

М. Г. Грубель<sup>1</sup>  
 Р. А. Наніввський<sup>1</sup>  
 М. Б. Сокіл<sup>1</sup>

## РЕЗОНАНСНІ КОЛИВАННЯ ПІДРЕСОРЕНОЇ ЧАСТИНИ КОЛІСНИХ ТРАНСПОРТНИХ ЗАСОБІВ ПІД ЧАС РУХУ ВЗДОВЖ ВПОРЯДКОВАНОЇ СИСТЕМИ НЕРІВНОСТЕЙ

<sup>1</sup>Академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного, Львів

*Отримано умови існування та залежність резонансної амплітуди нелінійних вертикальних коливань підресореної частини колісних транспортних засобів від динамічних характеристик підвіски. Встановлено, що для жорсткіших характеристик пружних амортизаторів резонансне значенні амплітуди є меншими.*

**Ключові слова:** підресорена частина, нелінійні коливання, резонанс, амплітуда, частота.

### Актуальність та огляд основних результатів

Колісні транспортні засоби спеціального призначення (КТЗСП) у більшості випадків експлуатуються у складних умовах — рухаються по пересіченій місцевості, дорогах із значними нерівностями та ін. Тому до їх підвіски ставляться жорсткіші умови, ніж для транспортних засобів (ТЗ) загального призначення. Підвіска КТЗСП повинна забезпечувати комфортні умови транспортування людей та вантажів, захистити їх від значних динамічних перевантажень [1—9]. Таким умовам задовольняє підвіска, відновлювальна сила пружних амортизаторів якої для незначних деформацій останніх набуває малих значень і значно зростає для випадку великих їх деформацій [10, 11]. До того ж, підвіска з такою характеристикою значно ефективніше захищає підресорену частину ТЗ від небажаного явища — «пробій». Математично описати закон зміни відновлювальної сили від деформації можна нелінійною функцією. Адекватною до вищевказаних вимог щодо підвіски є степеневий або близький до нього закон зміни відновлювальної сили. Зауважимо, ступінь нелінійності такої функції має: по-перше, бути більшим одиниці (саме для більших його значень ефективніше відбувається захист від «пробою»); по-друге, забезпечувати коливальний розв'язок у математичній моделі динаміки підресореної частини. Разом з тим, з нелійними властивостями відновлювальної сили пружних амортизаторів пов'язані основні труднощі дослідження динаміки та стійкості руху ТЗ.

Окремі питання динаміки КТЗСП із нелінійно-пружною характеристикою відновлювальної сили розглядалися, наприклад, в [11, 12], де основну увагу приділено власним вертикальним та поперечно-кутовим коливанням підресореної частини та їх впливу на стійкість руху ТЗ. Однак, такі важливі з практичної та теоретичної сторін питання, як вплив «впорядкованої системи» нерівностей на коливання підресореної частини не знайшли належного дослідження. Вказана система зовнішніх збурень руху може бути причиною виникнення у підресореній частині ТЗ небажаних резонансних коливань. А саме:

- умови існування резонансних вертикальних коливань підресореної частини у випадку руху ТЗ вздовж «впорядкованої системи» нерівностей;
- вплив основних параметрів, які описують динамічні характеристики підвіски на резонансну амплітуду;
- шляхи уникнення вказаних коливань (є предметом розгляду цієї роботи). Це зумовлює актуальність досліджень.

### Постановка задачі

Для розв'язання поставлених задач за фізичну модель досліджуваного об'єкту візьмемо двомасову механічну систему: підресорену — 1 та непідресорену частини — 2 (рис. 1). Вказані частини з'єднані між собою системою підвіски — пружними амортизаторами — 3 та демпферними пристроями — 4.

