https://doi.org/10.31649/1997-9266-2019-146-5-42-48

УДК 681.5+519.7

Ф. Е. Гече[1]
О. Ю. Мулеса[1]

СПЕКТРАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ УЗАГАЛЬНЕНИХ НЕЙРОФУНКЦІЙ

[1]Державний вищий навчальний заклад «Ужгородський національний університет»

Розглянуто узагальнені нейронні елементи (УНЕ) і досліджуються умови реалізованості булевих функцій на цих елементах. Розширенні функціональні можливості узагальнених нейронних елементів дають можливість розробити ефективні методи для кодування, компресії, розпізнавання дискретних сигналів та зменшити кількість елементів у нейроподібних схемах, призначених для розв'язування задач в області прогнозування, створення засобів штучного інтелекту, в медицині тощо. Вводиться поняття узагальненої булевої нейрофункції та характеристичного вектора функції алгебри логіки відносно заданої системи характерів. Характеристичний вектор булевої функції відносно заданої системи характерів будується з відповідних спектральних коефіцієнтів цієї функції у системі базисних функцій Уолша–Адамара.

Досліджено спектральні властивості функцій алгебри логіки, які реалізуються одним узагальненим нейронним елементом. За допомогою властивостей характеристичних векторів булевих функцій отримано критерій їх реалізованості одним узагальненими нейронним елементом. З наведених у статті критеріїв безпосередньо випливає, що булеві функції, які реалізуються одним узагальненим нейронним елементом, однозначно визначаються своїми характеристичними векторами відносно заданої системи характерів. Якщо система характерів, відносно якої розглядається УНЕ, містить m елементів, то для однозначного визначення булевої функції від n аргументів, що реалізується одним таким узагальненим нейронним елементом, достатньо $m+1$ спектральних коефіцієнтів зі спектрального розкладу цієї функції у системі базисних функцій Уолша–Адамара. Отримані результати можна ефективно використовувати для компресії узагальнених булевих нейрофункцій, а також для розробки методів синтезу узагальнених нейронних елементів.

Ключові слова: група, характер групи, спектр функції, характеристичний вектор булевої функції.

Вступ

Інтерес до використання штучних нейронних мереж і нейроподібних структур у більшості сфер людської діяльності росте з кожним днем. Вони зарекомендували себе в галузях кодування і захисту інформації, у розпізнаванні образів, у прогнозуванні, у бізнесі, у медицині, у техніці тощо.

Протягом останніх років значно активізувались дослідження, спрямовані на пошук ефективніших моделей нейронного елемента (НЕ). Від функції активації залежить поведінка нейронного елемента і його функціональна можливість. Синтезуючи оптимальні структури нейромереж (за кількістю нейроелементів і зв'язків між ними) доцільно застосовувати нейронні елементи з різними функціями активації. Для досягнення цієї мети необхідно дослідити властивості тих відображень, які реалізуються одним нейронним елементом відносно заданої функції активації, а також розробити ефективні методи синтезу відповідних НЕ.

Актуальність і практичну цінність дослідження властивостей функцій, реалізованих нейронними елементами з різними функціями активації, і розробка відповідних методів синтезу цих елементів пояснюється обсягами інвестиції, які в останні роки здійснюються для створення програмного і апаратного забезпечення штучного інтелекту, а також збільшення наукових праць у цьому напрямку.

Нейромережі ефективно використовуються для обробки сигналів, класифікації і розпізнавання зображень [1]—[6]. На основі нейроподібних структур розробляють інтелектуальні блоки різних систем для керування хімічними процесами [7], прогнозування економічних [8]—[12] та природничих процесів [13]—[15]. Результати досліджень в області застосування нейромережевій технології свідчать про те, що нейроподібні структури можуть бути успішно використані для ущільнення і інтелектуального аналізу даних [16]—[19].

У цій статті розглянуті спектральні властивості функцій алгебри логіки, що реалізуються одним узагальненим нейронним елементом (УНЕ), та наводяться критерії реалізованості булевих функцій одним УНЕ, і показано, що ці функції однозначно визначаються своїми характеристичними векторами.

