УДК 621.3(075)

Ю. Г. Ведміцький[1]

БІНОМІАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ В ФОРМУВАННІ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ЗАДАЧІ КОШІ

[1]Вінницький національний технічний університет

Розкрито прямий та зворотний закони відповідності між множиною дійсних і множиною комплексних коефіцієнтів двох взаємопов'язаних лінійних диференціальних рівнянь довільного порядку, кожне з яких у самостійний і незалежний спосіб здатне описувати неперервний рух узагальненої за числом ступенів вільності динамічної системи із зосередженими параметрами в фундаментальній задачі Коші, яку сформульовано в першому випадку в термінах дійсних функцій часу, а в другому — їх комплексних зображень, що дозволяє безпосередньо здійснювати постановку однієї із зазначених форм задачі Коші на основі іншої як в узагальненому за порядком диференціального рівняння вигляді, так і в окремому за заданих конкретних умов, незалежно від фізичної природи досліджуваної системи.

Ключові слова: динамічна система, дійсна та комплексна форми узагальненої задачі Коші, диференціальне рівняння руху, число ступенів вільності, електричне коло, перехідний процес.

Вступ

Задача аналізу перехідних процесів в фізичних і технічних динамічних системах з континуальною формою руху надзвичайно важлива і потребує особливої уваги [1—6]. Як відомо, математичною інтерпретацією цієї задачі є фундаментальна задача Коші [2]. Її постановка передбачає побудову диференціального рівняння руху динамічної системи та визначення сукупності початкових умов з наступним пошуком окремого розв'язку.

Для вихідного базису загальної теорії перехідних процесів затребуваними є *узагальнені*, себто дедуктивні, форми задачі Коші, які в змозі забезпечити формалізацію процесу постановки конкретної задачі Коші за конкретних умов. Пошук таких узагальнених форм задачі Коші, опис їх властивостей, виявлення кореляційних зв'язків між ними, в свою чергу, є окремими науковими задачами, на сьогодні важливими і для теорії перехідного процесу, і для її практики.

Тому *метою роботи* є розкриття на основі дослідження властивостей електричних кіл закону відповідності (оператора) між множиною дійсних та множиною комплексних коефіцієнтів двох взаємопов'язаних лінійних диференціальних рівнянь, кожне з яких у самостійний і незалежний спосіб здатне описувати неперервний рух узагальненої за числом ступенів вільності динамічної системи із зосередженими параметрами в фундаментальній задачі Коші, яку сформульовано в першому випадку в термінах дійсних функцій часу, а в другому — їх комплексних зображень.

Такий оператор на сьогодні відсутній. Але, оскільки він встановлює прямий математичний зв'язок між дійсною та комплексною формами задачі Коші, узагальненою додатково ще й за числом ступенів вільності системи, його розробка помітно посилює аналітичні можливості теоретичних базисів практично всіх основних методів розрахунку та аналізу перехідних процесів в лінійних фізичних і технічних динамічних системах з *періодичною* формою руху. Зокрема — в електричних колах синусоїдного та періодичного несинусоїдного струмів.

Постановка узагальненої задачі Коші в комплексній формі (на прикладі лінійного електричного кола синусоїдного струму)

Зараз і надалі *узагальненою* називатимемо задачу Коші, якщо над нею проведено логічну дію узагальнення щонайменше за двома ознаками: формою її вираження (дійсною або більш загальною — комплексною) та числом ступенів вільності динамічної системи (або ж порядком диференціального рівняння її руху, що безпосередньо пов'язане з цим числом).

Отож розглянемо лінійне електричне коло синусоїдного струму з одним джерелом напруги $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$, яке має *узагальнену* топологічну структуру [7] і *довільне* число ступенів вільності. Перехідний процес в такому колі описується окремим розв'язком, наприклад,

© Ю. Г. Ведміцький, 2015

$$i(t) = I_m(t)\sin\left[\omega t + \psi_i(t)\right] \tag{1}$$

узагальненої задачі Коші, яку зазвичай подають в дійсній формі у вигляді складеного на основі законів Кірхгофа і компонентних співвідношень відносно миттєвих напруг або струмів лінійного звичайного диференціального рівняння n-го порядку

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{d\,t^k} i(t) = \sum_{s=0}^{w} b_s \frac{d^s}{d\,t^s} u(t), \tag{2}$$

доповненого n початковими умовами: $i(0_+)$, $\dfrac{d\,i(0_+)}{d\,t}$,…, $\dfrac{d^{n-1} i(0_+)}{d\,t^{n-1}}$, де $i(t)$ — перехідний миттєвий струм в деякій вітці заданого кола, а $I_m(t)$ та $\psi_i(t)$ — відповідно, його миттєві амплітуда і початкова фаза, які також є функціями часу.