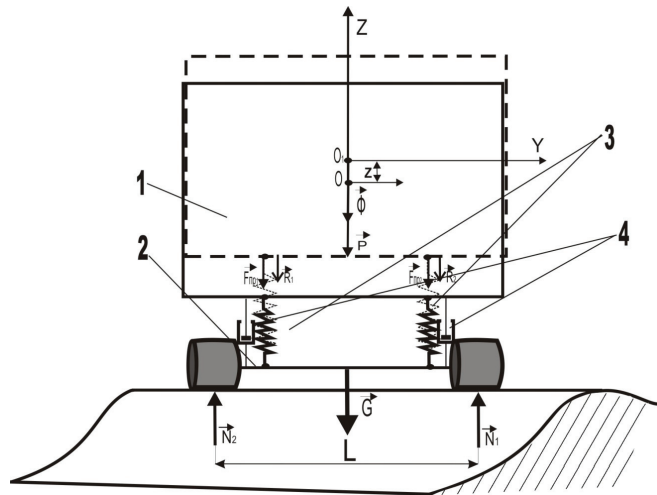


Рис. 1. Фізична модель транспортного засобу в дослідженні вертикальних коливань підресореної частини

Вважається, що:

а) відновлювальна сила  $F_{\text{пр}}$ , пружних амортизаторів, як функція їх деформації, описується степеневою функцією  $F_{\text{пр}} = c\Delta^{\nu+1}$ , де  $\Delta$  — деформація,  $c$ ,  $\nu$  — сталі;

б) сила опору демпферних пристроїв —  $R$  залежить як від швидкості руху підресореної частини, так і деформації пружних амортизаторів і описується залежністю  $R = f(V)$ , де  $V$  — швидкість руху підресореної частини;

в) максимальне значення сили, яка діє на підресорену частину зі сторони демпферних пристроїв на підресорену частину є малою величиною у порівнянні із максимальним значенням відновлювальної сили;

г) впорядкована система нерівностей описується періодичною функцією часу  $H(t) = H_0 \sin \mu t$ , де  $H_0$  — висота нерівності,  $\mu$  — частота їх розміщення. Нижче вважатимемо, що  $H_0$  набуває невеликих величин;

д) геометричні характеристики «впорядкованої системи» нерівностей вздовж ширини дороги та силові характеристики підвіски правого та лівого бортів однакові;

е) центр ваги підресореної частини збігається з його геометричним центром.

За таких припущень підресорена частина перебуває у поступальному русі, а значить її положення однозначно визначається переміщенням центра ваги. Рівняння «динамічної рівноваги» [13] підресореної частини набуває вигляду

$$\vec{F}_{\text{пр}} + \vec{R} + \vec{P} / 2 + \Phi / 2 = 0, \quad (1)$$

де  $P$  — вага підресореної частини.

Якщо у довільний момент часу фіксувати положення центру ваги відносно його положення статичної рівноваги, то  $\Delta = z - \Delta_{\text{ст}} - H \sin \mu t$ , де  $\Delta_{\text{ст}}$  — статична деформація амортизаторів,  $z$  — положення центру ваги підресореної частини у довільний момент часу. Очевидно статична деформація визначається співвідношенням  $\Delta_{\text{ст}} = (P/c)^{\frac{1}{\nu+1}}$ . Наведене у сукупності дозволяє із (1), для першого наближення, отримати диференціальне рівняння вимушених коливань підресореної частини

$$\frac{P}{g} \frac{d^2 z}{dt^2} + 2cz^{\nu+1} = 2c(\nu+1)z^{\nu} (\Delta_{\text{ст}} + H \sin \mu t) - P - 2f\left(\frac{dz}{dt}\right). \quad (2)$$

Воно буде описувати коливальний процес, якщо параметр  $\nu$  в ньому визначається залежністю  $\nu+1 = (2m+1)/(2n+1)$ ,  $m, n = 0, 1, 2, \dots$ . Окремим випадком диференціального рівняння (2), за умови пропорційності сили опору демпферів швидкості та лінійного закону зміни пружних характеристик амортизаторів ( $\nu = 0$ ), є відоме диференціальне рівняння лінійних вимушених коливань підресореної частини ТЗ. Саме із нелінійним законом зміни відновлювальної сили пов'язана низка

особливостей динаміки підресореної частини, які за лінійного аналогу рівняння (2) не вдається пояснити.

