ЕНЕРГЕТИКА ТА ЕЛЕКТРОТЕХНІКА

УДК 517.977

Б. І. Мокін[1]
О. Б. Мокін[1]
І. О. Чернова[1]
С. О. Довгополюк[1]

ЕКВІВАЛЕНТУВАННЯ ЗАМКНУТОЇ ЛІНІЙНОЇ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ ЗА НАЯВНОСТІ ПОХІДНОЇ У ПРАВІЙ ЧАСТИНІ ЇЇ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ

[1]Вінницький національний технічний університет

Запропоновано метод еквівалентування за критичною частотою лінійної динамічної систем високого порядку, що має похідну у правій частині математичної моделі.

Ключові слова: замкнута лінійна динамічна система, математична модель розімкнутого контуру, еквівалентування, критична частота.

Вихідні передумови і постановка задачі

В роботах [1, 2] визначені умови і запропоновано метод еквівалентування лінійних динамічних систем, що описуються диференціальними рівняннями

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + ... + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 x, \quad n > 3, \tag{1}$$

диференціальними рівняннями, що мають такий самий вигляд, але 1-го, 2-го або 3-го порядку.

В цій статті визначаються умови еквівалентування і пропонується еквівалентна за критичною частотою $\omega_{cr.}$ математична модель розімкнутого контуру замкнутої лінійної динамічної системи, що описується диференціальним рівнянням

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + ... + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x, \quad n > 4, \tag{2}$$

у вигляді диференціального рівняння четвертого порядку:

$$a_4 \frac{d^4 y}{dt^4} + a_3 \frac{d^3 y}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x, \tag{3}$$

показується, що моделями нижчого порядку розімкнутий контур такої замкнутої динамічної систем у зв'язку з необхідністю забезпечення її стійкості еквівалентованим бути не може в принципі, і пропонується метод ідентифікації цієї еквівалентної моделі.

Ця задача є актуальною у зв'язку з тим, що математичними моделями (2) описуються розімкнуті контури замкнутих систем керування лінійними динамічними об'єктами з пропорційно-диференціальними (ПД) регуляторами, а використання критичної частоти в якості критерію еквівалентування зумовлено тим, що саме за місцем розташування цієї частоти на частотній осі визначається чи буде система автоматичного керування динамічним об'єктом стійкою після замикання її розімкнутого контуру одиничним зворотним зв'язком з ПД-регулятором чи ні.

А завершимо постановку задачі нагадуванням про те, що термін «еквівалентування» будемо, як це широко вживано, використовувати в якості скороченого варіанту виразу «пошук математичної моделі мінімального порядку»

Розв'язання поставленої задачі

Розв'язувати поставлену задачу почнемо з доведення твердження, що в задачі оцінки стійкості диференціальне рівняння (3) дійсно є рівнянням мінімального порядку для еквівалентування за критичною частотою ω_{cr} розімкнутого контуру замкнутої лінійної динамічної системи, що описується математичною моделлю (2).

Це доведення почнемо з розгляду рівняння (2), якому на комплексній площині, як відомо з теорії автоматичного керування, викладеної, наприклад, в роботі [3], після застосування до нього перетворення Лапласа за нульових початкових умов можна поставити у відповідність передаточну функцію $W_n(p)$, що матиме вигляд

$$W_n(p) = \frac{b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + 1}, \tag{4}$$

яка, у свою чергу, в частотній області породжує амплітудно-фазову частотну характеристику (АФЧХ) $W_n(j\omega)$, де

$$W_n(j\omega) = W_n(p)\big|_{P=j\omega} = R_n(\omega) + jQ_n(\omega) = A_n(\omega)e^{\phi_n(\omega)}; \tag{5}$$

$$A_n(\omega) = \sqrt{R_n^2(\omega) + Q_n^2(\omega)}; \quad \phi_n(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{Q_n(\omega)}{R_n(\omega)}, \tag{6}$$

а АФЧХ (5), окрім дійсної частотної характеристики $R_n(\omega)$, уявної частотної характеристики $Q_n(\omega)$, амплітудної частотної характеристики $A_n(\omega)$ і фазової частотної характеристики $\phi_n(\omega)$, породжує ще й логарифмічну амплітудну частотну характеристику (ЛАЧХ) $L_n(\omega)$ та логарифмічну фазову частотну характеристику (ЛФЧХ) $\phi_n^*(\omega)$, де ЛАЧХ — це

$$L_n(\omega) = 20\lg A_n(\omega), \tag{7}$$

а ЛФЧХ $\phi_n^*(\omega)$ відрізняється від ФЧХ $\phi_n(\omega)$ лише тим, що частотна вісь в ній масштабована в декадах.