Критерій реалізованості функцій алгебри логіки одним узагальненим нейронним елементом

Нехай $H_2 = \{-1,1\}$ — циклічна група другого порядку, $G_n = H_2 \otimes ... \otimes H_2$ — прямий добуток n циклічних груп H_2 і $X(G_n)$ — група характерів [20] групи G_n над полем дійсних чисел R. На множині $R \setminus \{0\}$ визначимо функцію

$$\mathrm{Rsign}\, x = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x > 0, \\ -1, & \text{якщо } x < 0. \end{cases} \tag{1}$$

Нехай $k \in \{0,1,2,...,2^n-1\}$ і $(k_1,...,k_n)$ — його двійковий код, тобто $k = k_1 2^{n-1} + k_2 2^{n-2} + ... + k_n$, $k_j \in \{0,1\}$. Значення характеру χ_k на елементі $\mathbf{g} = \left((-1)^{\alpha_1},...,(-1)^{\alpha_n}\right) \in G_n$ $((\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in Z_2^n$ — n-й декартовий степінь множини $\mathrm{Z}_2 = \{0,1\})$, згідно з [20] визначається так:

$$\chi_k(\mathbf{g}) = (-1)^{\alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 + ... + \alpha_n k_n}. \tag{2}$$

Розглянемо 2^n-вимірний векторний простір $V_R = \{\phi \mid \phi : G_n \to R\}$ над полем R. Елементи χ_k $(k = 0,1,2,...,2^n-1)$ групи $X(G_n)$ утворюють ортогональний базис простору V_R [20]. Булева функція в алфавіті $\{-1,1\}$ задає однозначне відображення $f : G_n \to H_2$, тобто $f \in V_R$. Отже, довільну бульову функцію $f \in V_R$ однозначно можна записати у вигляді

$$f(\mathbf{g}) = s_0\chi_0(\mathbf{g}) + s_1\chi_1(\mathbf{g}) + ... + s_{2^n-1}\chi_{2^n-1}(\mathbf{g}). \tag{3}$$

Вектор $\mathbf{s}_f = (s_0, s_1, ..., s_{2^n-1})$ називається спектром булевої функції у системі характерів $X(G_n)$ (у системі базисних функцій Уолша–Адамара [21]).

З різних характерів $X(G_n)$, крім головного χ_0, побудуємо m-елементну множину $\chi = \{\chi_{i_1},...,\chi_{i_m}\}$ і відносно вибраної системи характерів згідно з [22] розглянемо таку математичну модель нейронного елемента:

$$f(x_1(\mathbf{g}),...,x_n(\mathbf{g})) = \mathrm{Rsign}\left(\sum_{j=1}^{m} \omega_j \chi_{i_j}(\mathbf{g}) + \omega_0\right), \tag{4}$$

де вектор $\mathbf{w}_\chi = (\omega_1,...,\omega_m;\omega_0)$ називається вектором структури узагальненого нейроного елемента (УНЕ) відносно системи χ і $\mathbf{g} \in G_n$.

Означення 1. Булева функція $f : G_n \to H_2$, яка допускає зображення (4), називається узагальненою нейрофункцією відносно системи характерів χ.

Нехай $\chi = \{\chi_{i_1},...,\chi_{i_m}\} \subset X(G_n)$ і $\mathrm{w}_\chi(\mathbf{g}) = \omega_1\chi_{i_1}(\mathbf{g}) + ... + \omega_m\chi_{i_m}(\mathbf{g}) + \omega_0$. Якщо $\mathbf{w}_\chi = (\omega_1,...,\omega_m;\omega_0)$ є вектором структури УНЕ відносно системи характерів χ, що реалізує бульову функцію $f : G_n \to H_2$, то з (1) і (4) безпосередньо випливає

$$\forall \mathbf{g} \in G_n \quad \mathrm{w}_\chi(\mathbf{g}) \neq 0. \tag{5}$$

Далі будемо розглядати тільки такі узагальнені нейронні елементи, вектори структури яких задовольняють умову (5). Множину всіх таких $(m+1)$-вимірних дійсних векторів, що задовольняють умову (5) відносно системи характерів, $\chi = \{\chi_{i_1},...,\chi_{i_m}\} \subset X(G_n)$ позначимо через $\mathrm{W}_{m+1}(\chi)$.

Очевидно, що узагальнений нейронний елемент відносно системи твірних $\chi = \{\chi_1, \chi_2, \chi_4, ..., \chi_{2^{n-1}}\}$

групи характерів $X(G_n)$ збігається з пороговим елементом [23].