### Методика дослідження

Беручи до уваги вищенаведені обмеження щодо сил, які діють на підресорену частину, перейдемо до розв'язання рівняння (2). Саме аналітичне розв'язання, навіть наближене, дозволяє оцінювати у комплексі вплив всієї множини параметрів, які описують зовнішні та внутрішні чинники на перебіг динамічного процесу. Для цього використаємо загальні ідеї методів збурень [14]. Ефективність їх використання залежить від існування розв'язку так званого незбуреного рівняння, тобто

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{2cg}{P} z^{\nu+1} = 0. \quad (3)$$

Його розв'язок виражається за допомогою періодичних Атеб-функцій [15] у вигляді

$$z(t) = aca(\nu+1, 1, \omega(a)t + \psi_0), \quad (4)$$

де  $\omega(a) = \sqrt{\frac{cg(\nu+2)}{2P}} a^{\nu/2}$ ,  $a$ ,  $\psi_0$  — відповідно, амплітуда та початкова фаза коливань. До того ж, вказаний розв'язок є  $2\pi$ -періодичним по фазі  $\psi = \omega(a)t + \psi_0$  ( $\Pi = \sqrt{\pi}\Gamma(1/(\nu+2))\Gamma^{-1}(1/2+1/(\nu+2))$ ).

Це дозволяє стверджувати, що резонансні коливання підресореної частини будуть мати місце за умови

$$\mu \approx \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(1/(\nu+2))}{\Gamma(1/2+1/(\nu+2))} \sqrt{\frac{cg(\nu+2)}{2P}} a^{\nu/2}. \quad (5)$$

Взявши за основну із характеристик пружної підвіски статичну деформацію її  $\Delta_{ст}$ , остання залежність набуває вигляду:

$$\mu \approx \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(1/(\nu+2))}{\Gamma(1/2+1/(\nu+2))} \sqrt{\frac{g(\nu+2)}{2\Delta_{ст}^{\nu+1}}} a^{\nu/2}. \quad (6)$$

На рис. 2 показано залежність частоти зовнішнього збурення, за якої має місце резонанс, від амплітуди за різних значень параметрів  $\nu$  та  $\Delta_{ст}$ .

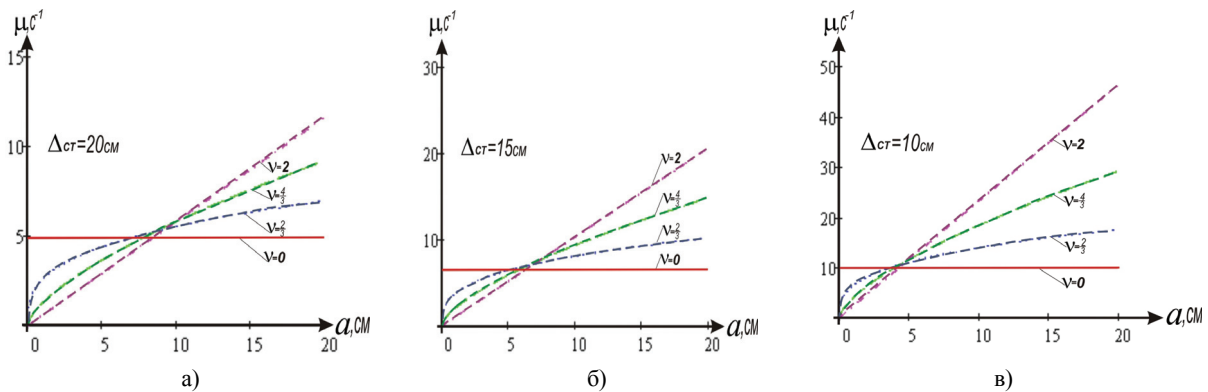


Рис. 2. Залежність частоти періодичного збурення резонансу від амплітуди коливань підресореної частини за різних значень статичної деформації пружних амортизаторів: а — 10 см; б — 15 см; в — 20 см

На рис. 3 показана залежність частоти зовнішнього збурення, за якої має місце резонанс, від статичної деформації при амплітуді коливань підресореної частини  $a = 5$  см та за різних значень параметра  $\nu$ .

Наведене вказує на принципову різницю явища резонансу у лінійних і нелінійних системах: якщо для перших резонанс визначається лише співвідношенням між статичними характеристиками підресореної частини та частотою зовнішнього збурення, то для других — він залежить ще і від динамічного параметра — амплітуди коливань. До того ж явище резонансу у нелінійних системах (якщо виконуються умови (5) чи (6)) є швидкоплиннішим.

