УДК 517:004

С. О. Колесников[1]
І. В. Левандовська[1]

ЗДІЙСНЕННЯ ЯКІСНОГО АНАЛІЗУ ОДНІЄЇ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

[1]Донбаська державна машинобудівна академія

Розглянуто приклад розв'язання диференціального рівняння першого порядку, для якого застосовані реальні статистичні дані. На цьому прикладі показано можливості розвитку мотивації студентів-економістів під час навчання вищої математики.

Ключові слова: математична модель, інформаційна підтримка, диференційні рівняння, прогнозування.

Постановка проблеми

Серед процесів, що відбуваються в математичній освіті протягом останніх років, існує тенденція скорочення кількості аудиторних годин, що виділяються на навчання вищої математики студентів інженерно-економічних спеціальностей. А це означає, що питання якісного засвоєння студентами необхідного обсягу навчального матеріалу за можливо короткі строки навчання є актуальним. Одним із засобів підвищення інтенсивності навчання є формування здатності до самостійного оволодіння знаннями, розвиток самостійного професійного мислення майбутніх спеціалістів економічної галузі під час їх навчання вищої математики.

Аналіз актуальних досліджень

Проблемі застосування різних прийомів інтенсифікації навчання майбутніх інженерів на сьогодні приділяли увагу такі математики та методисти, як В. І. Клочко, Т. В. Крилова, Є. В. Власенко, В. А. Петрук [1—4] та інші.

Мета статті — показати можливості розвитку мотивації студентів-економістів під час навчання вищої математики на прикладі вивчення однієї прикладної моделі дифферінційних рівнянь, для якої застосовані реальні статистичні дані.

Виклад основного матеріалу

Сформулюємо один з фундаментальних законів природи таким чином: швидкість зміни деякої кількісної величини у кожний момент часу прямо пропорційна її кількості в певний момент часу. На практичних заняттях під час вивчення теми «Прикладні задачі диференційних рівнянь першого порядку» широко використовуються такі задачі: вивчення розпаду радіоактивної речовини [5]; визначення вартості знецінення обладнання [6]; визначення швидкості вітру в середовищі з протидією [7]. Кількість таких моделей велика, кожна з них є цікавою і застосовується на практиці.

Автори пропонують використовувати на практичному занятті для студентів економічних спеціальностей таке моделювальне завдання, що передбачає вивчення кількісних змін чисельності населення на прикладі України. Всі статистичні дані взяті з ресурсу http://www.google.com.ua і мають застосовуватись тільки як навчальна інформаційна підтримка, для якої використані дані з реального життя.

Статистичні дані про кількість населення України в період з 2000 по 2012 рр.

Рік	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Кількість населення, млн.	49,18	48,68	48,2	47,81	47,45	47,11	46,79
Рік	2007	2008	2009	2010	2011	2012	—
Кількість населення, млн.	46,51	46,26	46,05	45,87	45,71	45,59	—

Під *інформаційною підтримкою*, ми розуміємо, процес інформаційного забезпечення, орієнтований на користувачів інформації, які зайняті навчальною діяльністю [3].

Розглянемо побудову викладачем математичної моделі завдання: швидкість приросту населення прямо пропорційна кількості населення [8]. Знайдіть залежність між кількістю населення K і часом t, якщо відомо, що в деякий момент, що береться нами за початковий, чисельність населення дорівнювало K_0.

Розв'язання.

Швидкість зміни кількості населення є перша похідна від кількості населення за часом, тобто dK/dt. Аналізуючи таблицю, можемо зробити висновок про спад кількості населення за наведений період, що означає $dK/dt < 0$.

На підставі умови задачі можна написати таке диференціальне рівняння:

$$dK/dt = -\lambda K,$$

λ — основний параметр моделі, який знаходиться з додаткової умови.