По ЛАЧХ і ЛФЧХ, як відомо [3], визначають дві характерні для замкнутих динамічних систем частоти — частоту зрізу ω_{cut} та критичну частоту ω_{cr}, які є коренями рівнянь

$$L_n(\omega_{cut}) = 0; \quad \phi_n^*(\omega_{cr}) = -\pi. \tag{8}$$

На рис. 1 проказані орієнтовні графіки для ЛАЧХ та ЛФЧХ розімкнутого контуру замкнутої динамічної системи, процеси в якій описуються диференціальним рівнянням (2), для випадків, коли

$$\omega_{cut} < \omega_{cr} \tag{9}$$

та коли

$$\omega_{cut} > \omega_{cr}. \tag{10}$$

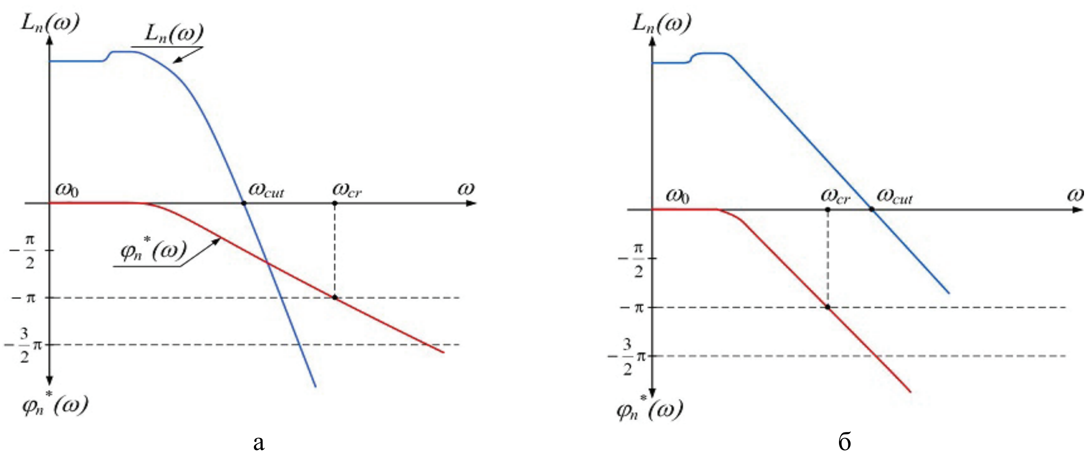


Рис. 1. Орієнтовні графіки ЛАЧХ та ЛФЧХ розімкнутого контуру замкнутої лінійної динамічної системи, процеси в якій описуються математичною моделлю (2), для випадків: а — коли $\omega_{cut} < \omega_{cr}$; б — коли $\omega_{cut} > \omega_{cr}$

У зв'язку з тим, що на графіках ЛАЧХ та ЛФЧХ на початку системи координат частота не може бути рівною нулю, оскільки логарифм нуля прямує в мінус нескінченність, на рис. 1 координатні осі проведені для значення частоти ω_0, достатньо близького, але не рівного нулю.

Як відомо [3], лише коли виконується нерівність (9), стійка розімкнута динамічна система при її замиканні одиничним негативним зворотним зв'язком залишається стійкою. Якщо ж має місце нерівність (10), то стійка разімкнута динамічна система при її замиканні одиничним негативним зв'язком втрачає стійкість і стає нестійкою. Ось чому при синтезі еквівалентної математичної моделі критична частота ω_{cr} динамічної системи, разімкнутий контур якої замикається одиничним негативним зворотним зв'язком і для спрощення аналізу еквівалентується, повинна залишатись такою ж, якою вона була до еквівалентування.

А далі випишемо передаточну функцію (4) для $n=2$, тобто запишемо

$$W_2(p)=\frac{b_1 p+b_0}{a_2 p^2+a_1 p+1}=\frac{b_1}{a_2}\frac{\left(p+\dfrac{b_0}{b_1}\right)}{(p-p_1)(p-p_2)}, \tag{11}$$