Аналогічно до того, як у пороговій логіці, тут також виникає питання: чи реалізується задана булева функція $f(x_1,...,x_n)$ одним УНЕ відносно вибраної системи характерів $\chi=\{\chi_{i_1},...,\chi_{i_m}\}$, і якщо так, то як знайти відповідний вектор структури УНЕ?

Теорема 1. *Булева функція* $f:G_n\to H_2$ *реалізується одним узагальненим нейронним елементом відносно системи характерів* $\chi=\{\chi_{i_1},...,\chi_{i_m}\}\subset X(G_n)$ *з вектором структури* $\mathbf{w}_\chi\in \mathrm{W}_{m+1}(\chi)$ *тоді і тільки тоді, коли*

$$\forall \mathbf{g}\in G_n \quad f(\mathbf{g})\mathrm{w}_\chi(\mathbf{g})=\left|\mathrm{w}_\chi(\mathbf{g})\right|, \tag{6}$$

де $|x|$ *— модуль числа* $x\in R$.

Необхідність. Дано, що функція $f:G_n\to H_2$ реалізується одним УНЕ з вектором структури $\mathbf{w}_\chi$ відносно системи характерів $\chi=\{\chi_{i_1},...,\chi_{i_m}\}\subset X(G_n)$. Тоді з рівності (4) з урахуванням $\mathrm{w}_\chi(\mathbf{g})=\omega_1\chi_{i_1}(\mathbf{g})+...+\omega_m\chi_{i_m}(\mathbf{g})+\omega_0$ маємо

$$\forall \mathbf{g}\in G_n \quad f(x_1(\mathbf{g}),...,x_n(\mathbf{g}))=\mathrm{Rsign}\,\mathrm{w}_\chi(\mathbf{g}). \tag{7}$$

На основі (1) та (7) можна стверджувати, що $\mathrm{w}_\chi\in W_{m+1}(\chi)$. Помноживши ліву і праву частину рівності (7) на $\mathrm{w}_\chi(\mathbf{g})$, отримаємо:

$$\forall \mathbf{g}\in G_n \quad f(x_1(\mathbf{g}),...,x_n(\mathbf{g}))\mathrm{w}_\chi(\mathbf{g})=\left(\mathrm{Rsign}\,\mathrm{w}_\chi(\mathbf{g})\right)\mathrm{w}_\chi(\mathbf{g}).$$

Враховуючи, що $\forall a\in \mathrm{R}\setminus\{0\}$ $(\mathrm{Rsign}\,a)\cdot a=|a|$ з останньої рівності випливає (6).

Достатність. Дано, що має місце рівність (6) і $\mathbf{w}_\chi\in \mathrm{W}_{m+1}(\chi)$ Треба показати реалізованість функції $f:G_n\to H_2$ одним УНЕ з вектором стуктури $\mathbf{w}_\chi$. Доводити будемо від супротивного. Припустимо, що $\exists \mathbf{b}\in G_n$, для якого має місце нерівність

$$f(\mathbf{b})\neq \mathrm{Rsign}\,\mathrm{w}_\chi(\mathbf{b}).$$

Тоді
$$f(\mathbf{b})=-\,\mathrm{Rsign}\,\mathrm{w}_\chi(\mathbf{b}).$$

Помноживши ліву і праву частину останньої рівності на $\mathrm{w}_\chi(\mathbf{b})$, отримаємо:

$$f(\mathbf{b})\mathrm{w}_\chi(\mathbf{b})=-\left|\mathrm{w}_\chi(\mathbf{b})\right|. \tag{8}$$

З виразів (6) і (8) випливає, що $\left|\mathrm{w}_\chi(\mathbf{g})\right|=-\left|\mathrm{w}_\chi(\mathbf{g})\right|$, але це неможливо, якщо $\mathbf{w}_\chi\in \mathrm{W}_{m+1}(\chi)$. Отже, достатність доведено. Δ

Зауваження. Якщо функція $f:G_n\to H_2$ реалізується одним УНЕ відносно системи характерів $\chi=\{\chi_{i_1},...,\chi_{i_m}\}\subset X(G_n)$, то згідно з (1) вектор структури будь-якого узагальненого нейронного елемента, що реалізує цю функцію відносно системи χ належить множині $\mathrm{W}_{m+1}(\chi)$.

