываемой детали, т.е. установить толщину нарушенного (или дефектного) слоя, образующегося от действия теплового источника. Поэтому настоящая работа направлена на устранение этого недостатка – аналитического определения условий уменьшения температуры шлифования с учетом достижения нулевого значения температуры в поверхностном слое обрабатываемой детали, что является новым направлением в теплофизике шлифования.

3. Цель исследования. Теоретическое обоснование условий повышения качества и производительности обработки при шлифовании на основе уменьшения температуры шлифования.

4. Анализ дифференциального уравнения теплопроводности и условия его упрощения. Профессор Якимов А. В. в работе [3] показал, что при шлифовании расчет температуры резания можно производить на основе упрощенной расчетной схемы, представляя снимаемый припуск пакетом элементарных прямолинейных адиабатических стержней, по которым уходит тепло из зоны резания вглубь поверхностного слоя обрабатываемой детали (рис. 1).

В итоге задача сводится к определению закона распределения температуры вдоль адиабатического стержня, на торце которого (в зоне контакта шлифовального круга с обрабатываемым материалом) действует тепловой источник с плотностью q в течении времени τ . Решить эту задачу можно, используя уравнение теплопроводности, которое было получено Фурье [4] путем выделения в рассматриваемом теле элементарного куба, грани которого параллельны координатным плоскостям (рис. 2). Суть расчета состоит в следующем. Количество тепла, проходящее через левую грань

справа налево за промежуток времени $\Delta\tau$, равно: $\lambda \cdot \frac{\partial\theta}{\partial x}(x, y, z, \tau) \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta\tau$,

где λ – коэффициент теплопроводности материала, Вт/(м·град); θ –

температура тела в точке с координатами x, y, z , град.; $q = -\lambda \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x}(x, y, z, \tau)$
 – плотность теплового потока, Вт/м²; τ – время, с; $\Delta y \cdot \Delta z$ – площадь грани куба, м².

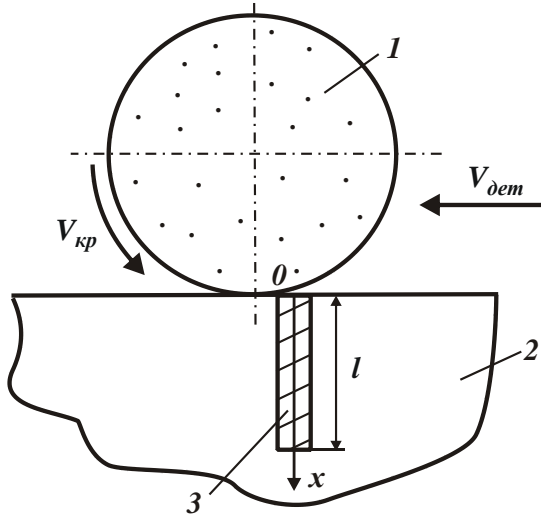


Рисунок 1 – Расчетная схема температуры шлифования:
 1 – круг; 2 – деталь; 3 – адиабатический стержень