Розділяючи змінні, отримаємо:

$$dK/K = -\lambda dt.$$

Інтегруючи обидві частини рівняння, знайдемо загальний розв'язок рівняння:

$$\ln K = \ln e^{-\lambda t + C}.$$

Після потенціювання

$$K = Ce^{-\lambda t}. \tag{1}$$

Підставляючи в загальний розв'язок (1) відповідні значення чисельності населення і часу, а саме $K = K_0$ та $t = 0$, визначимо постійну інтегрування *C*.

$$C = K_0.$$

Таким чином, розв'язок рівняння (1) матиме вигляд

$$K = K_0 e^{-\lambda t}. \tag{2}$$

Для визначення значення параметра λ необхідно знати додаткову умову. Нехай відомо, що через n років

$$K_n = K_0 e^{-\lambda n}.$$

Отримаємо

$$-\lambda n = \ln \frac{K_n}{K_0}$$

або

$$\lambda = -\frac{1}{n} \ln \frac{K_n}{K_0}.$$

Залежність чисельності населення від часу t представимо у вигляді

$$K = K_0 e^{\frac{1}{n} \ln \frac{K_n}{K_0} t}$$

або

$$K = K_0 \left(\sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} \right)^t. \tag{3}$$

Позначимо $\mu = \left(\sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} \right)$ і запишемо остаточну формулу

$$K = \mu^t \,. \tag{4}$$

Проведено аналіз результату (4) на статистичних даних, наведених у таблиці. Нехай $K_0 = K(2000) = 49,18$, а $K_5 = K(2005) = 47,11$.

Тоді обчислюємо значення параметра μ і маємо залежність

$$K = 49,18 \cdot \left(0,99144\right)^t \,. \tag{5}$$

Прогнозоване значення K на 2006 рік обчислюємо за формулою (5)

$$K(6) = 46,71 \,.$$

Тоді похибка нашого прогнозування складає:

$$\left|K_6 - K(6)\right| = \left|45,79 - 46,71\right| = 0,08.$$

Робимо висновок про можливість використання функції (4) для аналізу моделі вивчення кількості населення.

Пропонуємо студентам розглянути наступну аналогічну модель: вважати рік 2006 початковим $t = t_0$. Тоді $K_0 = 46,79$, а рік 2011 є п'ятим. Для розв'язання задачі необхідно знайти: значення μ і записати залежність $K(t)$; значення $K(6)$ та відповідну похибку.

Студенти самостійно отримують результати

$$\mu = \sqrt[5]{\frac{K_5}{K_0}} = \sqrt[5]{0,97692} = 0,99534 \,.$$

Та виводять залежність

$$K = 46,79 \cdot \left(0,99534\right)^t \,. \tag{6}$$

Обчислимо прогнозоване значення на 2012 рік для $t = 6$:

$K(6) = 46,79 \cdot (0,99534)^6 = 45,497$,

для якого похибка складає $\varepsilon_1 = \left|K_{12} - K(6)\right| = \left|45,59 - 45,497\right| = 0,093$.

Перевіряємо можливість використання формули (5) для прогнозування чисельності населення на 2012 рік: $K(12) = 49,18 \cdot (0,99144)^{12} = 44,359$.

Наступна похибка $\left|K_{12} - K(12)\right| = \left|45,59 - 44,359\right| = 1,231$ більша за попередню.

Зазначимо, що використання для прогнозування більш «старих» даних призводить до більшої похибки.

Для перевірки цього висновку студентам пропонується застосувати нові дані для обчислення прогнозованого значення $K(12)$. Нехай $K_0 = K(2009) = 49,05$. Знайдемо

$$\frac{K_2}{K_0} = \frac{K\left(2011\right)}{K\left(2009\right)} = \frac{45,71}{46,05} = 0,992617 \,.$$

Тоді

$$K = 46,05 \cdot \left(0,9963\right)^t ;$$

$$K(3) = 46,05 \cdot \left(0,9963\right)^3 = 45,541.$$

Наступна похибка прогнозу на 2012 рік дорівнює

$$\varepsilon_2 = \left|K_{12} - K(3)\right| = \left|45,59 - 45,54\right| = 0,05 \,.$$

Так як $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, то робимо висновок, що використання «новіших» даних забезпечує точніше значення прогнозу.