Як відомо [24], спектральні коефіцієнти функції $f:G_n\to H_2$ відносно системи характерів $\chi=\{\chi_{i_1},...,\chi_{i_m}\}\subset X(G_n)$ і характера χ_0 над полем *R*, з точністю до множника 2^n, знаходяться за формулами

$$s_{i_j}=\sum_{\mathbf{g}\in G_n} f(\mathbf{g})\chi_{i_j}(\mathbf{g}) \ (j=1,2,...,m); \tag{9}$$

$$s_0=\sum_{\mathbf{g}\in G_n} f(\mathbf{g}). \tag{10}$$

Означення 2. Характеристичним вектором функції $f:G_n\to H_2$ відносно системи характерів $\chi=\{\chi_{i_1},...,\chi_{i_m}\}\subset X(G_n)$ називається (*m* + 1)-вимірний вектор $\mathbf{s}_\chi(f)=(s_{i_1},s_{i_2},...,s_{i_m};s_0)$.

Теорема 2. *Булева функція* $f: G_n \to H_2$ *реалізується одним УНЕ відносно системи характерів* $\chi = \{\chi_{i_1}, ..., \chi_{i_m}\} \subset X(G_n)$, *з вектором структури* $\mathbf{w}_\chi \in \mathrm{W}_{m+1}$ *тоді і тільки тоді, коли*

$$\left(\mathbf{w}_\chi, \mathbf{s}_\chi\left(f\right)\right) = \sum_{\mathbf{g}\in G_n} \left|\mathbf{w}_\chi(\mathbf{g})\right|, \tag{11}$$

де $\left(\mathbf{w}_\chi, \mathbf{s}_\chi\left(f\right)\right)$ *— скалярний добуток векторів* $\mathbf{w}_\chi$ *і* $\mathbf{s}_\chi\left(f\right)$.

Доведення. За теоремою 1 функція $f: G_n \to H_2$ реалізується одним УНЕ відносно системи $\chi = \left\{\chi_{i_1}, ..., \chi_{i_m}\right\} \subset X\left(G_n\right)$ з вектором структури $\mathbf{w}_\chi \in \mathrm{W}_{m+1}(\chi)$ тоді і тільки тоді, коли має місце рівність

$$\forall \mathbf{g} \in G_n \quad f(\mathbf{g})\mathrm{w}_\chi(\mathbf{g}) = \left|\mathrm{w}_\chi(\mathbf{g})\right|.$$

Взявши суму лівої і правої частини останньої рівності за всіма елементами $\mathbf{g} \in G$, останню рівність з урахуванням того, що $\mathrm{w}_\chi(\mathbf{g}) = \omega_1\chi_{i_1}(\mathbf{g}) + ... + \omega_m\chi_{i_m}(\mathbf{g}) + \omega_0$, після простих перетворень можна переписати так:

$$\sum_{j=1}^{m} \omega_j \left(\sum_{\mathbf{g}\in G_n} f(\mathbf{g})\chi_{i_j}(\mathbf{g})\right) + \omega_0 \sum_{\mathbf{g}\in G_n} f(\mathbf{g}) = \sum_{\mathbf{g}\in G_n} \left|\mathbf{w}_\chi(\mathbf{g})\right|.$$

Звідси, на основі (9) і (10), маємо

$$\left(\mathbf{w}_\chi, \mathbf{s}_\chi\left(f\right)\right) = \sum_{\mathbf{g}\in G_n} \left|\mathbf{w}_\chi(\mathbf{g})\right|.$$

Отже, теорему доведено. Δ

З теореми 2 безпосередньо випливають такі теореми.

Теорема 3. *Якщо характиристичні вектори двох різних булевих функцій* $f_l: G_n \to H_2$ $(l = 1, 2)$ *відносно системи характерів* $\chi = \left\{\chi_{i_1}, ..., \chi_{i_m}\right\} \subset X\left(G_n\right)$ *збігаються, то ці функції або одночасно реалізуються, або не реалізуються одним УНЕ відносно заданої системи характерів* χ.

Теорема 4. *Якщо характиристичні вектори двох булевих функцій* $f_l: G_n \to H_2$ $(l = 1, 2)$ *відносно системи характерів* $\chi = \left\{\chi_{i_1}, ..., \chi_{i_m}\right\} \subset X\left(G_n\right)$ *збігаються* $\left(\mathbf{s}_\chi\left(f_1\right) = \mathbf{s}_\chi\left(f_2\right)\right)$ *і одна з цих функцій реалізується одним УНЕ відносно системи характерів* $\chi = \left\{\chi_{i_1}, ..., \chi_{i_m}\right\} \subset X\left(G_n\right)$, *то ці функції ідентичні* $\left(f_1 = f_2\right)$.