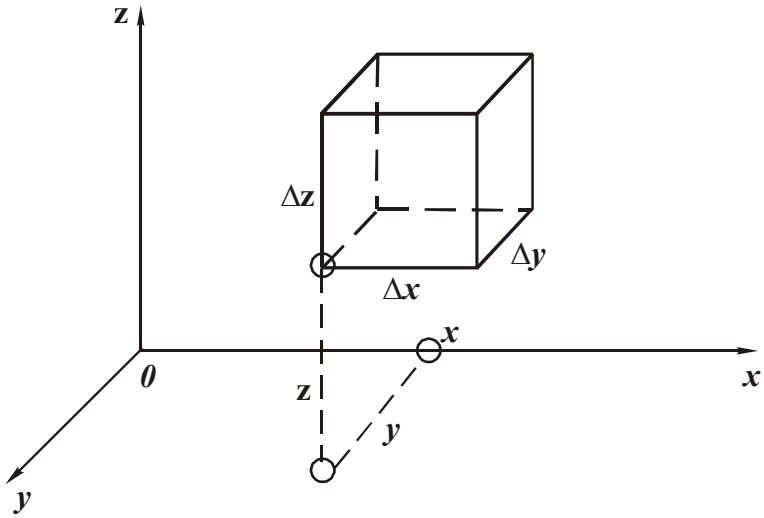


Рисунок 2 – Положение элементарного куба в координатных плоскостях

Количество тепла, проходящее через правую грань куба справа налево, равно: $\lambda \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x}(x + \Delta x, y, z, \tau) \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta \tau$.

Количество тепла, вошедшее в куб через левую и правую грани:

$$\lambda \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x}(x + \Delta x, y, z, \tau) \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta \tau - \lambda \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x}(x, y, z, \tau) \times \\ \times \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta \tau \approx \lambda \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}(x, y, z, \tau) \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta \tau. \quad (1)$$

Общее количество тепла, вошедшее в куб за время $\Delta \tau$ через все грани:

$$\lambda \cdot \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta \tau. \quad (2)$$

Количество тепла, необходимое для нагревания элементарного куба до температуры θ за время $\Delta \tau$, равно: $c \cdot \rho \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta \tau$, где c – удельная теплоемкость материала, Дж/(кг·град); ρ – плотность материала, кг/м³.

Сравнивая эти величины, получено уравнение теплопроводности, представляющее собой линейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка с учетом $a^2 = \lambda / (c \cdot \rho)$:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = a^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right). \quad (3)$$

Применительно к рассматриваемому случаю (в одномерной постановке) для упрощения расчетов можно в первом приближении не учитывать количество тепла, проходящее через левую грань справа налево за промежуток времени $\Delta \tau$. Тогда количество тепла, проходящее через правую грань куба справа налево, следует рассматривать в виде:

$\lambda \cdot \frac{d\theta}{dx}(x, y, z, \tau) \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta \tau$, а количество тепла, затрачиваемое на нагревание адиабатического стержня, – соответственно в виде:

$c \cdot \rho \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \int_0^x \theta \cdot dx$. Сравнивая эти величины, согласно закона сохранения энергии, получено уравнение:

$$\lambda \cdot \frac{d\theta}{dx} \cdot \Delta t = c \cdot \rho \cdot \int_0^x \theta \cdot dx. \quad (4)$$

После дифференцирования обоих слагаемых по координате x , имеем:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - \alpha \cdot \theta = 0, \quad (5)$$

$$\text{где } \alpha = \frac{c \cdot \rho}{\lambda \cdot \Delta \tau}.$$

В результате получено дифференциальное линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами без правой части. Оно соответствует уравнению (3) в одномерной постановке при условии $\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\theta}{\tau}$.

Его решение [4]:

$$\theta = C_1 \cdot e^{\sqrt{\alpha} \cdot x} + C_2 \cdot e^{-\sqrt{\alpha} \cdot x}, \quad (6)$$

где C_1, C_2 – постоянные интегрирования.

Для определения C_1 и C_2 необходимо использовать граничные условия:

$$\left. \frac{d\theta}{dx} \right|_{x=0} = -\frac{q}{\lambda}; \quad \theta|_{x \rightarrow \infty} = 0. \quad (7)$$

Подчиняя этим граничным условиям решение уравнения (6), имеем:

$$\theta = q \cdot \sqrt{\frac{\tau}{c \cdot \rho \cdot \lambda}} \cdot e^{-\sqrt{\frac{c \cdot \rho}{\lambda \cdot \tau}} \cdot x}. \quad (8)$$