де p_1, p_2 — корені характеристичного рівняння системи 2-го порядку, записаного у вигляді

$$p^2+\frac{a_1}{a_2}p+\frac{1}{a_2}=0, \tag{12}$$

які для стійкої динамічної системи, як відомо [3], є від'ємними дійсними числами або парою комплексно-спряжених чисел з від'ємною дійсною частиною, а p_1^* — корінь двочлена, що стоїть в чисельнику виразу (11). Для спрощення аналізу припустимо, що ці корені є від'ємними числами, тобто вважатимемо, що $p_1=-\alpha_1$, $p_2=-\alpha_2$, $p_1^*=-\alpha_1^*$. Тоді вираз (11) можна записати у вигляді

$$W_2(p)=W_0(p)W_{a1}(p)W_{a2}(p)W_{f1}(p), \tag{13}$$

де $W_0(p)$ — передаточна функція підсилювальної ланки

$$W_0(p)=\frac{b_1}{a_2}, \tag{14}$$

$W_{a1}(p)$ та $W_{a2}(p)$ — передаточні функції аперіодичних ланок 1-го порядку, які для коренів p_1 та p_2 матимуть вигляд, відповідно

$$W_{a1}(p)=\frac{1}{p+\alpha_1};\quad W_{a2}(p)=\frac{1}{p+\alpha_2}; \tag{15}$$

$W_{f1}(p)$ — передаточна функція форсувальної ланки 1-го порядку

$$W_{f1}(p)=p+\alpha_1^*=p+\frac{b_0}{b_1}. \tag{16}$$

Якщо у виразі (13) ми перейдемо відповідно до виразу (5) до АФЧХ, то будемо мати

$$W_2(j\omega)=W_0(j\omega)W_{a1}(j\omega)W_{a2}(j\omega)W_{f1}(j\omega) \tag{17}$$

або

$$A_2(\omega)e^{j\phi_2(\omega)}=A_0(\omega)e^{j\phi_0(\omega)}A_{a1}(\omega)e^{j\phi_{a1}(\omega)}A_{a2}(\omega)e^{j\phi_{a2}(\omega)}A_{f1}(\omega)e^{j\phi_{f1}(\omega)}, \tag{18}$$

де

$$A_2(\omega)=A_0(\omega)A_{a1}(\omega)A_{a2}(\omega)A_{f1}(\omega); \tag{19}$$

$$\phi_2(\omega)=\phi_0(\omega)+\phi_{a1}(\omega)+\phi_{a2}(\omega)+\phi_{f1}(\omega) \tag{20}$$

і де відповідно до виразу (6)

$$\phi_0(\omega)=\mathrm{arctg}0=0; \tag{21}$$

$$\phi_{a1}(\omega)=-\mathrm{arctg}\frac{\omega}{\alpha_1};\ \ \phi_{a2}(\omega)=-\mathrm{arctg}\frac{\omega}{\alpha_2}; \tag{22}$$

$$\phi_{f1}(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{b_1\omega}{b_0}. \tag{23}$$

Із виразу (22) витікає, що

$$\begin{aligned} \phi_{a1}(\omega)\big|_{\omega=0} &= \phi_{a2}(\omega)\big|_{\omega=0} = 0; \\ \phi_{a1}(\omega)\big|_{\omega=\infty} &= \phi_{a2}(\omega)\big|_{\omega=\infty} = -\frac{\pi}{2}, \end{aligned} \tag{24}$$

а з виразу (23) витікає, що

$$\phi_{f1}(\omega)\big|_{\omega=0} = 0, \phi_{f1}(\omega)\big|_{\omega=\infty} = \frac{\pi}{2}. \tag{25}$$

Нехай $\alpha_1 > \alpha_2$.

У цьому випадку ПД-регулятор налагоджується так, щоб виконувалась рівність

$$\alpha_1 = \frac{b_0}{b_1}. \tag{26}$$

Внаслідок такого налагодження ПД-регулятора в усьому діапазоні змін частоти від нуля до нескінченності буде виконуватись рівність

$$\phi_{a1}(\omega) + \phi_{f1}(\omega) = 0\,, \tag{27}$$

а тому для будь-якого реального значення частоти буде справедливою нерівність

$$\phi_2(\omega) > -\frac{\pi}{2}\,, \tag{28}$$

яка робить неможливим еквівалентування математичною моделлю 2-го порядку разімкнутого контуру динамічної системи, що описується диференціальним рівнянням (2), в задачі оцінки її стійкості після замикання одиничним негативним зворотним зв’язком, оскільки для моделі 2-го порядку (11) критична частота ω_{cr} не існує взагалі через те, що для цієї моделі не може бути складеним відповідне рівняння із системи рівнянь (8). А тому моделі другого порядку, запропоновані в роботах [4—9], для еквівалентування розімкнутих контурів динамічних систем, що описуються в дійсності диференціальними рівняннями (2), в задачах оцінки стійкості цих динамічних систем після їх замикання одиничним негативним зворотним зв’язком в якості еквівалентних моделей використаними не можуть бути в принципі.

