УДК 621.863.2

Р. С. Волянський[1]
О. В. Садовой[1]

КОНСТРУЮВАННЯ ФУНКЦІОНАЛІВ ЯКОСТІ ДЛЯ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ ЛІНІЙНИМИ ОБ'ЄКТАМИ З НЕВИЗНАЧЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

[1]Дніпродзержинський державний технічний університет

Показано, що у разі запису рівнянь збуреного руху лінійного динамічного об'єкта у канонічній формі, вони можуть бути представлені у формі Бруновського без виконання складних перетворень зворотними зв'язками. Використання рівнянь у формі Бруновського дозволяє усунути вплив параметричних збурень об'єкта керування на параметри регулятора та формувати еталонні траєкторії руху замкненої системи. Рух за цими траєкторіями здійснюється шляхом подачі на об'єкт керувального впливу, синтезованого за допомогою методів інтервального аналізу. Використання динамічного програмування дозволяє обрати та обґрунтувати функціонал якості, мінімізація якого здійснюється синтезованим керувальним впливом.

Ключові слова: динамічне програмування, інтервальний аналіз, функціонал якості, нелінійне керування в умовах невизначеності параметрів, збурений рух, лінійний динамічний об'єкт.

Вступ

Для низки високоточних промислових електромеханічних систем, робототехнічних і астрономічних комплексів поряд з формуванням бажаних траєкторій руху, актуальною є задача забезпечення інваріантності цих траєкторій до зміни параметрів замкнутих систем, які зумовлені дією великої кількості різних дестабілізувальних факторів. У більшості випадків розв'язання цієї задачі ускладнюється відсутністю точної інформації про параметри об'єкта.

Відомі рішення, основані на використанні класичних і сучасних методів та підходів [1], не завжди забезпечують бажану якість процесів керування, відрізняються складністю технічної реалізації, елементами суб'єктивізму під час визначення структури і параметрів регулятора та підвищеним енергоспоживанням.

Усунути зазначені недоліки можна завдяки використанню на етапі синтезу системи керування методів інтервального обчислення, які є однією з галузей сучасної математики. Відповідно до підходів інтервального аналізу [2] одночасно розглядається безліч траєкторій руху замкненої системи, які визначаються на наперед заданих інтервалах всіма можливими поєднаннями її параметрів. На сьогодні відомі роботи, в яких розглянуто синтез систем управління інтервальними об'єктами [3]. Однак внаслідок обмежених коефіцієнтів підсилення синтезованих регуляторів такі системи, залишаючись стійкими за зміни параметрів об'єкта управління, на жаль не забезпечують високу якість процесів управління та низьку чутливість до зміни цих параметрів. Тому завдання створення математичних основ синтезу високоточних систем керування, інваріантних до зміни параметрів об'єкта, є актуальним.

Метою роботи є визначення функціоналу якості, який мінімізується на траєкторіях збуреного руху довільного лінійного електромеханічного об'єкта, параметри якого змінюються в ході функціонування.

Результати досліджень

1. Перетворення об'єкта керування

Розглянемо узагальнений одноканальний лінійний електромеханічний об'єкт, рівняння збуреного руху якого мають такий вигляд:

$$p\eta_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\eta_j + m_n U \,, \tag{1}$$

де p — оператор диференціювання; a_{ij}, m_n — параметри об'єкта керування; U — керувальний вплив; η_i, η_j — компоненти вектора стану збуреного руху, які визначаються залежністю

$$\eta_i = y_i - y_i^*, \tag{2}$$

де y_i та y_i^* — поточні та бажані значення координат об'єкту керування.

Будемо вважати, що параметри об'єкта керування заздалегідь невідомі, а визначені лише з деякою точністю та можуть змінюватись в межах відомих інтервалів значень

$$A_{ij} = \left(a_{ij}^{\min}, a_{ij}^{\max}\right),\ M_n = \left(m_n^{\min}, m_n^{\max}\right), \tag{3}$$

де $a_{ij}^{\min}, a_{ij}^{\max}, m_n^{\min}, m_n^{\max}$ — відомі межи зміни параметрів об'єкта керування (1).

Такий динамічний об'єкт будемо називати інтервальним [2] та вважати, що інтервали (3) задаються заздалегідь та можуть бути як завгодно великими, щоб охопити усі можливі значення параметрів електромеханічного об'єкта.