Водночас, оскільки для миттєвого струму чинним залишається співвідношення

$$i(t) = \operatorname{Im}\left\{I_m(t)e^{j\psi_i(t)}e^{j\omega t}\right\} = \operatorname{Im}\left\{\underline{I}_m(t)e^{j\omega t}\right\}, \tag{3}$$

узагальнену за вказаними ознаками задачу Коші можна сформулювати і відносно його комплексного зображення — *миттєвого комплексного струму*

$$\underline{I}_m(t) = I_m(t)e^{j\psi_i(t)}, \tag{4}$$

на основі диференціального рівняння

$$\sum_{k=0}^{n} \underline{A}_k \frac{d^k}{d\,t^k} \underline{I}_m(t) = \underline{B}_0 \underline{U}_m \tag{5}$$

та n початкових умов виду $\underline{I}_m(0_+)$, $\dfrac{d\,\underline{I}_m(0_+)}{d\,t}$, …, $\dfrac{d^{n-1}\,\underline{I}_m(0_+)}{d\,t^{n-1}}$, що дозволяє комплексну функцію часу $\underline{I}_m(t)$ розглядати як самодостатній математичний об’єкт, який здатен у самостійний спосіб описувати перехідний процес в заданому електричному колі [8].

Варто зауважити, що теоретична електротехніка задачу аналізу перехідних процесів в електричних колах синусоїдного струму на сьогодні здатна системно і результативно розв’язувати практично в усіх її проявах. Для цього пропонується чимало методів розрахунку, серед яких — класичний, операторний, спектральний методи, метод інтеграла Дюамеля тощо. Сутність наведених методів ґрунтовно розкривається численними науковими та навчальними літературними джерелами, наприклад, [1—6]. Водночас, як свідчать дослідження більшості із зазначених видань, задача Коші формулюється в них виключно в дійсній формі в термінах миттєвих струмів і напруг. Такий підхід домінує і в тих випадках, коли з метою розв’язування зазначеної задачі використовують інтегральні перетворення, зокрема інтеграли Фур’є, Лапласа або Карсона.

На превеликий жаль, можливість формування задачі Коші відносно функцій миттєвих *комплексних* струмів виду (4) в зазначеній бібліографії не тільки не розкривається, про неї навіть і не згадується! Певне саме це і пояснює той факт, що методичний супровід цього підходу, попри потребу, перебуває на сьогодні в недостатньо розробленому і незадовільно розгорнутому стані.

Прямий оператор узагальненої задачі Коші

Прямим оператором узагальненої задачі Коші називатимемо закон відображення множини коефіцієнтів диференціального рівняння (2) у відповідну множину коефіцієнтів рівняння (5):

$$\mathrm{W}:\{a_0, a_1, ..., a_n; b_0, b_1, ..., b_w\} \to \{\underline{A}_0, \underline{A}_1, ..., \underline{A}_n; \underline{B}_0, \underline{B}_1 ..., \underline{B}_w\}.$$

Для розкриття цього закону насамперед за різних k знайдемо комплексні зображення першої і вищих похідних миттєвого струму $i(t)$, для чого скористаємося співвідношеннями (1), (3) і (4):

$$i(t) \to \underline{I}_m(t)_{\,|k=0};$$

$$\frac{d}{dt}i(t) \to \frac{d}{dt}\underline{I}_m(t) + j\omega \underline{I}_m(t)_{\,|k=1};$$

$$\frac{d^2}{dt^2}i(t) \to \frac{d^2}{dt^2}\underline{I}_m(t) + j2\omega \frac{d}{dt}\underline{I}_m(t) - \omega^2 \underline{I}_m(t)_{\,|k=2};$$

$$\frac{d^3}{dt^3}i(t) \to \frac{d^3}{dt^3}\underline{I}_m(t) + j3\omega \frac{d^2}{dt^2}\underline{I}_m(t) - 3\omega^2 \frac{d}{dt}\underline{I}_m(t) - j\omega^3 \underline{I}_m(t)_{\,|k=3};\ \cdots.$$