З теореми 4 випливає, що булеві, функції $f: G_n \to H_2$, які реалізуються одним УНЕ відносно системи характерів $\chi = \left\{\chi_{i_1}, ..., \chi_{i_m}\right\} \subset X\left(G_n\right)$ однозначно визначаються своїми характеристичними векторами $\mathbf{s}_\chi(f)$ ($(m+1)$-вимірний вектор, побудований зі спектральних коефіцієнтів $\mathbf{s}_f$), тобто $\mathbf{s}_\chi\left(f_1\right) = \mathbf{s}_\chi\left(f_2\right) \Rightarrow f_1 = f_2$. Інші булеві функції f у системі базисних функцій Уолша–Адамара однозначно визначаються тільки своїми спектрами $\mathbf{s}_f$. Спектр $\mathbf{s}_f$ для кожної булевої функції $f: G_n \to H_2$ у системі $X\left(G_n\right)$ містить 2^n спектральних коефіцієнтів. Цей факт свідчить про те, що теорему 4 можна успішно використовувати в задачах компресії і передачі даних у спектральній області в системі базисних функцій Уолша–Адамара.

Зауваження. Якщо $\chi = \left\{\chi_1, \chi_2, \chi_4, ..., \chi_{2^{n-1}}\right\} \subset X\left(G_n\right)$, то теорема 3 і теорема 4 збігаються з відповідними теоремами Чоу [23].

Зазначимо, що у випадку не реалізованості функції $f: G_n \to H_2$ одним УНЕ відносно системи характерів $\chi = \left\{\chi_{i_1}, ..., \chi_{i_m}\right\} \subset X\left(G_n\right)$ з вектором $\mathbf{w}_\chi \in \mathrm{W}_{m+1}(\chi)$ має місце нерівність

$$\left(\mathbf{w}_\chi, \mathbf{s}_\chi\left(f\right)\right) < \sum_{\mathbf{g}\in G_n} \left|\mathbf{w}_\chi(\mathbf{g})\right|. \tag{12}$$

Дійсно, в цьому випадку існують такі елементи $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_r \subset G_n$, що

$$f(\mathbf{b}_t) \mathrm{w}_\chi(\mathbf{b}_t) = -\left|\mathrm{w}_\chi(\mathbf{b})\right| (t = 1, 2, ..., r), \text{ тобто}$$

$$\left(\mathbf{w}_\chi, \mathbf{s}_\chi(f)\right) = \sum_{\mathbf{g} \in G_n \setminus \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ..., \mathbf{b}_r\}} \left|\mathbf{w}_\chi(\mathbf{g})\right| - \sum_{t=1}^{r} \left|\mathbf{w}_\chi(b_t)\right|. \quad (13)$$

З рівності (13) і з того, що $\mathbf{w}_\chi \in \mathrm{W}_{m+1}(\chi)$ безпосередньо випливає (12).

Висновки

Досліджено спектральні властивості узагальнених булевих нейрофункцій. Отримано необхідні і достатні умови належності функцій алгебри логіки до класу узагальнених нейрофункцій відносно заданої системи характерів. Показано, що узагальнені булеві нейрофункції однозначно визначаються своїми характеристичними векторами відносно вибраної системи характерів. Якщо система характерів, відносно якої розглядається узагальнений нейронний елемент містить m елементів, то узагальнена булева нейрофункція від n змінних відносно цієї системи характерів однозначно задається своїм $(m+1)$-вимірним характеристичним вектором. Характеристичний вектор булевої узагальненої нейрофункції побудований з відповідних елементів спектра цієї функції у системі базисних функцій Уолша–Адамара. Цей результат можна ефективно використати для передачі та компресії булевих функцій у спектральній області.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

[1] І. В. Ізонін, Р. О. Ткаченко, Д. Д. Пелешко, та Д. А. Батюк, «Нейромережевий метод зміни роздільної здатності зображень,» *Системи обробки інформації*, Вип. 9 (134), с. 30-34, 2015.

[2] М. В. Квитко, «Распознавание речи с помощью глубоких рекуррентных нейронных сетей,» IASA, 2016. [Електронний ресурс]. Режим доступу: http://sait.kpi.ua/media/filer_public/73/32/7332a68e-e93b-4c57-a3c8-66f11ee074cd/sait2016ebook.pdf .

