

УДК 004.422.83

В.М. Тонконогий, д-р техн. наук, И.С. Синько канд. техн. наук,  
Э.А. Махиянова, А.Ю. Миткова, Одесса, Украина

## **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ПОМЕЩЕНИЙ С АКУСТИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ**

*У статті розглядається розробка математичної моделі проектування приміщень з акустичними властивостями. Модель дозволяє розрахувати відображення звукових хвиль від поверхонь різної складності і підвищити точність результатів проектування.*

**Ключові слова:** математична модель, акустичні параметри, звукові хвилі, програмний додаток.

*В статье рассматривается разработка математической модели проектирования помещений с акустическими свойствами. Модель позволяет рассчитать отображения звуковых волн от поверхностей различной сложности и повысит точность результатов проектирования.*

**Ключевые слова:** математическая модель, акустические параметры, звуковые волны, программное приложение.

*The article discusses the development of the design space models with acoustic properties. The developed model makes it possible to calculate the geometric reflection of sound waves on surfaces of varying complexity and improve the accuracy of the results at the design stage.*

**Key words:** mathematical model, acoustic parameters, sound waves, software application.

Акустика является важным элементом в строительстве абсолютно всех типов зданий. Строительные компании на первом этапе разработки проекта учитывают акустические свойства материалов. В этом случае речь идет о максимальном поглощении звука в здании. Чтобы минимизировать шум используют в несущих стенах различные шумоизоляционные материалы, звуковое поглощение которых будет стремиться к максимальному значению. В качестве источника звука рассматривается промышленное оборудование. Учитывая его расположение, план помещения, материалы в статье выполнена математическая модель звуковых волн, на основе которой создано программное приложение [1, 2].

Целью является разработка программного приложения математической модели для проектирования помещений с акустическими свойствами. Программное приложение выполняет тестирование математической модели на компьютерной модели помещения, что поможет выполнить коррекции параметров помещения на стадии проектирования и избежать ошибок при дальнейшей реализации проекта. Программный код моделирует направление волн, благодаря этому есть возможность корректировать архитектуру помещения, материалы [3, 4]. Так же помимо усиления давления звуковой волны, есть надобность в максимальном поглощении ненужного шума.

Для того чтобы достичь поставленной цели необходимо выполнить следующие задачи:

- разработать геометрическую модель распространения звуковых волн в помещении;
- разработать математическую модель распространения звуковых волн в помещении;
- разработать программное приложение в системе САПР AutoCAD моделирования звуковых волн с учетом физических свойств материалов поверхностей помещения.

Основой для разработки программного приложения является математическая и геометрическая модели отражения звуковых волн от поверхностей. Правильный выбор математического метода для создания математической модели поможет прогнозировать динамику волн и разработать программное приложение в системе САПР, что позволит с максимальной точностью предусмотреть поведение звуковой волны.

Явления отражения, поглощения или рассеивания происходит при попадании на любую поверхность. Характер такого поведения можно создать в виде геометрической модели [4]. Когда волна попадает на плоскость, являющейся границей двух сред с разными свойствами происходит эффект зеркального отражения волны. Существует явление, которое называется звуковым полем, когда в помещениях звук распространяется от источника звука к поверхностям, от которых волны отражаются несколько раз.

В некоторых случаях звуковые волны рассматриваются, как звуковые лучи, в геометрической оптике такие лучи аналогичны световым лучам. В строительной акустике широко применяются построение геометрических отражений:

- угол падения звукового луча равен углу его отражения;
- падающие и отраженные лучи лежат в одной плоскости перпендикулярной к плоскости отражения.

В зависимости от границы отражения, длины звуковой волны и расположение поверхности относительно источника звука существует возможность использования метода лучевых (геометрических) отражений. Объект, поверхность которого служит отражением, должен иметь массу не менее  $20 \text{ кг/м}^2$ , а его коэффициент поглощения не должен превышать 0,1.

На рис.1. в роле границы выступает плоская прямоугольная поверхность, центр которой совпадает с точкой  $O$ , являющейся точкой геометрического отражения. В качестве источника звука выступает точка  $S$ . Лучевая плоскость  $P$  параллельна стороне  $\alpha$ , на лучевой плоскости лежат лучи  $SO$  и  $FO$ ,  $FO$  является отраженным лучом,  $DO$  является нормалью.  $K_0$  принимается как расстояние между источником и поверхностью,  $K$  – расстояние отражения,  $L$  – это углы падения и отражения звукового луча.