А тепер запишемо передаточну функцію (4) для $n = 3$, тобто у вигляді

$$W_3(p) = \frac{b_1 p + b_0}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + 1} \tag{29}$$

або у тотожному вигляді

$$W_3(p) = \frac{b_1}{a_3}\frac{\left(p + \frac{b_0}{b_1}\right)}{(p - p_1)(p - p_2)(p - p_3)}\,, \tag{30}$$

де p_1, p_2, p_3 — корені характеристичного рівняння системи 3-го порядку, записаного у вигляді

$$p^3 + \frac{a_2}{a_3}p^2 + \frac{a_1}{a_3}p + \frac{1}{a_3} = 0\,, \tag{31}$$

які для стійкої динамічної системи, як відомо [3], є від’ємними дійсними числами або одним від’ємним дійсним числом і парою комплексно-спряжених чисел з від’ємною дійсною частиною. Для спрощення аналізу припустимо, що ці корені є від’ємними дійсними числами, тобто вважатимемо, що $p_1 = -\alpha_1$, $p_2 = -\alpha_2$, $p_3 = -\alpha_3$. Тоді вираз (30) можна записати у вигляді

$$W_3(p) = W_0\,(p)W_{a1}(p)W_{a2}(p)W_{a3}(p)W_{f1}(p)\,, \tag{32}$$

де $W_0(p)$, $W_{a1}(p)$, $W_{a2}(p)$, $W_{f1}(p)$ мають вигляд, представлений виразами (14), (15) та (16), відповідно, а передаточна функція $W_{a3}(p)$ ще однієї аперіодичної ланки 1-го порядку має вигляд

$$W_{a3}(p) = \frac{1}{p + \alpha_3}. \qquad (33)$$

Якщо у виразі (32) перейдемо у відповідності з виразом (5) до АФЧХ, то отримаємо вираз

$$W_3(j\omega) = W_0(j\omega)W_{a1}(j\omega)W_{a2}(j\omega)W_{a3}(j\omega)W_{f1}(j\omega), \qquad (34)$$

з якого, після представлення його у вигляді, подібному до (18), будемо мати

$$\phi_3(\omega) = \phi_0(\omega) + \phi_{a1}(\omega) + \phi_{a2}(\omega) + \phi_{a3}(\omega) + \phi_{f1}(\omega), \qquad (35)$$

де $\phi_0(\omega)$, $\phi_{a1}(\omega)$, $\phi_{a2}(\omega)$, $\phi_{f1}(\omega)$ мають вигляд, представлений виразами (21)—(23), та діапазон значень, представлений виразами (24) і (25), а $\phi_{a3}(\omega)$ має вигляд

$$\phi_{a3}(\omega) = -\mathrm{arctg}\frac{\omega}{\alpha_3} \qquad (36)$$

і діапазон значень

$$\phi_{a3}(\omega)\big|_{\omega=0} = 0, \;\; \phi_{a3}(\omega)\big|_{\omega=\infty} = -\frac{\pi}{2}. \qquad (37)$$

Нехай $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$.

У цьому випадку, як і у попередньому, ПД-регулятор налагоджують так, щоб виконувалась рівність (26), що приводить до виконання рівності (27) і нерівності

$$\phi_3(\omega) = \phi_{a2}(\omega) + \phi_{a3}(\omega) > -\pi \qquad (38)$$

для будь-якого реального значення частоти і робить неможливим еквівалентування математичною моделлю 3-го порядку розімкнутого контуру динамічної системи, що описується диференціальним рівнянням (2), в задачі оцінки її стійкості після замикання одиничним негативним зворотним зв'язком, оскільки і для моделі 3-го порядку, що має вигляд (29), критичної частоти ω_{cr} не існує взагалі, тому що ні за яких умов для цієї моделі не може бути складеним рівняння (8).

А тепер випишемо передаточну функцію (4) для $n = 4$, тобто запишемо її у вигляді

$$W_4(p) = \frac{b_1 p + b_0}{a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + 1}, \qquad (39)$$

або

$$W_4(p) = \frac{b_1}{a_4}\frac{\left(p + \frac{b_0}{b_1}\right)}{(p - p_1)(p - p_2)(p - p_3)(p - p_4)}, \qquad (40)$$

де p_1, p_2, p_3, p_4 — корені характеристичного рівняння системи 4-го порядку, записаного у вигляді

$$p^4 + \frac{a_3}{a_4}p^3 + \frac{a_2}{a_4}p^2 + \frac{a_1}{a_4}p + \frac{1}{a_4} = 0, \qquad (41)$$