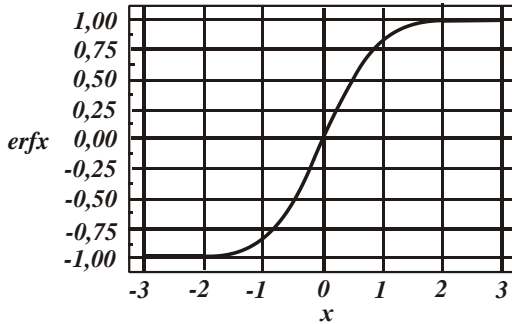
Как видно, по мере удаления от торца адиабатического стержня, т.е. от места действия теплового источника плотностью q , температура θ непрерывно уменьшается по экспоненциальному закону, асимптотически приближаясь к нулевому значению. Максимальная температура θ_{\max} определяется:

$$\theta_{\max} = q \cdot \sqrt{\frac{\tau}{c \cdot \rho \cdot \lambda}}. \quad (9)$$

В работе [5] приведено аналогичное решение уравнения теплопроводности (3) для одномерной системы координат (по координате x), которое решено методом интегрального преобразования и имеет вид:

$$\theta(x, \tau) = 2 \cdot a \cdot \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \cdot \frac{q}{\lambda} \cdot e^{-\frac{x^2}{4 \cdot a^2 \cdot \tau}} - \frac{q}{\lambda} \cdot x \cdot \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2 \cdot a \cdot \sqrt{\tau}} \right) \right], \quad (10)$$

где x – координата, м; τ – время, с; $\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^x e^{-t^2} \cdot dt$ – табулированная неэлементарная функция (рис. 3).

Рисунок 3 – График функции $erf x$

Используя новую безразмерную координату: $z = x / (2a \cdot \sqrt{\tau})$, преобразованная зависимость (10) примет вид:

$$\theta(z, \tau) = 2 \cdot a \cdot \sqrt{\tau} \cdot \frac{q}{\lambda} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-z^2} - z \cdot (1 - erf z) \right]. \quad (11)$$

Зависимость (10) позволяет вполне однозначно определить максимальную температуру шлифования (температуру на торце адиабатического полубесконечного стержня – в точке его контакта с шлифовальным кругом):

$$\theta_{\max} = \theta(x=0, \tau) = 2 \cdot a \cdot \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \cdot \frac{q}{\lambda} = 1,129 \cdot q \cdot \sqrt{\frac{\tau}{c \cdot \rho \cdot \lambda}}, \quad (12)$$

однако не позволяет определить истинное значение глубины z проникновения тепла в поверхностный слой обрабатываемой детали. Его можно установить лишь с наперед заданной степенью точности, например, принимая $z = 1; 1,5; 2$ и т.д. Однако, по сути, это лишено физического смысла. Поэтому для определения истинного значения глубины z проникновения тепла в поверхностный слой обрабатываемой детали необходимо использовать более приемлемый теоретический подход.

Сравнивая максимальные значения температуры θ_{\max} , определяемые зависимостями (9) и (12), видно, что они отличаются лишь числовым коэффициентом (в 1,129 раз). Это указывает на то, что предложенный в настоящей работе упрощенный теоретический подход к определению температуры θ вполне правомочен, поскольку позволяет установить температуру θ по зависимости (9), которая незначительно отличается от температуры, полученной по зависимости (12), являющейся решением уравнения теплопроводности.

На рис. 4 и в табл. 1 приведены расчетные значения температуры θ (по координате z), полученные с использованием преобразованной зависимости

(11) и зависимости (8):

$$\theta = q \cdot \sqrt{\frac{\tau}{c \cdot \rho \cdot \lambda}} \cdot e^{-2z}. \quad (13)$$

Для удобства анализа принято $a \cdot \sqrt{\tau} \cdot q / \lambda = 1$. Расхождение расчетных значений температуры θ (по координате z) незначительно, что позволяет использовать зависимости (11) и (13) для практических расчетов температуры θ .