Дослідження утвореної послідовності дозволяє дійти важливого висновку: отримані елементарні відображення є проявами окремих випадків формули *бінома Ньютона*, представленої умовною формою запису і за різних конкретних значень k. Така властивість, що притаманна зазначеним перетворенням, створює можливість для побудови узагальненої формули:

$$\frac{d^k}{dt^k}i(t) \to \left(j\omega + \frac{d}{dt}\right)^k \underline{I}_m(t) = \sum_{p=0}^{k}\left(C_k^p (j\omega)^p \frac{d^{k-p}}{dt^{k-p}}\underline{I}_m(t)\right) = \sum_{p=0}^{k}\left(\frac{k!}{p!(k-p)!}(j\omega)^p \frac{d^{k-p}}{dt^{k-p}}\underline{I}_m(t)\right), \qquad (6)$$

де числа C_k^p — біноміальні коефіцієнти: $C_k^p = \dfrac{k!}{p!(k-p)!}$.

Отримана формула (6) дозволяє встановити закон відповідності поміж лівими частинами диференціальних рівнянь (2) і (5) узагальненої задачі Коші:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{dt^k}i(t) &= \mathrm{Im}\left\{\sum_{k=0}^{n}\left[a_k \sum_{p=0}^{k}\left(\frac{k!}{p!(k-p)!}(j\omega)^p \frac{d^{k-p}}{dt^{k-p}}\underline{I}_m(t)\right)\right]\cdot e^{j\omega t}\right\} = \\ &= \mathrm{Im}\left\{\sum_{k=0}^{n}\left[\sum_{p=0}^{n-k}\left(\frac{(k+p)!}{k!\,p!}(j\omega)^p a_{k+p}\right)\frac{d^k}{dt^k}\underline{I}_m(t)\right]\cdot e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Im}\left\{\sum_{k=0}^{n}\underline{A}_k \cdot \frac{d^k}{dt^k}\underline{I}_m(t)\cdot e^{j\omega t}\right\}.\end{aligned} \qquad (7)$$

Прикінцевий результат в співвідношенні (7) отримано внаслідок перегрупування всіх складових по двох сумах водночас.

Закон відповідності між правими частинами зазначених рівнянь розкривається у схожий спосіб:

$$\sum_{s=0}^{w} b_s \frac{d^s}{dt^s}u(t) = \mathrm{Im}\left\{\sum_{p=0}^{w}\left[(j\omega)^p b_p\right]\cdot \underline{U}_m \cdot e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Im}\left\{\underline{B}_0 \cdot \underline{U}_m \cdot e^{j\omega t}\right\}. \qquad (8)$$

В формулі (8) враховано, що миттєва *комплексна* напруга джерела за умовою вихідної задачі є постійною $\underline{U}_m = U_m e^{j\psi_u} = \underline{\mathrm{const}}$, внаслідок чого її перша та вищі похідні дорівнюють нулю.

Прямий оператор узагальненої задачі Коші отримуємо безпосередньо з рівнянь (2), (5), (7) та (8) у вигляді співвідношень:

$$\underline{A}_k = \sum_{p=0}^{n-k}\left[\frac{(k+p)!}{k!\,p!}\cdot (j\omega)^p \cdot a_{k+p}\right]; \quad \underline{B}_0 = \sum_{p=0}^{w}\left[(j\omega)^p \cdot b_p\right], \qquad (9)$$

де $k = 0, 1, \ldots, n$, а $w \le n$.

Зворотний оператор узагальненої задачі Коші

Закон відображення множини коефіцієнтів рівняння (5) в множину коефіцієнтів рівняння (2):

$$\mathrm{W}^{-1}: \{\underline{A}_0, \underline{A}_1, \ldots, \underline{A}_n; \underline{B}_0, \underline{B}_1 \ldots, \underline{B}_w\} \to \{a_0, a_1, \ldots, a_n; b_0, b_1, \ldots, b_w\}$$

називатимемо, відповідно, *зворотним* оператором узагальненої задачі Коші.