які для стійкої динамічної системи, як відомо [3], є від'ємними дійсними числами, або двома від'ємними дійсними числами і парою комплексно-спряжених чисел з від'ємною дійсною частиною, або двома парами комплексно-спряжених чисел з від'ємними дійсними частинами. Для спрощення аналізу припустимо, щодо ці корені є від'ємними дійсними числами, тобто вважатимемо, що $p_1 = -\alpha_1$, $p_2 = -\alpha_2$, $p_3 = -\alpha_3$, $p_4 = -\alpha_4$. У цьому випадку вираз (40) можна записати у вигляді

$$W_4(p) = W_0(p)W_{a1}(p)W_{a2}(p)W_{a3}(p)W_{a4}(p)W_{f1}(p), \qquad (42)$$

де $W_0(p)$, $W_{a1}(p)$, $W_{a2}(p)$, $W_{f1}(p)$, $W_{a3}(p)$ мають той самий вигляд, що вже представлений виразами ми відповідно (14), (15), (16) і (33), а передаточна функція $W_{a4}(p)$ ще однієї аперіодичної ланки 1-го порядку має вигляд

$$W_{a4}(p) = \frac{1}{p + \alpha_4}. \tag{43}$$

Якщо у виразі (42) перейдемо у відповідності з (5) до АФЧХ, то отримаємо вираз

$$W_4(j\omega) = W_0\,(j\omega)W_{a1}(j\omega)W_{a2}(j\omega)W_{a3}(j\omega)W_{a4}(j\omega)W_{f1}(j\omega), \tag{44}$$

з якого після представлення його у вигляді, подібному до (18), будемо мати:

$$\phi_4(\omega) = \phi_0(\omega) + \phi_{a1}(\omega) + \phi_{a2}(\omega) + \phi_{a3}(\omega) + \phi_{a4}(\omega) + \phi_{f1}(\omega), \tag{45}$$

де $\phi_0(\omega), \phi_{a1}(\omega), \phi_{a2}(\omega), \phi_{a3}(\omega), \phi_{f1}(\omega)$ мають вигляд, представлений виразами відповідно (21)—(23), (36) та діапазон значень, представлений виразами (24), (25), (37), а $\phi_{a4}(\omega)$ має вигляд

$$\phi_{a4}(\omega) = -\mathrm{arctg}\frac{\omega}{\alpha_4} \tag{46}$$

та діапазон значень

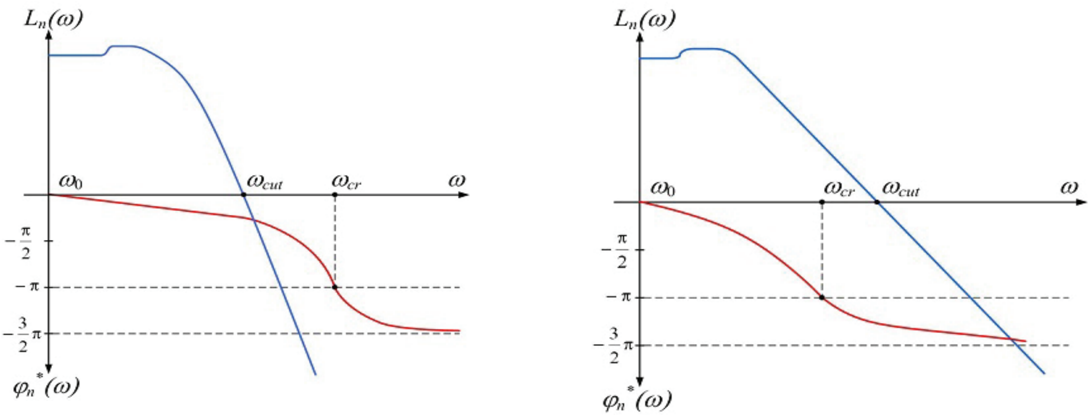
$$\phi_{a4}(\omega)\big|_{\omega=0} = 0, \;\; \phi_{a4}(\omega)\big|_{\omega=\infty} = -\frac{\pi}{2}. \tag{47}$$

Тепер припустимо, що $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4$.

У цьому випадку, як і в попередніх, ПД-регулятор налагоджується так, щоб виконувалась рівність (26), що приводить до виконання рівності (27), а тому існують такі значення частоти, для яких виконується нерівність

$$\phi_4(\omega) = \phi_{a2}(\omega) + \phi_{a3}(\omega) + \phi_{a4}(\omega) > -\frac{3}{2}\pi, \tag{48}$$

яка дозволяє еквівалентувати математичною моделлю 4-го порядку розімкнутий контур динамічної системи, що описується диференціальним рівнянням (2), в задачі оцінки її стійкості після замикання одиничним негативним зворотним зв'язком, оскільки для моделі 4-го порядку, що має вигляд (39), критична частота ω_{cr} існує, тому що для неї, як показано на рис. 2, може бути складене рівняння (8), розв'язуючи яке визначається її реальне значення.