З урахуванням інтервалів (3) рівняння руху об'єкта (1) набудуть вигляду:

$$p\eta_{\mathrm{i}} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{A}_{ij}\eta_{\mathrm{j}} + \mathbf{M}_n U \tag{4}$$

або у матричному вигляді

$$p\eta = \mathbf{A}\eta + \mathbf{M}U, \tag{5}$$

де $\eta = \begin{pmatrix}\eta_1 & \dots & \eta_n\end{pmatrix}^T$ — матриця-стовбець координат збуреного руху, $\mathbf{M} = \begin{pmatrix}0 & \dots & 0 & M_n\end{pmatrix}^T$ та $\mathbf{A} = \left\| A_{ij} \right\|$ — матриці інтервалів параметрів об'єкта керування.

Запишемо рівняння руху (5) у канонічній формі:

$$p\hat{\eta} = \mathbf{B}\hat{\eta} + \mathbf{R}\hat{U}, \tag{6}$$

де

$$\hat{\eta} = \begin{pmatrix} \dfrac{\eta_k}{p^{k-1}} & \cdots & \dfrac{\eta_k}{p} & \eta_k & p\eta_k & \cdots & p^{n-k}\eta_k \end{pmatrix}; \tag{7}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & R_n\end{pmatrix}^T, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -B_0 & -B_1 & \cdots & -B_{n-1} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

де R_n — є визначником матриці, отриманої заміною першого стовпця матриці **A** на матрицю-стовпець **M**, B_i — коефіцієнти характеристичного поліному системи (5), $\hat{U}$ — керувальний вплив, k — номер регульованої змінної стану.

Перехід від системи (5) до системи (6) дозволяє привести рівняння збуреного руху вихідного об'єкта до форми Бруновського [1] без багатократного диференціювання правої частини системи рівнянь (5). При цьому алгоритм керування визначається залежністю

$$U = \hat{U} = \frac{\hat{V} + \sum_{i=1}^{n} B_{i-1}\hat{\eta}_k}{M_n}, \tag{9}$$

де $\hat{V}$ — новий керувальний вплив,
а рівняння збуреного руху (6) набувають вигляду

$$p\hat{\eta} = \hat{B}\hat{\eta} + \hat{R}\hat{V}, \tag{10}$$

де

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}^T, \quad \hat{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Перехід від нормальної (5) та канонічної (6) форм запису рівнянь збуреного руху до рівнянь у формі Бруновського (10) дозволяє виключити із математичного опису динамічного об'єкта будь-яку невизначеність його параметрів.

2. Алгоритми керування з нелінійною активаційною функцією

Перехід до рівнянь (10) створює передумови для синтезу алгоритмів керування вигляду

$$\hat{V} = -f\left(\sum_{i=1}^{n} \hat{c}_{in}\,\hat{\eta}_i\right), \tag{12}$$

де $f(.)$ — деяка нелінійна непарна функція координат збуреного руху об'єкта керування, $\hat{c}_{in}$ — вагові коефіцієнти.

Згідно з відомими методами синтезу систем керування, формуванню траєкторії руху замкненої системи відповідає вибір бажаного розподілу коренів її характеристичного рівняння [4,5]. Отже, беручи до уваги, що корені характеристичного рівняння об'єкта (10) є нульовими, можна стверджувати, що у випадку лінійної активаційної функції коефіцієнти $\hat{c}_{in}$ є коефіцієнтами бажаного характеристичного поліному. У складніших випадках, коли активаційна функція являє собою нелінійну залежність, ці коефіцієнти, визначаючи траєкторії руху коренів характеристичного рівняння замкненої системи [5] та задаючи неекспоненційні траєкторії зміни координат збуреного руху, дозволяють суттєво підвищити швидкодію замкненої системи зі збереженням її запасу стійкості.