Для завершення аналізу цієї математичної моделі студентам можна запропонувати провести різні розрахунки з обчислення прогнозів значень чисельності населення, наприклад на 2013, 2014, 2015 роки. Так, наприклад, якщо закономірності скорочення чисельності населення не зміняться, то на 2015 рік можна прогнозувати, що населення України складатиме

$$K_{15} = K(6) = 46,05 \cdot (0,9963)^6 = 45,037 .$$

Висновки

1. Наведена модель адекватно узгоджується з реальними даними, тобто в першому наближенні має бути використана, як механізм прогнозування.

2. Використання реальної інформації дозволяє підвищити зацікавленість студентів у матеріалі, що його вивчають, тобто позитивно впливає на поліпшення якості освіти.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Клочко В. І. Нові інформаційні технології навчання математики в технічній вищій школі : дис... д-ра пед. наук : 13.00.02 / В. І. Клочко. — Вінниця, 1998. — 396 с.
2. Крилова Т. В. Проблеми навчання математики в технічному вузі : моногр. / Т. В. Крилова. — К. : Вища шк., 1998. — 438 с.
3. Власенко К. В. Вища математика для майбутніх інженерів : навч. посіб. для студ. технічних ВНЗ / К. В. Власенко ; за ред. проф. О. І. Скафи. — Донецьк : Ноулідж, 2010. — 429 с.
4. Петрук В. А. Теоретико-методичні засади формування професійної компетентності майбутніх фахівців технічних спеціальностей у процесі вивчення фундаментальних дисциплін : моногр. / В. А. Петрук. — Вінниця : Універсум-Вінниця, 2006. — 292 с.
5. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учеб. для втузов. В 2-х т. — Т. II / Н. С. Пискунов. — М. : Итеграл-Пресс, 2001.— 544 с.
6. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. II : учеб. пос. для студентов втузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. — М. : Высш. школа, 1980. — 365 с.
7. Вища математика: основні означення, приклади і задачі : навч. посіб. У двох книгах. Книга 2 / І. П. Васильченко, В. Я. Данилов, Є. Ю. Таран, А. І. Лобанов. — 2-е вид., зі змінами. — К. : Либідь, 1994. — 280 с.
8. Пономарев К. К. Составление и решение дифференциальных уравнений инженерно-технических задач : пос. для физ.-мат. факультетов пединститутов / К. К. Пономарев. — М. : Учпедгиз, 1962. — 184 с.

Рекомендована кафедрою вищої математики ВНТУ

Стаття надійшла до редакції 7.10.2013

Колесников Сергій Олексійович — канд. фіз-мат. наук, доцент кафедри вищої математики;

Левандовська Ірина Володимирівна — старший викладач кафедри вищої математики, e-mail: janin23677@yandex.com.

Донбаська державна машинобудівна академія, Краматорськ

S. O. Kolesnikov[1]

I. V. Levandovska[1]

Implementation of the quality analysis of applied mathematical model for studying first order differential equations

[1]Donbass State Engineering Academy, Kramatorsk

The article describes an example of the solution of a differential equation of the first order, which uses real statistical data. This example shows the possibilities of development of motivation of students-economists at higher mathematics.

Keywords: mathematical model, information support, differential equations, forecasting.

Kolesnikov Sergii — Cand. Sc. (Ph.-Math.), Assistant Professor of the Chair of Higher Mathematics;

Levandovska Iryna *V.* — Senior Lecturer of the Chair of Higher Mathematics, e-mail: janin23677@yandex.com

С. А. Колесников[1]
И. В. Левандовская[1]

Осуществление качественного анализа одной прикладной математической модели при изучении дифференциальных уравнений первого порядка

[1]Донбасская государственная машиностроительная академия, Краматорск

Рассмотрен пример решения дифференциального уравнения первого порядка, для которого использованы реальные статистические данные. На этом примере показаны возможности развития мотивации студентов-экономистов при изучении высшей математики.

Ключевые слова: математическая модель, информационная поддержка, дифференциальные уравнения, прогнозирование.

Колесников Сергей Алексеевич — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики;
Левандовская Ирина Владимировна — старший преподаватель кафедры высшей математики, e-mail: janin23677@yandex.com