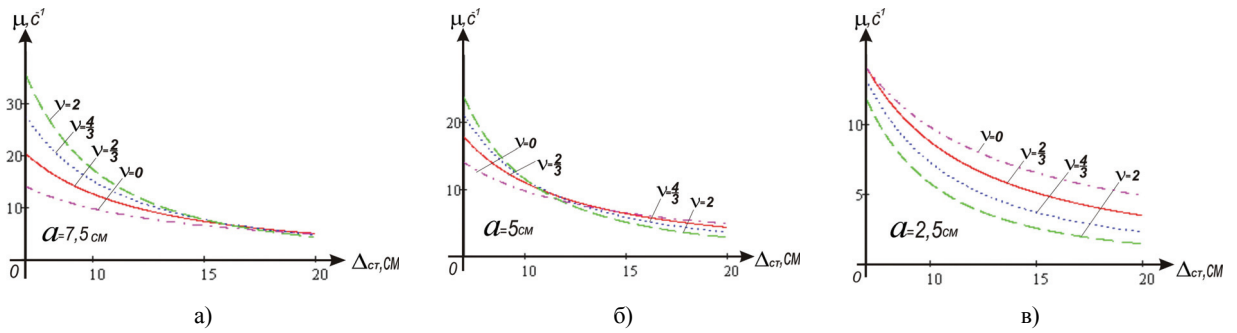


Рис. 3. Залежність частоти резонансного збурення від статичної деформації пружних амортизаторів за різних значень параметра  $\nu$  нелінійної характеристики відновлювальної сили

Таким чином, для математичної моделі вимушених коливань підресореної частини транспортних засобів у формі (2) треба розглядати два випадки: *нерезонансний*  $\mu \neq \frac{\pi}{\Pi} \omega(a)$  та *резонансний*  $\mu \approx \frac{\pi}{\Pi} \omega(a)$ .

*Примітка.* Тут та нижче йдеться про випадок головного резонансу.

Розглянемо спочатку простіший, нерезонансний випадок. Для нього амплітуда та частота коливань у першому наближенні (саме таке наближення розглядається нижче) є змінними величинами (залежать від часу) та визначаються тільки силовими характеристиками підвіски. Диференціальні рівняння, які описують закони зміни цих параметрів, мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{1}{4\Pi\pi\omega(a)} \int_0^{2\Pi} \int_0^{2\Pi} \left\{ c(\nu+1)z^\nu (\Delta_{ст.} + H \sin\theta) - P - 2f\left(z, \frac{dz}{dt}\right) \right\} \Bigg|_{\substack{z=aca(\nu+1,1,\psi), \\ \frac{dz}{dt}=-asa(1,\nu+1,\psi)}} \times \\ &\times sa(1,\nu+1,\psi) d\theta d\psi = -\frac{1}{\Pi\omega(a)} \int_0^{2\Pi} sa(1,\nu+1,\psi) f\left(z, \frac{dz}{dt}\right) \Bigg|_{\substack{z=aca(\nu+1,1,\psi), \\ \frac{dz}{dt}=-asa(1,\nu+1,\psi)}} d\psi; \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega(a) - \frac{(\nu+2)}{8\Pi\pi\omega(a)} \int_0^{2\Pi} \int_0^{2\Pi} \left\{ c(\nu+1)z^\nu (\Delta_{ст.} + H \sin\theta) - P - 2f\left(z, \frac{dz}{dt}\right) \right\} \Bigg|_{\substack{z=aca(\nu+1,1,\psi), \\ \frac{dz}{dt}=-asa(1,\nu+1,\psi)}} \times \\ &\times ca(\nu+1,1,\psi) d\theta d\psi = \omega(a). \end{aligned} \quad (7)$$

Таким чином, для першого наближення у нерезонансному випадку вплив зовнішніх та внутрішніх чинників проявляється: по-перше, у залежності частоти власних коливань від амплітуди; по-друге, замикання в часі останньої, причому закон замикання визначається динамічними характеристиками амортизаторів.