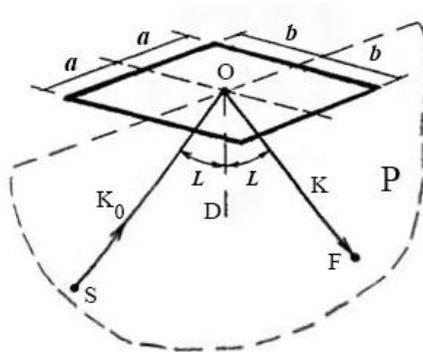


Рисунок 1 – Отражение звуковой волны от плоской поверхности

Отражение от сферических и цилиндрических поверхностей моделируется путем разбиения этих поверхностей на сегменты, вследствие чего получаем плоские поверхности [4 ,5]. Пример разбиения и отражения таких поверхностей представлены на рис.2, 3.

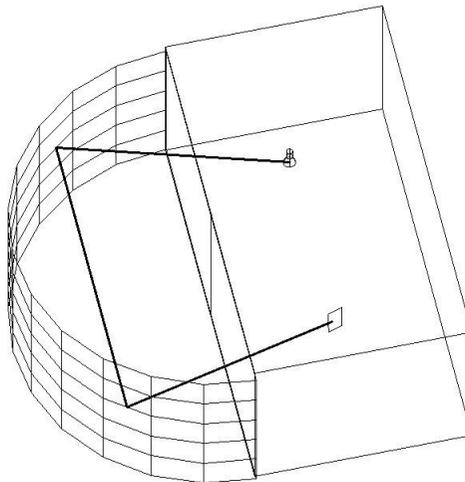


Рисунок 2 – Отражение звуковой волны от цилиндрической поверхности

Для создания математической модели акустики помещения был проведен анализ математических методов и выбран метод конечных элементов. Данный метод является основой для современных программных продуктов, используется для расчета на ЭВМ. Суть метода объясняется его названием, то есть двухмерная или трехмерная область разбивается на конечные элементы (малые, но конечные области), такой процесс разбивки называют дискретизацией. Естественно, деформация может иметь различные

форми, это будет зависеть от типа строения модели помещения. Условие совместимости возможно только в узлах, в других точках это условие применимо приближенно. Степень свободы узла и количество узлов могут быть различны, но они не могут быть меньше того минимума, который нужен для анализа напряженности и деформации модели. Степень свободы определяется количеством перемещений, возможных независимо друг от друга. Данный термин является важным в методе конечных элементов. Следует отметить, что указанный метод является гибким и алгоритмизированным в большей степени, по сравнению с другими методами, в описании граничных условий какой-либо области [6, 7].

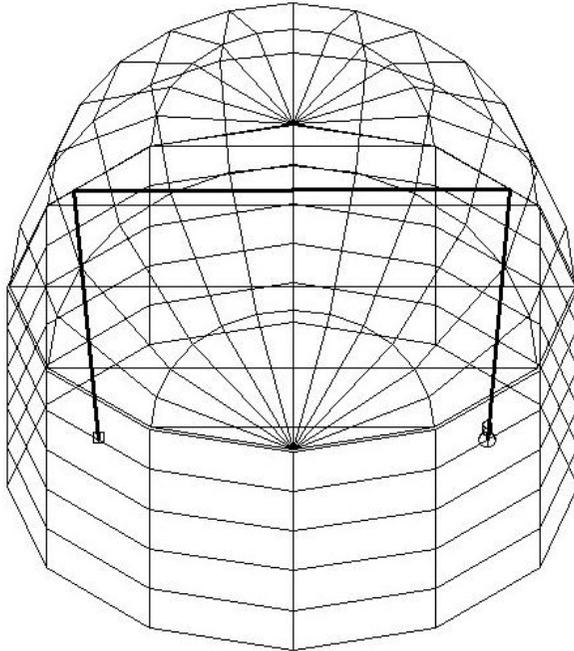


Рисунок 3 – Отражение звуковой волны от сферической поверхности

МКЭ делят на четыре метода:

– Прямой метод является простым и удобным, но применим для КЭ простых геометрических фигур, с небольшим количеством перемещений в узле. Основой метода являются положения, которые были разработаны в начале развития метода конечных элементов. Именно этот метод МКЭ и был выбран для создания математической модели.