а б

Рис. 2. Орієнтовні графіки ЛАЧХ та ЛФЧХ розімкнутого контуру замкнутої лінійної динамічної системи, процеси в якому можна описати еквівалентною математичною моделлю для випадків: а — коли $\omega_{cut} < \omega_{cr}$; б — коли $\omega_{cut} > \omega_{cr}$

У підсумку авторами отримано право стверджувати, що в задачі оцінки стійкості розімкнутий контур замкнутої лінійної динамічної системи, яка описується диференціальним рівнянням (2), тобто рівнянням, що має довільний порядок вище п'ятого і першу похідну у правій частині, може бути описаний еквівалентним диференціальним рівнянням, що має першу похідну у правій частині і четвертий порядок.

Важливе зауваження.

Незважаючи на те, що доведення умови про мінімальний порядок еквівалентного диференціального рівняння з похідною у правій частині здійснено для випадку, коли корені його характеристичного рівняння були від'ємними дійсними числами, це доведення залишається справедливим і для випадку, коли замість кожних двох коренів характеристичного рівняння, які є від'ємними дійсними числами, будемо розглядати пару коренів, які є комплексно-спряженими числами з від'ємною дійсною частиною, оскільки кожна така пара комплексно-спряжених коренів, як відомо з теорії автоматичного керування [3], задає таку ж полосу значень фазової частотної характеристики в діапазоні $(-\pi, 0]$, як і два корені, що є від'ємними дійсними числами.

А далі приступимо до ідентифікації еквівалентної моделі (3). Цю задачу будемо розв'язувати з використанням значень ЛАЧХ $L_n(\omega_i)$, $i=1,2,...,N$ та ЛФЧХ $\phi_n^*(\omega_i), i=1,2,...,N$, розрахованих за експериментально знятими АЧХ $A_n(\omega_i)$, $i=1,2,...,N$ та ФЧХ $\phi_n(\omega_i)$, $i=1,2,...,N$ розімкнутої динамічної системи, що еквівалентується, і теоретично визначених виразів для ЛАЧХ $L_4(\omega_i)$, $i=1,2,...,N$ та ЛФЧХ $\phi_4^*(\omega_i)$, $i=1,2,...,N$ розімкнутого контуру еквівалентної системи за допомогою методу, який об'єднує в собі умову рівності значень ЛАЧХ та ЛФЧХ розімкнутого контуру динамічної системи на частотах ω_0, ω_{cr} до і після еквівалентування у вигляді

$$L_n(\omega_0) = L_4(\omega_0); \;\; \phi_n^*(\omega_{cr}) = \phi_4^*(\omega_{cr}) \tag{49}$$

для диференціальної моделі (2), з використанням методу найменших квадратів для інших точок ЛАЧХ, тобто з використанням критерію

$$\Sigma_4 = \sum_{i=1}^{N} \left(L_n(\omega_i) - L_4(\omega_i) \right)^2, \tag{50}$$

при цьому для виразу (50) точки на частотній осі є точками з послідовності $\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, ..., \omega_N, \omega_{cr}\}$.

Методика побудови цієї послідовності за даними експерименту викладена в роботах [1, 2].

А в результаті розв'язання задачі стають відомими числові значення коефіцієнтів a_i, $i=1,2,3,4$ та b_0, b_1 еквівалентної моделі (3).

Розв'язувати поставлену задачу почнемо з визначення виразів для ЛФЧХ $\phi_4(\omega)$ та ЛАЧХ $L_4(\omega)$ за допомогою співвідношень (5)—(7), в яких вважатимемо $n=4$, та еквівалентної моделі (39). В результаті отримаємо

$$\phi_4(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{b_1\omega\left(1 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4\right) - b_0\left(a_1\omega - a_3\omega^3\right)}{b_0\left(1 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4\right) + b_1\omega\left(a_1\omega - a_3\omega^3\right)}; \tag{51}$$

$$L_4(\omega) = 10\left(\lg\left(b_0^2 + b_1^2\omega^2\right) - \lg\left((1 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4)^2 + (a_1\omega - a_3\omega^3)^2\right)\right). \tag{52}$$