Набагато складнішим є випадок *резонансу* у цьому випадку динаміка процесу значною мірою визначається не тільки зовнішніми та внутрішніми чинниками, але й різницею фаз  $\vartheta$  власних коливань та зовнішнього збурення —  $\vartheta = \frac{\pi}{\Pi} \psi - \theta$ . Тому формально, вводячи вказаний параметр у співвідношення, які описує динаміку процесу  $\left(\psi = \frac{\Pi}{\pi}(\theta + \vartheta)\right)$ , після деяких перетворень отримаємо співвідношення для опису резонансного процесу

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{1}{2\pi\omega(a)} \int_0^{2\pi} \left\{ c(\nu+1)a^\nu ca^\nu \left(\nu+1,1, \frac{\Pi}{\pi}(\vartheta + \theta)\right) (\Delta_{ст.} + H \sin\theta) - P - 2f\left(-a\omega(a)sa\left(1,\nu+1, \frac{\Pi}{\pi}(\vartheta + \theta)\right)\right) \right\} \times \\ &\times sa\left(1,\nu+1, \frac{\Pi}{\pi}(\vartheta + \theta)\right) d\theta; \end{aligned}$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\pi}{\omega(a)} - \mu - \frac{\nu+2}{4\pi\omega(a)a} \int_0^{2\pi} \left\{ c(\nu+1)a^\nu ca^\nu \left( \nu+1, 1, \frac{\pi}{\pi}(\vartheta+\theta) \right) (\Delta_{ст.} + H \sin\theta) - P - \right. \\ \left. - 2f \left( -a\omega(a)sa \left( 1, \nu+1, \frac{\pi}{\pi}(\vartheta+\theta) \right) \right) \right\} ca \left( \nu+1, 1, \frac{\pi}{\pi}(\vartheta+\theta) \right) d\theta.$$

Беручи до уваги властивості функцій, які є правими частинами рівняння (2), останнє співвідношення трансформується до вигляду:

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{2\pi\omega(a)} \left\{ 2 \int_0^{2\pi} f(-a\omega(a)sa(1, \nu+1, \psi)) d\psi + cH(\nu+1)a^\nu \cos\vartheta \int_0^{2\pi} ca^{\nu+1}(\nu+1, 1, \psi)sa(1, \nu+1, \psi) \sin \frac{\pi}{\pi}\psi d\psi; \right. \\ \left. \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\pi}{\omega(a)} - \mu - \frac{\nu+2}{4\pi a\omega(a)} \left\{ cH(\nu+1)a^\nu \sin\vartheta \int_0^{2\pi} ca^{\nu+1}(\nu+1, 1, \psi) \cos \frac{\pi}{\pi}\psi d\psi. \right. \right. \quad (8)$$

Треба зазначити, що диференціальні рівняння (8) справедливі для наближення амплітуди коливань підресореної частини транспортного засобу до значення  $a^*$ ,

$$a^* = \left( \frac{\Gamma(1/2 + 1/(\nu+2))}{\sqrt{\pi}\Gamma(1/(\nu+2))} \sqrt{\frac{2\Delta_{ст.}^{\nu+1}}{g(\nu+2)}} \mu \right)^{2/\nu}. \quad (9)$$

На рис. 4 показані резонансні амплітуди коливань за таких значень параметрів:  $\mu = V/l$ ,  $V = 10$  м/с,  $l = 0,5$  м ( $V$  — швидкість руху ТЗ,  $l$  — віддаль між «гребнями» нерівностей).