– Вариационный метод может быть применен к простым и сложным задачам. Он основан на неизменности переменной, находящейся в зависимости от нескольких или одной функции.

– Метод навязок состоит в ведении навязок (отклонении аппроксимативного решения от точного). Для того чтобы получить более точное решение, нужно свести интеграл к минимуму от навязок области расчета.

– Метод энергетического баланса основан на балансе разных видов энергии в интегральной форме, используется для динамических и линейных задач.

Результаты расчетов несут за собой приближенные значения, т.к. аппроксимация дает не точное значение требуемых величин. Точность рассматривают как отклонения решения от верного решения. Устойчивость является повышением ошибок при отдельном расчете. Сходимость характеризуется решениями постепенно подведенными к предельному [8].

Ошибки метода конечных элементов:

– ошибки дискретизации, различия реальными значениями рассчитываемой области и аппроксимацией;

– ошибки аппроксимации, разность между реальным распределением требуемых функций и их изображением благодаря функции аппроксимации.

Алгоритм расчета метода конечных элементов представляет собой матричные операции, расчеты выполняются с помощью информационных технологий.

Общий алгоритм расчета:

– Дискретизация конструкций, область рассматривается как некоторое число КЭ, соединенные в узловые точки, при этом элементы имеют разную геометрическую форму. В целом не существует каких-либо правил по разбивки на элементы, но при этом неравномерное разбиение может причинить трудности. Следовательно, данный этап предполагает: выбор типа конечных элементов, разбиение на конечные элементы, описание элементов, описание узлов, описание нагрузок и перемещение в узлах.

– Глобальные матрицы жесткости и вектора узловых сил основано на создании отдельных элементов и их расположения, с помощью обхода каждого КЭ. Существует три способа расположения элементов: сложение жесткостей, преобразование, конечно-разностные операторы. Следовательно, второй этап состоит из: формирование элементов матрицы жесткости, трансформация элементов в глобальную систему координат (но если локальная и глобальная совпадает, данная операция не нужна), размещение элементов матрицы жесткостей в глобальной МЖ.

– Заданные граничные условия принимаются во внимание при создании вектора нагрузки, размещение заменяется аналогичными узловыми силами, чтобы уменьшить погрешность нужно разбить конструкцию на мелкие элементы. Кинематические граничные условия принимаются как заданные узловые перемещения. Таким образом третий этап состоит представляет собой: замещение нагрузки на подобные узловые силы,

добавление матрицы жесткости с учетом основания, исправление глобальной системы уравнений, с учетом узловых смещение, трансформирование глобальной системы уравнений, с учетом опорных связей.

– Система разрешающих уравнений представляет собой систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), матрицей коэффициентов ленточной структуры. Матрица коэффициентов СЛАУ представляется ленточной структуры при рациональной нумерации узлов, это обуславливается тем, что нулевые коэффициенты содержатся только в ленте диагонального расположения. Весомым фактором принимается большое количество ошибок при округлении в расчете СЛАУ большого количества уравнений. Таким образом выдвигаются две независимые процедуры: сведение матрицы коэффициентов системы линейных алгебраических уравнений к треугольному виду, нахождение решений систем с треугольными матрицами для вектора нагрузки.

– Определение напряжений, решение состояния напряжений рассчитывается следующим образом: создается вектор узловых перемещений для отдельных КЭ, в случаи несовпадения глобальной и локальной системы координат создается перевод вектора перемещения узлов, создается матрица напряжений для конечных элементов, в основе которой лежат физические и геометрические соотношения, вычисление вектора внутренних напряжений, связанный с перемещениями в узлах [9, 10].

Для математической модели был выбран четырехугольный, четырехузловой конечный элемент (рис. 4) [6].