Алгоритм керування (12) є складовою частиною алгоритму керування (9), який подається на об'єкт керування та визначає закон керування

$$\hat{U} = \frac{-f\left(\sum_{i=1}^{n} \hat{c}_{in}\,\hat{\eta}_i\right) + \sum_{i=1}^{n} B_{i-1}\,\hat{\eta}_k}{M_n}. \tag{13}$$

Аналіз виразу (13) вказує на наявність в отриманому алгоритмі керування інтервальних коефіцієнтів, а отже відповідний керувальний вплив, що подається на об'єкти (5) та (6), також є інтервальним. Останнє твердження ускладнює формування керувального впливу, що подається на об'єкт, оскільки вираз (13) визначає цілий клас керувальних впливів, обмежених зверху та знизу такими алгоритмами керування:

$$\hat{U}^{\max} = \frac{-f\left(\sum_{i=1}^{n} \hat{c}_{in}\,\hat{\eta}_i\right) + \sum_{i=1}^{n} b_{i-1}^{\max}\,\hat{\eta}_k}{m_n^{\min}}; \quad \hat{U}^{\min} = \frac{-f\left(\sum_{i=1}^{n} \hat{c}_{in}\,\hat{\eta}_i\right) + \sum_{i=1}^{n} b_{i-1}^{\min}\,\hat{\eta}_k}{m_n^{\max}}. \tag{14}$$

Уточнити керувальний вплив, який подається на об'єкт керування та відповідає обмеженням (14), можна, якщо у відповідності до перетворення зворотними зв'язками вимагати, щоб виконувалась умова

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f\left(\sum_{i=1}^{n} \hat{c}_{in}\,\hat{\eta}_i\right)}{p} - \eta_{n-k} = \varepsilon, \tag{15}$$

де ε — деяка трубка похибки керування старшою похідною.

Одним із засобів виконання умови (15) є формування керувального впливу, що подається на об'єкт, таким чином [6]

$$\hat{U}=\hat{U}_0+\begin{cases}\gamma\left(\hat{U}^{\max}-\hat{U}^{\min}\right)g\left(\dfrac{f\left(\sum\limits_{i=k}^{n}\hat{c}_{in}\hat{\eta}_i\right)}{p}-\eta_{n-k}\right), & \text{if}\quad \dfrac{f\left(\sum\limits_{i=k}^{n}\hat{c}_{in}\hat{\eta}_i\right)}{p}-\eta_{n-k}<0;\\ \left(1-\gamma\right)\left(\hat{U}^{\max}-\hat{U}^{\min}\right)g\left(\dfrac{f\left(\sum\limits_{i=k}^{n}\hat{c}_{in}\hat{\eta}_i\right)}{p}-\eta_{n-k}\right), & \text{if}\quad \dfrac{f\left(\sum\limits_{i=k}^{n}\hat{c}_{in}\hat{\eta}_i\right)}{p}-\eta_{n-k}>0,\end{cases} \tag{16}$$

де $0<\gamma<1$ — ваговий коефіцієнт, $g(.)$ — деяка активаційна функція, використання якої у алгоритмі керування дозволяє зменшити трубку керування ε

$$\hat{U}_0=\hat{U}^{\min}+\left(\hat{U}^{\max}-\hat{U}^{\min}\right)\left(1-\gamma\right). \tag{17}$$

Алгоритм керування (16) містить дві складові, перша з яких здійснює керування об'єктом за усередненими параметрами, а друга компенсує можливий дрейф параметрів у заданих інтервалах. Наявність двох нелінійних активаційних функцій $f(.)$ та $g(.)$ формує нелінійні закони керування, використання яких дозволяє покращити статичні та динамічні показники роботи замкнених систем.

3. Розв'язання зворотної задачі динамічного програмування

Підінтегральну функцію $F\left(\hat{\eta}\right)$ функціонала якості

$$\hat{I}=\int\limits_0^\infty F\left(\hat{\eta}\right)dt, \tag{18}$$

який мінімізується керуванням (16), будемо шукати шляхом розв'язання основного функціонального рівняння Беллмана

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\hat{Q}}{\partial\hat{\eta}_i}p\hat{\eta}_i+F\left(\hat{\eta}\right)=0 \quad \text{або} \quad F\left(\hat{\eta}\right)=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\hat{Q}}{\partial\hat{\eta}_i}p\hat{\eta}_i, \tag{19}$$

де Q — функція Ляпунова

$$Q=\sum_{i,j=1}^{n}q_{ij}\hat{\eta}_i\hat{\eta}_j, \tag{20}$$

коефіцієнти якої визначаються таким чином:

$$\begin{aligned}&q_{in}=c_{in}, \quad i=1,\ldots,n;\\ &q_{ij}=q_{in}q_{jn}, \quad i=1,\ldots,n, \quad j=1,\ldots,n.\end{aligned} \tag{21}$$