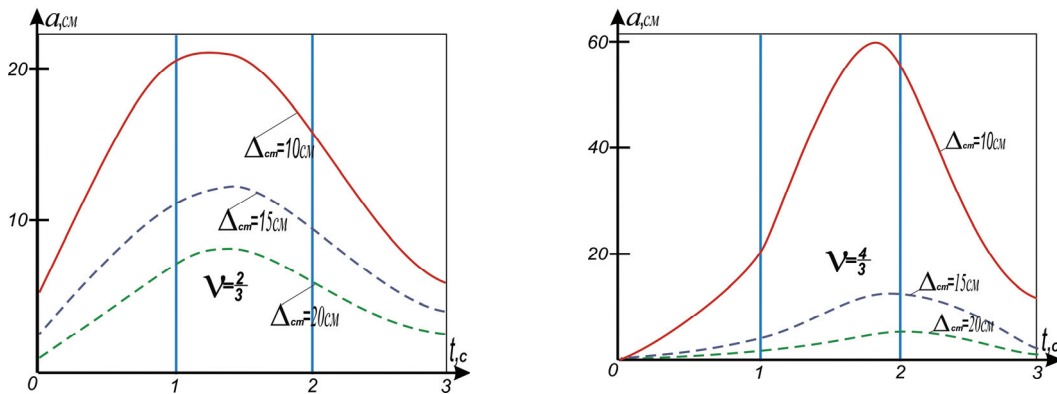


Рис. 4. Резонансні амплітуди підресореної частини за різних значень характеристик підвіски

### Висновки

Отримані розрахункові та побудовані на їх базі графічні залежності показують, що за нелінійної характеристики відновлювальної сили пружної підвіски:

— власна частота підресореної частини визначається не тільки силовими її параметрами, але й амплітудою коливань;

— резонансне явище має місце для різних частот зовнішнього періодичного збурення за різних амплітуд коливань;

— для більших значень амплітуди коливань частота зовнішнього періодичного збурення, за якої має місце явище резонансу є більшою, причому швидкість росту частоти є більшою для жорсткіших характеристик підвіски (більшого значення параметра  $\nu$  чи меншого значення статичної деформації);

— динамічні характеристики демпферних пристроїв впливають на швидкість затухання амплітуди;

— резонансні значення амплітуди для жорсткіших підвісок (за однакових значень величини зовнішнього періодичного збурення, статичної деформації) є меншими; для більших значень параметра  $c$ , але незмінних значень параметра  $\nu$  — більшими;

— для уникнення резонансних явищ підресореної частини транспортного засобу вздовж шляху із впорядкованою системою нерівностей необхідно, щоб швидкість пересування останнього була

відмінною від  $\frac{\Gamma(1/(v+2))}{\sqrt{\pi}\Gamma(1/2+1/(v+2))} \sqrt{\frac{2g(v+2)}{\Delta^{v+1}_{ст.}}} a^{\frac{v}{2}}$ , де  $l$  — відстань між «гребенями» нерівностей.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Динамика транспортно-тяговых колёсных и гусеничных машин / [Е. Е. Александров, А. Т. Лебедев, А. Н. Туренко и др.]. — Х. : ХНАДУ, 2001. — 642 с.
2. Конструирование и расчёт колёсных машин высокой проходимости : учеб. для вузов / [Н. Ф. Бочаров, И. С. Цитович, А. А. Полугнян и др.]; под общ. Ред. Н. Ф. Бочарова, И. С. Цитовича. — М. : Машиностроение, 1983. — 299 с.
3. Гладов Г. И. Многоцелевые гусеничные и колёсные машины: конструкция : учеб. для вузов / [Г. И. Гладов, А. В. Вихров, В. В. Кувшинов, В. В. Павлов]; под ред. Г. И. Гладова. — М. : Транспорт, 2001. — 272 с.
4. Дмитриев А. А. Теория и расчёт нелинейных систем поддресоривания гусеничных машин / А. А. Дмитриев, В. А. Чобиток, А. В. Тельминов. — М. : Машиностроение, 1976. — 208 с.
5. Дущенко В. В. Математическое моделирование колебаний поддресоренного корпуса многоопорной колёсной машины / В. В. Дущенко, И. И. Якименко // Механіка та машинобудування. — 2004. — № 2. — С. 139—147.
6. Ротенберг Р. В. Подвеска автомобиля. — М. : Машиностроение, 1972. — 392 с.
7. Динамика автомобиля / [М. А. Подригало, В. П. Волков, А. А. Бобошко и др.]; под ред. М. А. Подригало. — Харьков : ХНАДУ, 2008. — 424 с.
9. Солтус А. П. Теорія експлуатаційних властивостей автомобіля : навч. посіб. для ВНЗ. — К. : Арістей, 2010. — 155 с.
10. Кузьо І. В. Вплив параметрів підвіски на нелінійні коливання транспортних засобів / І. В. Кузьо, Б. І. Сокіл, В. М. Палюх // Вісник НУ «Львівська політехніка». Серія «Динаміка, міцність та проектування машин і приладів». — 2007. — № 588 — С. 49—52.
11. Сокіл Б. І. Власні вертикальні коливання корпусу автомобіля з урахуванням нелінійних характеристик пружної підвіски / Б. І. Сокіл, Р. А. Нанівський, М. Г. Грубель // Автомобільний транспорт : науково-вироб. журнал. — 2013. — № 5 (235). — С. 15—18.
12. Вертикальні коливання піддресореної частини колісних транспортних засобів під дією випадкових збурень / [М. Г. Грубель, О. П. Красюк, М. Б. Сокіл, Р. А. Нанівський] // Наукові нотатки : Зб. наук. пр. ; Луцький національний технічний ун-т, Луцьк. — 2014. — В. 46. — С. 112—116.
13. Кильчевский Н. А. Курс теоретической механики. — М. : Наука, 1977. — Т. II. — 544 с.
14. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике / Джулиан Коул ; пер. с англ. А. И. Державиной и В. Н. Диеперова, под ред. О. С. Рыжова. — М. : Мир. — 1972. — 276 с.
15. Сенік П. М. Обернення неповної Бета-функції / П. М. Сенік // Укр. мат. журн. — 1969. — Т. 21, № 3. — С. 325—333.