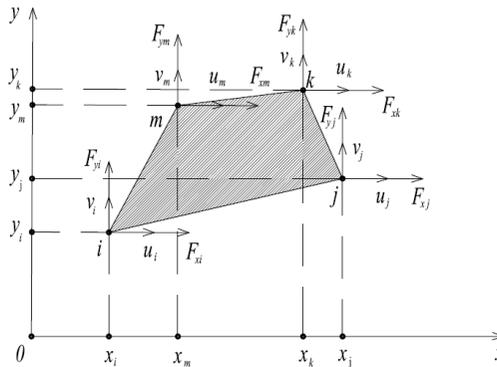


Рисунок 4 – Четырехугольный, четырехузловой конечный элемент

Поле смещений на нём можно аппроксимировать неполным квадратичным полиномом

$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy ; \quad (1.1)$$

$$v(x, y) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 xy . \quad (1.2)$$

Неизвестные параметры  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  и  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$  находится из условий:

$$\begin{cases} u(x_i, y_i) = u_i; \\ u(x_j, y_j) = u_j; \\ u(x_k, y_k) = u_k; \\ u(x_m, y_m) = u_m; \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\begin{cases} v(x_i, y_i) = v_i; \\ v(x_j, y_j) = v_j; \\ v(x_k, y_k) = v_k; \\ v(x_m, y_m) = v_m; \end{cases} \quad (1.4)$$

с учётом выражений (1.1) и (1.2)

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i + \alpha_4 x_i y_i = u_i; \\ \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j + \alpha_4 x_j y_j = u_j; \\ \alpha_1 + \alpha_2 x_k + \alpha_3 y_k + \alpha_4 x_k y_k = u_k; \\ \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m + \alpha_4 x_m y_m = u_m; \end{cases} \quad (1.5)$$

$$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 y_i + \beta_4 x_i y_i = v_i; \\ \beta_1 + \beta_2 x_j + \beta_3 y_j + \beta_4 x_j y_j = v_j; \\ \beta_1 + \beta_2 x_k + \beta_3 y_k + \beta_4 x_k y_k = v_k; \\ \beta_1 + \beta_2 x_m + \beta_3 y_m + \beta_4 x_m y_m = v_m; \end{cases} \quad (1.6)$$

что аналогично в матричной форме записи

$$\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i y_i \\ 1 & x_j & y_j & x_j y_j \\ 1 & x_k & y_k & x_k y_k \\ 1 & x_m & y_m & x_m y_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \alpha_j \\ \alpha_k \\ \alpha_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \\ u_m \end{Bmatrix}; \quad (1.7)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i y_i \\ 1 & x_j & y_j & x_j y_j \\ 1 & x_k & y_k & x_k y_k \\ 1 & x_m & y_m & x_m y_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_i \\ \beta_j \\ \beta_k \\ \beta_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_i \\ v_j \\ v_k \\ v_m \end{Bmatrix}. \quad (1.8)$$

Определяя из уравнений (1.7) и (1.8), неизвестные параметры  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  и  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$  и внося их в выражения (1.1) и (1.2), получаем

$$u(x, y) = (\alpha_i + b_i x + c_i y + d_i xy)u_i + (\alpha_j + b_j x + c_j y + d_j xy)u_j + \dots + (\alpha_k + b_k x + c_k y + d_k xy)u_k + (\alpha_m + b_m x + c_m y + d_m xy)u_m; \quad (1.9)$$

$$v(x, y) = (\alpha_i + b_i x + c_i y + d_i xy)v_i + (\alpha_j + b_j x + c_j y + d_j xy)v_j + \dots + (\alpha_k + b_k x + c_k y + d_k xy)v_k + (\alpha_m + b_m x + c_m y + d_m xy)v_m; \quad (1.10)$$

или в матричной форме записи:

$$\begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 & \Phi_2 & 0 & \Phi_3 & 0 & \Phi_4 & 0 \\ 0 & \Phi_1 & 0 & \Phi_2 & 0 & \Phi_3 & 0 & \Phi_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix}, \quad (1.11)$$

где - функции формы элемента

$$(1.12)$$

$M_{p,q}$  - элементы следующей матрицы (p, q = 1, 2, 3, 4)

$$M = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k & x_k & y_k \\ 1 & x_m & y_m & x_m & y_m \end{bmatrix}^{-1} \quad (1.13)$$

Матрица Коши принимает вид

$$B(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 & \Phi_2 & 0 & \Phi_3 & 0 & \Phi_4 & 0 \\ 0 & \Phi_1 & 0 & \Phi_2 & 0 & \Phi_3 & 0 & \Phi_4 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \Phi_4}{\partial x} & 0 @ 0 & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \Phi_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \Phi_4}{\partial y} @ \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \end{pmatrix}$$

Внутренняя энергия деформации элемента толщиной  $h$

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{h} \mathbf{u}^T \left( \iint_S \mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B} dS \right) \mathbf{u}, \quad (4.15)$$

где интегрирование ведется по площади элемента.