Враховуючи залежності (9) та (10), представимо повну похідну функції Ляпунова (20), що входить в перший доданок рівняння (19), так:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\hat{Q}}{\partial\hat{\eta}_i}p\hat{\eta}_i=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial\hat{Q}}{\partial\hat{\eta}_i}\hat{\eta}_{i+1}-\frac{\partial\hat{Q}}{\partial\hat{\eta}_n}\sum_{i=1}^{n}b_{i-1}\hat{\eta}_k+\frac{\partial\hat{Q}}{\partial\hat{\eta}_n}\sum_{i=1}^{n}B_{i-1}\hat{\eta}_k-\frac{\partial\hat{Q}}{\partial\hat{\eta}_n}f\left(\sum_{i=1}^{n}\hat{c}_{in}\hat{\eta}_i\right). \tag{22}$$

У випадку, коли параметри об'єкта керування відомі точно, перші три доданки похідної (22), які характеризують вільний рух системи, повністю компенсують один одного. Проте у випадку керування інтервальними об'єктами ця компенсація за різних значень параметрів відбувається не повністю. Граничні значення повної похідної функції Ляпунова визначаються залежностями

$$\left.\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\hat{Q}}{\partial\hat{\eta}_i}p\hat{\eta}_i\right|_{\min}=\sum_{i=1}^{n-1}c_{in}\hat{\eta}_i\hat{\eta}_{i+1}-\sum_{i=1}^{n-1}c_{in}\hat{\eta}_i\sum_{i=1}^{n}b_{i-1}\hat{\eta}_k+\sum_{i=1}^{n-1}c_{in}\hat{\eta}_i\sum_{i=1}^{n}b_{i-1}^{\min}\hat{\eta}_k-\sum_{i=1}^{n-1}c_{in}\hat{\eta}_i f\left(\sum_{i=1}^{n}\hat{c}_{in}\hat{\eta}_i\right); \quad (23)$$

$$\left.\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\hat{Q}}{\partial\hat{\eta}_i}p\hat{\eta}_i\right|_{\max}=\sum_{i=1}^{n-1}c_{in}\hat{\eta}_i\hat{\eta}_{i+1}-\sum_{i=1}^{n-1}c_{in}\hat{\eta}_i\sum_{i=1}^{n}b_{i-1}\hat{\eta}_k+\sum_{i=1}^{n-1}c_{in}\hat{\eta}_i\sum_{i=1}^{n}b_{i-1}^{\max}\hat{\eta}_k-\sum_{i=1}^{n-1}c_{in}\hat{\eta}_i f\left(\sum_{i=1}^{n}\hat{c}_{in}\hat{\eta}_i\right). \quad (24)$$

Підставляючи граничні значення повної похідною функції Ляпунова за часом (23) та (24) у вираз (19), визначимо шуканий функціонал якості

$$I=\int_0^{\infty}\begin{cases}\sum_{i=1}^{n-1}c_{in}\hat{\eta}_i\left[-\hat{\eta}_{i+1}+\sum_{i=1}^{n}\left(b_{i-1}-b_{i-1}^{\min}\right)\hat{\eta}_k+f\left(\sum_{i=1}^{n}\hat{c}_{in}\hat{\eta}_i\right)\right]dt, & \text{if } \dfrac{f\left(\sum_{i=k}^{n}\hat{c}_{in}\hat{\eta}_i\right)}{p}+\eta_{n-k}<0;\\ \sum_{i=1}^{n-1}c_{in}\hat{\eta}_i\left[-\hat{\eta}_{i+1}+\sum_{i=1}^{n}\left(b_{i-1}-b_{i-1}^{\max}\right)\hat{\eta}_k+f\left(\sum_{i=1}^{n}\hat{c}_{in}\hat{\eta}_i\right)\right]dt, & \text{if } \dfrac{f\left(\sum_{i=k}^{n}\hat{c}_{in}\hat{\eta}_i\right)}{p}+\eta_{n-k}>0.\end{cases} \quad (25)$$

Таким чином, можна зробити висновок, що знайдений функціонал якості (25) мінімізуються керуючим впливом (16) на траєкторіях збуреного руху (6).