Оскільки $\omega_0 \ll 1$, то з виразу (52) маємо

$$L_4(\omega_0) \approx 10\lg b_0^2 = 20\lg b_0. \tag{53}$$

Підставляючи вираз (53) в перше рівняння системи (49), отримаємо:

$$b_0 = 10^{\frac{L_n(\omega_0)}{20}}. \tag{54}$$

А підставляючи ω_{cr} у вираз (51), результат цієї підстановки — в друге рівняння системи (49) та враховуючи друге рівняння системи (8), отримаємо рівняння:

$$\operatorname{arctg} \frac{b_1\omega_{cr}\left(1 - a_2\omega_{cr}^2 + a_4\omega_{cr}^4\right) - b_0\left(a_1\omega_{cr} - a_3\omega_{cr}^3\right)}{b_0\left(1 - a_2\omega_{cr}^2 + a_4\omega_{cr}^4\right) + b_1\omega_{cr}\left(a_1\omega_{cr} - a_3\omega_{cr}^3\right)} = -\pi, \tag{55}$$

з якого витікає, що

$$b_1 = \frac{b_0\left(a_1\omega_{cr} - a_3\omega_{cr}^3\right)}{\omega_{cr}\left(1 - a_2\omega_{cr}^2 + a_4\omega_{cr}^4\right)}. \tag{56}$$

Із виразу (54) витікає, що для визначення числового значення коефіцієнта b_0 достатньо лише вихідних даних, а з виразу (56) — що визначити числове значення коефіцієнта b_1 можна лише знаючи числові значення коефіцієнтів a_1, a_2, a_3, a_4. Ось їх і визначимо методом найменших квадратів, скориставшись критерієм (50). Для цього після підстановки виразу (52) у вираз (50) візьмемо першу частинну похідну від трансформованого таким чином виразу (50) по кожному з коефіцієнтів a_1, a_2, a_3, a_4

$$\frac{\partial \Sigma_4}{\partial a_k} = f_k\left(a_1, a_2, a_3, a_4, b_0, b_1\right),\ k = \overline{1, 4}, \tag{57}$$

прирівняємо кожну з отриманих функцій шести змінних до нуля і отримаємо чотири рівняння:

$$f_k\left(a_1, a_2, a_3, a_4, b_0, b_1\right) = 0, \quad k = \overline{1, 4}, \tag{58}$$

розв'язуючи які разом з рівняннями (54) та (56) як систему шести рівнянь з шести невідомими, визначимо числові значення усіх коефіцієнтів еквівалентної математичної моделі (3) розімкнутого контуру замкнутої лінійної динамічної системи, який в загальному вигляді описується диференціальним рівнянням (2).

Щоб не перевантажувати статтю громіздкими виразами для частинних похідних (57), не приводимо їх у деталізованому вигляді як у зв'язку з тим, що в роботах [1, 2] уже показано, як брати подібного роду похідні, так і тому, що в пакеті прикладних програм MATLAB для їхнього отримання є стандартна функція.

Висновки

1. Доведено, що мінімальний порядок диференціального рівняння з першою похідною в правій частині, за використання його в якості еквівалентної математичної моделі розімкнутого контуру замкнутої лінійної динамічної системи із ПД-регулятором, у задачі оцінки її стійкості при замиканні одиничним негативним зворотним зв'язком повинен дорівнювати чотирьом.

2. Запропоновано метод ідентифікації еквівалентної математичної моделі розімкнутого контуру лінійної динамічної системи із ПД-регулятором, який умову рівності в двох характерних точках значень ЛАЧХ та ЛФЧХ розімкнутого контуру лінійної динамічної системи, яка еквівалентується, об'єднує з методом найменших квадратів в проміжку між цими точками.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Определение условий и разработка методов описания процессов в сложных динамических объектах эквивалентными моделями не выше третьего порядка / А. Б. Мокин, В. Б. Мокин, Б. И. Мокин, И. А. Чернова // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». — 2016. — № 2. — С. 37—49.
2. Determining the Conditions and Designing the Methods for Description of Processes in Complex Dynamic Objects by Equivalent Models not Higher than the Third-Order / Alexander B. Mokin, Vitaliy B. Mokin, Boris I. Mokin, Irina A. Chernova // Journal of Automation and Information Sciences. — Vol. 48. — 2016. — Issue 3. — Pp. 83—97.
3. Макаров И. М. Линейные автоматические системы (элементы теории, методы расчета и справочный материал) / И. М. Макаров, Б. М. Менский. — М. : Машиностроение, 1982. — 505 с.
4. Ишлинский А. Ю. Механика гироскопических систем / А. Ю. Ишлинский. — М. : Изд-во АН СССР, 1963. — 213 с.
5. Ишлинский А. Ю. Инерциальное управление баллистическими ракетами. Некоторые теоретические вопросы / А. Ю. Ишлинский. — М. : Наука, 1968. — 143 с.
6. Волковский А. Ю. Дискретное управление процессами поддержания климатических условий в животноводческом комплексе / А. Ю. Волковский // Научный журнал КубГАУ. — 2011. — № 68 (04). — С. 1—16.
7. Шилин А. Н. Цифровое моделирование электротехнических и электронных устройств / А. Н. Шилин, О. А. Крутякова. — М. : Академия естествознания, 2014. — 131 с.
8. Warisa Nakpim. Third-order ordinary differential equations equivalent to linear second-order ordinary differential equations via tangent transformations [Electronic resource] / Warisa Nakpim // Journal of Symbolic Computation / Elsevier. — 2016. — V. 77. — DOI: http://dx.doi.org/10.1016/j.jsc.2016.01.006. — Pp. 63—77.
9. Seshadev Padhi. Theory of Third-Order Differential Equations / Seshadev Padhi, Smita Pati // Springer. — 2014. — 515 p.