[3] M. Azarbad, S. Hakimi, and A. Ebrahimzadeh, "Automatic Recognition of Digital Communication Signal", *International Journal of Energy, Information and Communications*, vol. 3, issue 4, pp. 21-33, 2012.

[4] K. Fukushima, "Neocognitron: A hierarchial neural network capable of visual pottern recognition," *Neural Network*, no. 1, pp. 119-130, 1988.

[5] Р. О. Ткаченко, «Нейронно-таблична модель розпізнавання образів,» *Матеріали МНК "Друкотехн-96"*, Львів, с. 155-156, 1996.

[6] Р. О. Ткаченко, П. Р. Ткаченко, И. В. Изонин, и Д. А. Батюк, «Методы предварительной обработки изображений на основе нейропарадигмы Модель геометрических преобразований,» *Управляющие системы и машины*, № 1 (267), с. 59-67, 2017.

[7] F. Amato, J. L. González-Hernández, and J. Havel, "Artifical neural networks combined with experimental desing: a «soft» approach for chemical kinetics," *Talanta*, 93, pp. 72-78, 2012.

[8] Ф. Гече, О. Мулеса, С. Гече, та М. Вашкеба, «Розробка методу синтезу прогнозуючої схеми на основі базових прогнозуючих моделей,» *Технологічний аудит та резерви виробництва*, № 3/2(23), с. 36-41, 2015.

[9] Ye. Bodyanskiy, Yu. Zaychenko, E. Pavlikovskaya, M. Samarina, and Ye. Victorov, "The neofuzzy neural network structure optimization using GMDH for solving forecasting and classification problems," *Proc. of IWIM*, pp. 77-89, 2009.

[10] Ю. П. Зайченко, и Севаее Фатма, «Исследование нечёткой нейронной сети ANFIS в задачах макроекономического прогнозирования,» *Системні дослідження та інформаційні технології*, № 1, с. 100-112, 2005.

[11] Ю. П. Зайченко, Ю. В. Келестин, и Севаее Фатма, «Сравнительный анализ эффективности нечётких нейронных сетей в задачах прогнозирования в экономике и финансовой сфере,» *Системні дослідження та інформаційні технології*, № 1, с. 100-110, 2006.

[12] F. Geche, A. Batyuk, O. Mulesa, and M. Vashkeba, "Development of effective time series forecasting model," *International Journal of Advanced Research in Computer Engineering & Technology*, vol. 4, Issue 12, pp. 4377-4386, 2015.

[13] A. Kuchansky, and A. Biloshchytskyi, "Selective pattern matching method for time-series forecasting," *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, no. 6 (4-78), pp.13-18, 2015.

[14] В. В. Грицик, К. С. Войчишин, Р. О. Ткаченко, та І. Ю. Юрчак, «Нейромережні технології прогнозування сонячної активності,» *Доповіді НАН України. Кібернетика та обчислювальна техніка*, № 4, с. 79-85, 1999.

[15] P. Dey, A. Lamba, S. Kumary, and N. Marwaha, "Application of an artifical neural network in the prognosis of chronic myeloid leukemia," *Analytical and quantitative cytology and histology/the International Academy of Cytology and American Society of Cytology*, 33 (6), pp. 335-339, 2011.

[16] A. Pathok, A. K. Wadhwani, "Data Compression of ECG Signals Using Error Back Propagation (EBP) Algorithm," *International Journal of Engineering and Advence Technology (IJEAT)*, vol. 1, iss. 4, pp. 2249-8958, 2012.

[17] Ye. Bodyansky, P. Grimm, S. Mashtalir, and V. Vinarski, "Fast training of neural networks for image compression," *Advences in Data Mining. Lecture Notes in Computer Science*, Berlin – Heidelberg – New York, Springer, vol. 6171, pp. 165-173, 2010.

[18] Ye. Bodyanskiy, “Computational intelligence techniques for data analysis,” in *Lecture Notes in Informatics*, Bonn, GI, v. 72, pp. 15-36, 2005.

[19] І. В. Ізонін, та Р. О. Ткаченко, «Комітет нейроподібних структур МПГП з поліноміальним розширенням входів для задач Великих даних,» в *Інформаційна безпека та інформаційні технології*. Харків: ТОВ «ДІСА ПЛЮС», 2019, с. 187-201.