Висновки

Використання динамічного програмування дозволяє визначити функціонали якості, мінімізація яких відбувається розривними керуваннями на траєкторіях збуреного руху інтервальних лінійних динамічних об'єктів. Отриманий функціонал якості є кусково-безперервним та має розривний інтегрант. Точки розриву інтегранта визначаються значенням старшої похідної регульованої координати та інтегралом від нового керувального впливу, що є розв'язанням останнього рівняння системи збуреного руху об'єкта керування, наведеної у формі Бруновського. Кожна складова інтегранта знайденого функціоналу якості містить складові вільного руху об'єкта керування, складові вимушеного руху та складові, які враховують відхилення параметрів об'єкта керування від їх граничних значень.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Пупков К. А. Методы классической и современной теории автоматического управления. Том 5. Методы современной теории автоматического управления [Текст] / К. А. Пупков, Н. Д. Егупов. — М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. — 783 с.

2. Applied interval analysis [Текст] / Luc Jaulin, Michel Kieffer, Olivier Didrit, Eric Walter. — London. : Springer, 2001. — 379 p.

3. Linear optimization problem with inexact data [Текст] / [M. Fiedler et al.]. — New York : Springer, 2006. — 224 p.

4. Ким Д. П. Теория автоматического управления. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы [Текст] / Д. П. Ким. — М. : Физматлит, 2004. — 464 с.

5. Волянский Р. С. Синтез оптимальной системы управления с нелинейной активационной функцией [Текст] / Р. С. Волянский, А. В. Садовой // Электротехнические и компьютерные системы. — 2014. — № 15 (91) — С. 69—71.

6. Волянский Р. С. Синтез управляющего воздействия для электромеханических объектов с неизвестными параметрами / Р. С. Волянский, А. В. Садовой // Вісник НТУ «ХПІ». — Харьков : ХПИ. — 2015. — № 12 (1121). — С. 60—63.

Рекомендована кафедрою електромеханічних систем автоматизації в промисловості і на транспорті ВНТУ

Стаття надійшла до редакції 17.11.2015

Волянський Роман Сергійович — канд. техн. наук, доцент, докторант кафедри електротехніки та електромеханіки, e-mail: voliansky@ua.fm;

Садовой Олександр Валентинович — д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри електромеханіки, проректор з наукової роботи.

Дніпродзержинский державний технічний університет, Дніпродзержинськ

R. S. Volianskyi[1]
O. V. Sadovoi[1]

Determination of Quality Functional for Control System of Linear Objects with Uncertain Parameters

[1]Dniprodzerzhynsk State Technical University

It has been shown that the writing of the linear dynamic objects perturbed motions equations in canonical form let us represent these equations in the Brunovsky form without performing complex feedback transformations. Using the differential equations in the Brunovsky form eliminates the influence of control objects parameters on the parameters of the regulator and forms the ideal trajectories of control object. The movement along these trajectories is done by applying to the dynamical object control action synthesized using the methods of interval analysis. Using dynamic programming allows us to select and justify quality functional, which is minimized by the synthesized control action.

Keywords: dynamic programming, interval analysis, functional qualities, nonlinear control under uncertainty parameters waste motion, linear dynamic object.

Volianskyi Roman S. — Cand. Sc. (Eng.), Assistant Professor, Doctoral Student of the Chair of Electrical Engineering and Electromechanics, e-mail: voliansky@ua.fm;
Sadovoy Oleksandr V. — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Head of the Chair of Electromechanics, Vice-rector of Research

Р. С. Волянский[1]
А. В. Садовой[1]

Конструирование функционала качества для систем управления линейными объектами с неопределенными параметрами

[1]Днепродзержинский государственный технический университет

Показано, что путем записи уравнений возмущенного движения линейного динамического объекта в канонической форме уравнения динамики объекта могут быть представлены в форме Бруновского без выполнения сложных преобразований обратными связями. Использование уравнений в форме Бруновского позволяет устранить влияние параметров объекта управления на коэффициенты регулятора и формировать идеальные траектории движения объекта управления. Движение по этим траекториям осуществляется путем подачи на объект управляющего воздействия, синтезированного с помощью методов интервального анализа. Использование динамического программирования позволяет выбрать и обосновать функционал качества, минимизация которого осуществляется синтезированным управляющим воздействием.

Ключевые слова: динамическое программирование, интервальный анализ, функционал качества, нелинейное управление в условиях неопределенности параметров, возмущенное движение, линейный динамический объект.

Волянский Роман Сергеевич — канд. техн. наук, доцент, докторант кафедры электротехники та электромеханики, e-mail: voliansky@ua.fm;
Садовой Александр Валентинович — д-р. техн. наук, профессор, заведующий кафедрой электромеханики, проректор по научной работе