Работа внешних сил по соответствующим узловым перемещениям равна

$$V = \mathbf{h} \mathbf{u}^T \mathbf{F}, \quad (4.16)$$

где  $\mathbf{F}$  - вектор узловых сил

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \\ F_{xk} \\ F_{yk} \\ F_{xm} \\ F_{ym} \end{Bmatrix}. \quad (4.17)$$

Выражение принимает вид

$$(4.18)$$

что равносильно

$$Ku = F \quad (4.19)$$

где K - матрица жесткости элемента

$$K = \iint_S B^T A B dS \quad (4.20)$$

Блок-схема реализации математической модели представлена на рис. 7.

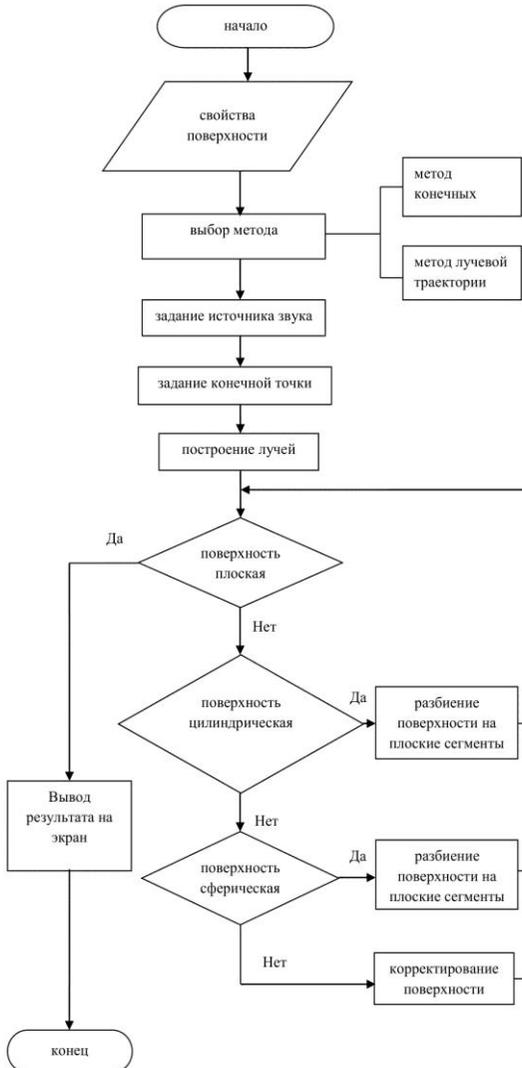


Рисунок 7– Блок-схема работы программы

Выводы: в данной работе исследована математическая модель распространения волн в акустических средах, обеспечивающая расчёт переотражений звуковых лучей и обладающая возможностями проведения экспериментов с помощью средств компьютерной графики, что в ряде случаев позволяет получать более точные результаты, чем в существующих системах акустического моделирования. Представленная в статье математическая модель стала основой для разработки программного приложения проектирования помещений с акустическими свойствами. В дальнейших исследованиях планируется развить модель с включением в расчёт свойств материалов для повышения качества проектирования.