Рекомендована кафедрою автомобілів та транспортного менеджменту ВНТУ

Стаття надійшла до редакції 16.09.2014

**Грубель Михайло Григорович** — канд. техн. наук, доцент кафедри автомобілів та автомобільного господарства, e-mail: m.g.grybel@gmail.com;

**Нанівський Роман Антонович** — аспірант кафедри інженерної механіки, e-mail: roman\_nani@ukr.net;

**Сокіл Марія Богданівна** — канд. техн. наук, викладач кафедри інженерної механіки.

Академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного, Львів

**M. H. Hrubel<sup>1</sup>**  
**R. A. Nanivskyi<sup>1</sup>**  
**M. B. Sokil<sup>1</sup>**

## Resonant oscillations of the sprung part of wheeled vehicles when moving along the ordered system of inequalities

<sup>1</sup>Army Academy named after Hetman P. Sahaidachnyi, Lviv

*The existence conditions and dependence of the resonance amplitude of non-linear vertical oscillation of the sprung part of wheeled vehicles on the dynamic characteristics of the suspension are obtained. It is established that the resonant value of the amplitude is smaller for tighter characteristics of elastic shock absorbers.*

**Keywords:** sprung part, nonlinear oscillations, resonance, amplitude, frequency.

**Hrubel Mykhailo H.** — Cand. Sc. (Eng), Assistant Professor of the Chair of Cars and Automobile Economy, e-mail: m.g.grybel@gmail.com;

**Nanivskyi Roman A.** — Post-Graduate Student of the Chair of Engineering Mechanics;

**Sokil Mariya B.** — Cand. Sc. (Eng), Lecturer of the Chair of Engineering Mechanics

**М. Г. Грубель<sup>1</sup>**  
**Р. А. Нанивский<sup>1</sup>**  
**М. Б. Сокил<sup>1</sup>**

## **Резонансные колебания поддресоренной части колесных транспортных средств при движении вдоль упорядоченной системы неровностей**

<sup>1</sup>Академия сухопутных войск имени гетмана Петра Сагайдачного, Львов

*Получены условия существования и зависимость резонансной амплитуды нелинейных вертикальных колебаний поддресоренной части колесных транспортных средств от динамических характеристик подвески. Установлено, что для более жестких характеристик упругих амортизаторов резонансное значение амплитуды меньше.*

**Ключевые слова:** поддресоренная часть, нелинейные колебания, резонанс, амплитуда, частота.

**Грубель Михаил Григорьевич** — канд. техн. наук, доцент кафедры автомобилей и автомобильного хозяйства, e-mail: m.g.grybel@gmail.com;

**Нанивский Роман Антонович** — аспирант кафедры инженерной механики;

**Сокил Мария Богдановна** — канд. техн. наук, преподаватель кафедры инженерной механики