Таблица 1 – Расчетные значения функции $\theta(z)$

z	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0
Зависимость (11)	1,129	0,5	0,182	0,051	0,016	0,0006
Зависимость (13)	1,0	0,449	0,202	0,09	0,048	0,018
Зависимость (16)	1,414	0,614	–	–	–	–

Основным недостатком полученного решения, также как и решения, описываемого зависимостями (10) и (11), является неопределенность глубины проникновения тепла в поверхностный слой обрабатываемой детали, поскольку температура θ не достигает нулевого значения, она лишь асимптотически приближается к этому значению. Это не позволяет вполне однозначно определить толщину нарушенного или дефектного поверхностного слоя обрабатываемой детали в связи с тепловым воздействием на него в процессе шлифования.

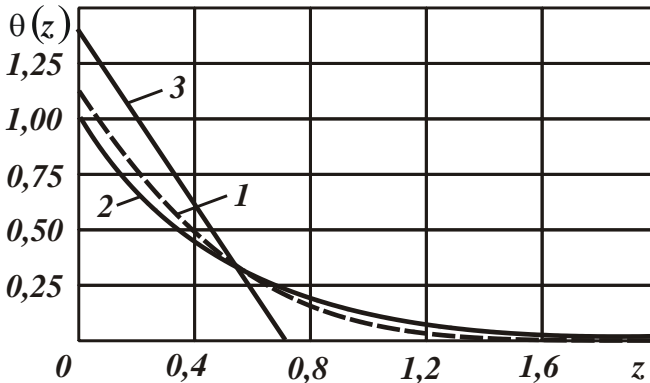


Рисунок 4 – Графики функции $\theta(z)$: 1 – расчет по зависимости (11); 2 – расчет по зависимости (13); 3 – расчет по зависимости (16)

5. Упрощенный расчет параметров теплового процесса при шлифовании. Решить данную задачу можно на основе упрощенного

представления расчетной схемы плоского шлифования, например, рассматривая в уравнении (4) величину $d\theta = \theta_n - \theta_k$, где θ_n , θ_k – начальное и конечное значения температуры, принимая для упрощения расчетов $\theta_k = 0$ и $\theta_n = \theta$.

Аналогично можно представить $dx = l_2$, где l_2 – глубина проникновения тепла в поверхностный слой обрабатываемой детали, м. Тогда вместо интеграла в уравнении (4) следует рассматривать величину $0,5 \cdot c \cdot \rho \cdot l_2 \cdot \theta$, поскольку температура θ уменьшается по линейному закону от $\theta_n = \theta$ до $\theta_k = 0$ в пределах длины l_2 (рис. 5). В результате уравнение (4) примет упрощенный вид:

$$\frac{\theta}{l_2} = 0,5 \cdot \alpha \cdot l_2 \cdot \theta \quad \text{или} \quad l_2 = \sqrt{\frac{2}{\alpha}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \lambda \cdot \tau}{c \cdot \rho}}. \quad (14)$$

Таким образом, упрощая полученное решение, удалось установить конечное значение величины l_2 . Максимальную температуру θ можно определить из упрощенной зависимости:

$$q = \lambda \cdot \frac{d\theta}{dx} = \lambda \cdot \frac{\theta_n - \theta_k}{l_2} \approx \lambda \cdot \frac{\theta}{l_2}. \quad (15)$$

Откуда

$$\theta = \frac{q \cdot l_2}{\lambda} = q \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \tau}{c \cdot \rho \cdot \lambda}}. \quad (16)$$

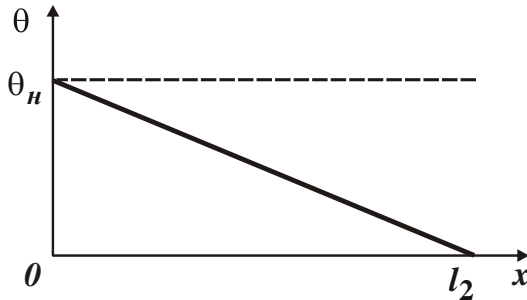


Рисунок 5 – График зависимости температуры θ от координаты x

Как видно, температура θ изменяется по закону изменения величины l_2 , т.е. чем больше l_2 , тем больше температура θ . Следовательно, уменьшить температуру θ можно уменьшением величины l_2 , фактически

исключая проникновение тепла в поверхностный слой обрабатываемой детали.