**Список использованной литературы:** 1. Синько И.С., Молчан Е.Г. Акустические свойства промышленных помещений и зданий многоцелевого назначения [Текст] / Синько И.С. Проблемы техники. Наук.-вироб. журн. / Одес. нац. мор. ун-т, Хмельн. нац. ун-т. – Одеса, 2014. – №2. – С. 90–96. 2. Лебедев Б.В., Синько И.С. Автоматизированный расчет освещения помещений [Текст] / Б.В. Лебедев // Проблемы техники. Наук.-вироб. журн. / Одес. нац. мор. ун-т, Хмельн. нац. ун-т. – Одеса, 2011. – №2. – С. 64–69. 3. Тонконогий В.М., Синько И.С., Корнечук И.Т. Автоматизированное проектирование помещений со специальными акустическими свойствами [Текст] / В.М. Тонконогий // Високі технології в машинобудуванні. Збірник наукових праць. Харків НТУ "ХПІ" 2015 – №1. – С. 204-209. 4. Тонконогий В.М., Якимов А.А., Синько И.С. Компьютерная модель проектирования помещений с акустическими свойствами [Текст] / В.М. Тонконогий // Високі технології в машинобудуванні. Збірник наукових праць, Харків НТУ "ХПІ" 2016 – №1. – С. 111-117. 5. Автоматизоване проектування акустичних конструкцій [Текст] : матеріали тез доповідей VIII міжнародної науково-практичної конференції (м. Чернігів, 10 – 12 травня 2018 р.) : у 2-х т. / Чернігівський національний технологічний університет [та ін.] ; відп. за вип.: Єрошенко Андрій Михайлович [та ін.]. – Чернігів : ЧНТУ, 2018. – Т.2. — Чернігів : ЧНТУ, 2018. – 248 с. 6. Павленко И.В. Метод конечных элементов в задачах сопротивления материалов и линейной теории упругости [Текст] / Павленко И.В. Сумы: СумГУ 2006. – 148 с. 7. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике [Текст] / Зенкевич О. М.: Мир, 1984. – 101с. 8. Бреббия К., Телес Ж., Врубел Л. Методы граничных элементов [Текст] / Бреббия К. М.: Мир 1987. – 158с. 9. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. [Текст] / Бенерджи П. М.: Мир, 1984. – 123с. 10. Уфимцев П.Я. Метод краевых волн в физической теории дифракции. [Текст] / Уфимцев П.Я. М.: Советское радио, 1962. – 243с.

**Bibliography (transliterated):** 1. Sinko I.S., Molchan E.G. Akusticheskie svojstva promyshlennyh pomeshenij i zdaniy mnogocelevego naznacheniya [Текст] / Sinko I.S. Problemi tehniki. Nauk.-virob. zhurn. / Odes. nac. mor. un-t, Hmeln. nac. un-t. – Odesa, 2014. – №2. – S. 90–96. 2. Lebedev B.V., Sinko I.S. Avtomatizirovannyj raschet osvesheniya pomeshenij [Текст] / B.V. Lebedev // Problemi tehniki. Nauk.-virob. zhurn. / Odes. nac. mor. un-t, Hmeln. nac. un-t. – Odesa, 2011. – №2. – S. 64–69. 3. Tonkonogij V.M., Sinko I.S., Korneshuk I.T. Avtomatizirovannoe proektirovaniye pomeshenij so specialnymi akusticheskimy svojstvami [Текст] / V.M. Tonkonogij // Visoki tehnologiiyi v mashinobuduvanni. Zbirnik naukovih prac, Harkiv NTU "HPI" 2015 – №1. – S. 204-209. 4. Tonkonogij V.M., Yakimov A.A., Sinko I.S. Kompyuternaya model proektirovaniya pomeshenij s akusticheskimy svojstvami [Текст] / V.M. Tonkonogij // Visoki tehnologiiyi v mashinobuduvanni. Zbirnik naukovih prac, Harkiv NTU "HPI" 2016 – №1. – S. 111-117. 5. Avtomatizovane proektuvannya akustichnih konstrukcij [Текст] : materialy tez dopovidej VIII mizhnarodnoyi naukovo-praktichnoyi konferenciyi (m. Chernigiv, 10 – 12 travnya 2018 r.) : u 2-h t. / Chernigivskij nacionalnij tehnologichnij universitet [ta in.]; vidp. za vip.: Yeroshenko Andriy Mihajlovich [ta in.]. – Chernigiv : ChNTU, 2018. – T.2. — Chernigiv : ChNTU, 2018. – 248 s. 6. Pavlenko I.V. Metod konechnyh elementov v zadachah soprotivleniya materialov i lineynoy teorii uprugosti [Текст] / Pavlenko I.V. Summy: SumGU 2006. – 148 s. 7. Zenkevich O. Metod konechnyh elementov v tekhnike [Текст] / Zenkevich O. M.: Mir, 1984. – 101s. 8. Brebbiya K., Teles Zh., Vrubel L. Metody granichnyh elementov [Текст] / Brebbiya K. M.: Mir 1987. – 158s. 9. Benerdzhi P., Batterfil'd R. Metody granichnyh elementov v prikladnyh naukah. [Текст] / Benerdzhi P. M.: Mir, 1984. – 123s. 10. Ufimcev P.Ya. Metod kraevykh voln v fizicheskoy teorii difrakcii. [Текст] / Ufimcev P.Ya. M.: Sovetskoe radio, 1962. – 243s.

Надійшла до редколегії 25.06.2018