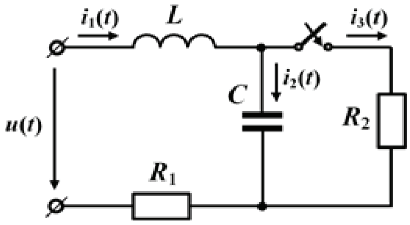
Цей оператор неважко отримати за допомогою прямого оператора на підставі першої формули (9), яка дозволяє скласти систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів диференціального рівняння (2). За такого підходу комплексні коефіцієнти рівняння (5) слугуватимуть її вільними членами. Розв'язуванням цієї системи неважко показати, що

$$a_k = \sum_{p=0}^{n-k}\left[\frac{(k+p)!}{k!\,p!}\cdot(-j\omega)^p \cdot \underline{A}_{k+p}\right];\quad b_k = \sum_{p=0}^{w-k}\left[\frac{(k+p)!}{k!\,p!}\cdot(-j\omega)^p \cdot \underline{B}_{k+p}\right]. \tag{10}$$

Стосовно другого співвідношення в (10) варто зауважити, що у разі відсутності коефіцієнтів $\underline{B}_1,...,\underline{B}_w$, а саме це передбачає заявлений вище суто синусоїдний режим роботи джерела живлення, зворотний оператор у відношенні коефіцієнтів b_k через невизначеність втрачає свою дієздатність.

Приклад постановки окремої задачі Коші в комплексній формі

Розглянемо лінійне електричне коло 2-го порядку (n = 2). Його схему показано на рис.



Електричне коло 2-го порядку

Диференціальне рівняння виду (2) задачі Коші в дійсній формі узвичаєно формують безпосередньо або опосередковано на підставі законів Кірхгофа і компонентних співвідношень, яку потім переписують відносно шуканої миттєвої напруги чи струму. Для заданого кола таким рівнянням, складеним відносно $i_1(t)$, буде рівняння:

$$a_2\frac{d^2}{dt^2}i_1(t)+a_1\frac{d}{dt}i_1(t)+a_0 i_1(t)=b_1\frac{d}{dt}u(t)+u(t), \tag{11}$$

де $a_2 = LCR_2$; $a_1 = L + CR_1R_2$; $a_0 = R_1 + R_2$; $b_1 = CR_2$; $b_0 = 1$.

Наведені вище оператори узагальненої задачі Коші, які розкривають закон відповідності між її дійсною та комплексною формами, створюють можливість для безпосереднього переходу від однієї форми до іншої. У відповідності з цим для $n = 2$ коефіцієнти диференціального рівняння (5)

$$\underline{A}_2\frac{d^2}{dt^2}\underline{I}_{m_1}(t)+\underline{A}_1\frac{d}{dt}\underline{I}_{m_1}(t)+\underline{A}_0\underline{I}_{m_1}(t)=\underline{B}_0\underline{U}_m, \tag{12}$$

можуть бути визначені за допомогою прямого оператора (9), а саме: $\underline{A}_2 = a_2 = LCR_2$; $\underline{A}_1 = a_1 + j2\omega a_2 = L + CR_1R_2 + j2\omega LCR_2$; $\underline{A}_0 = a_0 - \omega^2 a_2 + j\omega a_1 = R_1 + R_2 - \omega^2 LCR_2 + j\omega(L + CR_1R_2)$; $\underline{B}_0 = b_0 - \omega^2 b_2 + j\omega b_1 = 1 + j\omega CR_2$.

В останньому співвідношенні, як це випливає з (11), $b_2 = 0$.

Висновки

В роботі на основі формули бінома Ньютона розкрито прямий та зворотний закони відповідності між множиною дійсних та множиною комплексних коефіцієнтів двох взаємопов'язаних лінійних диференціальних рівнянь, кожне з яких у самостійний і незалежний спосіб здатне описувати неперервний рух узагальненої за числом ступенів вільності динамічної системи із зосередженими параметрами в фундаментальній задачі Коші, яку сформульовано в першому випадку в термінах дійсних функцій часу, а в другому — їх комплексних зображень. Отримані результати дозволяють безпосередньо здійснювати постановку однієї з таких форм задачі Коші через іншу як в узагальненому за порядком диференціального рівняння вигляді, так і в окремому за заданих конкретних умов.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Електроніка і мікросхемотехніка. У 4-х т. — Том 4. Книга 1. Силова електроніка / за ред. В. І. Сенька. — К. : Каравела, 2013. — 640 с.

2. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров / А. Анго. — М. : Наука, 1965. — 780 с.

3. Теоретичні основи електротехніки. У 3-х т. : підруч. для студ. техн. спец. вищ. навч.закл. — Т. 2. Перехідні процеси у лінійних колах із зосередженими параметрами. Нелінійні та магнітні кола / [В. С. Бойко та ін.] ; заг. ред. І. М. Чиженко, В. С. Бойко. — К. : НТУУ «КПІ», 2008. — 224 с.

4. Gardner M. F. Transients in linear systems / M. F. Gardner, J. L. Barnes. — New York: John Wiley & Sons, Inc., 1942. — 552 p.

5. Рютенберг Р. Переходные процессы в электроэнергетических системах / Р. Рютенберг. — М. : Изд. иностр. литер., 1955. — 716 с.

6. Теоретичні основи електротехніки. Перехідні процеси в лінійних колах. Синтез лінійних кіл. Електричні та магнітні нелінійні кола : підруч. для студ. вищ. техн. навч. закл. / Ю. О. Карпов, Ю. Г. Ведміцький, В. В. Кухарчук, С. Ш. Кацив , за ред. проф. Ю. О. Карпова — Херсон : ОЛДІ-ПЛЮС, 2013. — 456 с.
7. Ведміцький Ю. Г. Узагальнені електричні схеми-аналоги неперервних динамічних систем довільного порядку / Ю. Г. Ведміцький // Вісник Інженерної академії України. — 2010. — Вип. 2. — С. 63 — 69.
8. Ведміцький Ю. Г. Символьно-класичний метод аналізу перехідних процесів в електричних колах / Ю. Г. Ведміцький // Вісник Інженерної академії України. — 2014. — Вип. 2. — С. 42 — 48.

Рекомендована кафедрою теоретичної електротехніки та електричних вимірювань ВНТУ

Стаття надійшла до редакції 20.02.2015

Ведміцький Юрій Григорович — канд. техн. наук, доцент кафедри теоретичної електротехніки та електричних вимірювань, e-mail: wjg@ukr.net.
Вінницький національний технічний університет, Вінниця

Yu. G. Vedmitskyi[1]

Binomial transformations to construction of the generalized Cauchy problem

[1]Vinnytsia National Technical University

The paper defines direct and inverse laws of correspondence between set of the real factors and set of complex factors of two interconnected linear differential equations of any order in the generalized Cauchy problem.

Keywords: dynamical system, *real and complex forms of generalized Cauchy problem, differential equation of motion, number of degrees of freedom, electric circuit*, *transient process*.

Vedmitskyi Yurii G. — Cand. Sc. (Eng.), Assistant Professor of the Chair of Theoretical Electrical Engineering and Electric Measurements, e-mail: wjg@ukr.net

Ю. Г. Ведмицкий[1]

Биномиальные преобразования в формировании обобщенной задачи Коши

[1]Винницкий национальный технический университет

Раскрыты прямой и обратный законы соответствия между множеством действительных и множеством комплексных коэффициентов двух взаимосвязанных линейных дифференциальных уравнений произвольного порядка, где каждое способно самостоятельно и независимо описывать непрерывное движение обобщенной по числу степеней свободы динамической системы с сосредоточенными параметрами в фундаментальной задаче Коши, которую сформулировано в первом случае в терминах действительных функций времени, а во втором — их комплексных изображений, что позволяет непосредственно осуществлять постановку одной из обозначенных форм задачи Коши при помощи второй как в обобщенном по признаку порядка дифференциального уравнения виде, так и в частном случае при заданных конкретных условиях независимо от физической природы исследуемой системы.

Ключевые слова: динамическая система, действительная и комплексная формы обобщенной задачи Коши, дифференциальное уравнение движения, число степеней свободы, электрическая цепь, переходной процесс.

Ведмицкий Юрий Григорьевич — канд. техн. наук, доцент кафедры теоретической электротехники и измерительной техники, e-mail: wjg@ukr.net.