В табл. 1 и на рис. 4 представлены расчетные значения температуры θ (по координате z) для начального значения $\theta_n = \theta$, определяемого зависимостью (16), и величиной l_2 , определяемой зависимостью (14), с учетом условия $a \cdot \sqrt{\tau} \cdot q / \lambda = 1$. Безразмерная координата $z = x / (2a \cdot \sqrt{\tau})$ для $x = l_2$ равна $z = 0,7071$. При этом значении z конечное значение температуры $\theta_k = 0$. Как видно из табл. 1 и рис. 4, максимальные значения температуры θ , рассчитанные на основе зависимостей (16) и (11) отличаются незначительно, что позволяет использовать упрощенное решение (16) для практических расчетов.

Необходимо отметить, что площади, ограниченные осями координат и функциями $\theta(z)$, одинаковы для трех рассмотренных случаев, поскольку одинаково количество тепла, образующееся в процессе шлифования за заданное время τ . Как видно, чем больше максимальное значение температуры θ , тем на меньшую глубину в поверхностный слой проникает тепло. Несомненно, наиболее точным решением является случай 3, согласно которому температура θ принимает нулевое значение на некотором удалении от теплового источника l_2 . Для первых двух случаев глубина проникновения тепла в поверхностный слой обрабатываемой детали принимает бесконечное значение, что лишено физического смысла. Следовательно, для анализа параметров теплового процесса при шлифовании необходимо рассматривать случай 3 (рис. 4), который позволяет установить связь между температурой θ и величиной l_2 , представляя в таком виде замкнутую систему параметров теплового процесса при шлифовании. Рассматривая случаи 1 и 2 (рис. 4), можно установить лишь максимальную температуру θ , чего явно не достаточно для всестороннего анализа параметров теплового процесса при шлифовании и в целом – при резании материалов.

6. Определение оптимальных условий шлифования по температурному критерию. Рассмотрим возможности практического использования полученного упрощенного решения (16) для анализа теплового процесса при плоском шлифовании, принимая время контакта шлифовального круга с обрабатываемой деталью $\tau = l / V_{дет}$, где $l = \sqrt{2 \cdot t \cdot R_{кр}}$ – длина контакта шлифовального круга с обрабатываемой деталью, м; $V_{дет}$ – скорость детали, м/с; t – глубина шлифования, м; $R_{кр}$ – радиус шлифовального круга, м. Плотность теплового потока q выражается

зависимостью: $q = N / F$, где $N = P_z \cdot V_{кр}$ – мощность шлифования, Вт; $P_z = \sigma \cdot S_{мгн}$ – тангенциальная составляющая силы резания, Н; σ – условное напряжение резания, Н/м²; $S_{мгн} = Q / V_{кр}$ – мгновенная суммарная площадь поперечного сечения среза всеми одновременно работающими зернами круга, м²; $V_{кр}$ – скорость круга, м/с; $Q = B \cdot V_{дем} \cdot t$ – производительность обработки, м³/с; B – ширина шлифования, м; $F = B \cdot l$ – площадь контакта шлифовального круга с обрабатываемой деталью, м².

После соответствующих преобразований зависимость (16) примет вид:

$$\theta = \sigma \cdot t \cdot \sqrt{\frac{2}{c \cdot \rho \cdot \lambda} \cdot \frac{V_{дем}}{\sqrt{2 \cdot t \cdot R_{кр}}}} = \sigma \cdot \sqrt{\frac{Q_{уд}}{c \cdot \rho \cdot \lambda}} \sqrt{\frac{2 \cdot t}{R_{кр}}}, \quad (17)$$

где $Q_{уд}$ – удельная производительность обработки, м²/с.