Рекомендована кафедрою системного аналізу, комп'ютерного моніторингу та інженерної графіки ВНТУ

Стаття надійшла 25.04.2017

Мокін Борис Іванович — академік НАПН України, д-р техн. наук, професор, професор кафедри системного аналізу, комп'ютерного моніторингу та інженерної графіки та кафедри відновлювальної енергетики та транспортних електричних систем і комплексів, e-mail: borys.mokin@gmail.com ;

Мокін Олександр Борисович — д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри відновлювальної енергетики та транспортних електричних систем і комплексів, e-mail: abmokin@gmail.com ;

Чернова Ірина Олександрівна — аспірант кафедри системного аналізу, комп'ютерного моніторингу та інженерної графіки, e-mail: ira.chernova85@gmail.com ;

Довгополюк Сергій Олександрович — аспірант кафедри системного аналізу, комп'ютерного моніторингу та інженерної графіки, e-mail: isergeyq@gmail.com .

Вінницький національний технічний університет, Вінниця

B. I. Mokin[1]
O. B. Mokin[1]
I. O. Chernova[1]
S. O. Dovhopoliuk[1]

Equivalenting Closed-Loop Linear Dynamic System in the Presence of the Derivative in the Right Part of its Mathematical Model

[1]Vinnytsia National Technical University

There have been proposed the method of equivalenting according to the critical frequency of the linear dynamic system of high order that has the derivative in the right part of the mathematical model.

Keywords: closed linear dynamical systems, mathematical model of open-loop, equivalenting, critical frequency.

Mokin Borys I. — Academician of NAPS of Ukraine, Dr. Sc. (Eng.), Professor, Professor of the Chair of System Analysis, Computer Monitoring and Engineering Graphics and of the Chair of Restorative Energy and Transport Electrical Systems and Complexes, e-mail: borys.mokin@gmail.com ;

Mokin Oleksandr B. — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Head of the Chair of Renewable Energy and Transport Electrical Systems and Complexes, e-mail: abmokin@gmail.com ;

Chernova Iryna O. — Post-Graduate Student of the Chair of Systems Analysis, Computer Monitoring and Engineering Graphics of Vinnytsia National Technical University, e-mail: ira.chernova85@gmail.com ;

Dovhopoliuk Serhii O. — Post-Graduate Student of the Chair of Systems Analysis, Computer Monitoring and Engineering Graphics, e-mail: isergeyq@gmail.com

Б. И. Мокин[1]
А. Б. Мокин[1]
И. А. Чернова[1]
С. О. Довгополюк[1]

Эквивалентирования замкнутой линейной динамической системы при наличии производной в правой части ее математической модели

[1]Винницкий национальный технический университет

Предложен метод эквивалентирования по критической частоте линейной динамической системы высокого порядка, имеющей производную в правой части математической модели.

Ключевые слова: замкнутая линейная динамическая система, математическая модель разомкнутого контура, эквивалентирования, критическая частота.

Мокин Борис Иванович — академик НАПН Украины, д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры системного анализа, компьютерного мониторинга и инженерной графики и кафедры возобновляемой энергетики и транспортных электрических систем и комплексов, e-mail: borys.mokin@gmail.com ;

Мокин Александр Борисович — д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой возобновляемой энергетики и транспортных электрических систем и комплексов, e-mail: abmokin@gmail.com ;

Чернова Ирина Александровна — аспирант кафедры системного анализа, компьютерного мониторинга и инженерной графики, e-mail: ira.chernova85@gmail.com ;

Довгополюк Сергей Александрович — аспирант кафедры системного анализа, компьютерного мониторинга и инженерной графики, e-mail: isergeyq@gmail.com