Как следует из зависимости (17), уменьшить температуру θ можно уменьшением параметров σ , t и $V_{дем}$ или уменьшением глубины шлифования t при условии $Q_{уд} = const$, т.е. применяя многопроходное шлифование (с увеличенной скоростью детали $V_{дем}$).

Таким образом показано, что температура θ и величина l_2 взаимосвязаны между собой линейной зависимостью (16). Это позволяет совершенно по-новому анализировать тепловой процесс при шлифовании (или резании лезвийными инструментами) по сравнению с зависимостями (8) и (10), в которых температура θ не достигает конечного нулевого значения на некотором удалении от действия теплового источника, тогда как с физической точки зрения тепло не может мгновенно распространиться на бесконечное расстояние. Следовательно, полученное упрощенное решение, описываемое зависимостью (16), позволяет привести в соответствие теплофизические закономерности процесса шлифования и в целом закономерности процесса резания материала.

Выводы. В работе показано, что известные решения дифференциального уравнения теплопроводности применительно к процессу шлифования не позволяют определить глубину проникновения тепла в поверхностный слой обрабатываемой детали, при достижении которой температура равна нулю, т.е., по сути, определить истинную толщину нарушенного (или дефектного) слоя обрабатываемого материала. В связи с этим в работе предложены новые упрощенные аналитические решения, которые позволили устранить этот недостаток и установить условия достижения температурой нулевого значения в поверхностном слое обрабатываемой детали. Полученные решения открывают новые технологические возможности поиска оптимальных условий шлифования, обеспечивающих повышение качества и производительности обработки. На

этой основе определена температура шлифования и обоснованы пути ее уменьшения без уменьшения производительности обработки, состоящие главным образом в применении многопроходного шлифования.

Список использованных источников: 1. *Резников А.Н.* Теплофизика процессов механической обработки материалов / *А.Н. Резников.* – М.: Машиностроение, 1981. – 279 с. 2. *Евсеев Д.Г.* Формирование свойств поверхностных слоев при абразивной обработке / *Д.Г. Евсеев.* – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1975. – 127 с. 3. *Якимов А.В.* Оптимизация процесса шлифования / *А.В. Якимов.* – М.: Машиностроение, 1975. – 175 с. 4. *Бугров Я.С.* Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / *Я.С. Бугров, С.М. Никольский.* – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. – 448 с. 5. *Чупров И. Ф.* Уравнения математической физики с приложениями к задачам нефтедобычи и трубопроводного транспорта газа: учебное пособие / *И. Ф. Чупров, Е. А. Канева, А. А. Мордвинов.* – Ухта: УГТУ, 2004. – 128 с.

Bibliography (transliterated): 1. *Reznikov A.N.* Teplofizika protsessov mekhanicheskoy obrabotki materialov / *A.N. Reznikov.* – M.: Mashinostroenie, 1981. – 279 s. 2. *Evseev D. G.* Formirovanie svoystv poverkhnostnykh sloev pri abrazivnoy obrabotke / *D. G. Evseev.* – Saratov: Izd-vo Sarat. Un-ta, 1975. – 127 s. 3. *Yakimov A.V.* Optimizatsiya protsessa shlifovaniya / *A.V. Yakimov.* – M.: Mashinostroenie, 1975. – 175 s. 4. *Bugrov Y. S.* Vysshaya matematika. Differential'nyye uravneniya. Kratnyye integraly. Ryady. Funktsii kompleksnogo peremennogo / *Y.S. Bugrov, S.M. Nikol'skiy.* – M.: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1981. – 448 s. 5. *Chuprov I. F.* Uravneniya matematicheskoy fiziki s prilozheniyami k zadacham neftedobychi i truboprovodnogo transporta gaza: uchebnoye posobiye / *I. F. Chuprov, E. A. Kaneva, A. A. Mordvinov.* – Ukhta: UGTU, 2004. – 128 s.

Надійшла до редколегії 25.06.2018