[20] Ч. Кертис, и И. Райнер, *Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр*. Москва: Наука, 1969.

[21] Л. А. Залманзон, *Преобразование Фурье, Уолша, Хаара и их применение*. Москва: Наука, 1989.

[22] Ф. Е. Гече, та О. Ю. Мулеса, «Алгебраїчні властивості ядер узагальнених нейрофункцій,» *Кибернетика и системный анализ*, № 6, с. 27-36, 2018.

[23] М. Дертоузос, *Пороговая логика*. Москва: Мир, 1967.

[24] Б. Л. Ван дер Варден, *Алгебра*. Москва: Наука, 1979.

Рекомендована кафедрою комп’ютерних систем управління ВНТУ

Стаття надійшла до редакції 9.09.2019

Гече Федір Елемирович — д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри кібернетики і прикладної математики;

Мулеса Оксана Юріївна — канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри кібернетики і прикладної математики, e-mail: Oksana.Mulesa@uzhnu.edu.ua .

Державний вищий навчальний заклад «Ужгородський національний університет», Ужгород

F. E. Geche[1]
O. Yu. Mulesa[1]

Spectral Properties of General Neurofunctions

[1]Uzhhorod National University

The article deals with the study of the spectral properties of generalized neurofunctions. Generalized neural elements are considered and conditions of realization of Boolean functions on these elements are investigated. Enhanced functionality of generalized neural elements makes it possible to develop effective methods for coding, compression, discrete signal recognition, and reducing the number of elements in neural circuits that are intended to solve problems in the field of prediction, artificial intelligence, medicine, and more. The concept of generalized Boolean neurofunction and the characteristic vector of the function of logic algebra with respect to a given system of characters are introduced. A characteristic vector of a Boolean function with respect to a given character system is constructed from the corresponding spectral coefficients of this function in the Walsh–Adamar basis system.

The spectral properties of functions of logic algebra realized by one generalized neural element are investigated. Using the properties of characteristic vectors of Boolean functions, the criterion for their realization by one generalized neural element was obtained. From the criteria given in the paper, it follows directly that Boolean functions that are realized by a single generalized neural element are uniquely determined by their characteristic vectors with respect to a given character system. If the character system in respect of which the UNE is considered contains elements, then for one-sided determination of the Boolean function from the arguments, which is realized by one such generalized neural element, enough spectral coefficients from the spectral decomposition of this function in the Walsh–Adamar basis function system. The results obtained can be effectively used for the compression of generalized Boolean neurofunctions, as well as for the development of synthesis methods for a generalized neural element.

Keywords: group, group character, spectrum of function, characteristic vector of Boolean function.

Geche Fedir E. — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Head of the Chair of Cybernetics and Applied Mathematics;

Mulesa Oksana Yu. — Cand. Sc. (Eng.), Associate Professor, Associate Professor of the Chair of Cybernetics and Applied Mathematic, e-mail: Oksana.Mulesa@uzhnu.edu.ua

Ф. Э. Гече[1]
О. Ю. Мулеса[1]

Спектральные свойства обобщенных нейрофункций

[1]Государственное высшее учебное заведение «Ужгородский национальный университет»

Рассмотрены спектральные свойства обобщенных нейрофункций. Рассмотрены обобщенные нейронные элементы и исследованы условия реализуемости булевых функций на этих элементах. Расширенные функциональные возможности обобщенных нейронных элементов дают возможность разработать эффективные методы для кодирования, компрессии, распознавания дискретных сигналов и уменьшить количество элементов в нейроподобных схемах, которые предназначены для решения задач в области прогнозирования, создания средств искусственного интеллекта, в медицине и т.п. Вводится понятие обобщенной булевой нейрофункции и характеристического вектора функции алгебры логики относительно заданной системы характеров. Характеристический вектор булевой функции относительно заданной системы характеров строится из соответствующих спектральных коэффициентов этой функции в системе базисных функций Уолша–Адамара.

Исследованы спектральные свойства функций алгебры логики, реализуемых одним обобщенным нейронным элементом. С помощью свойств характеристических векторов булевых функций получено критерий их реализуемости одним обобщенным нейронным элементом. Из приведенных в работе критериев непосредственно следует, что булевы функции, реализуемые одним обобщенным нейронным элементом однозначно определяются своими характеристическими векторами относительно заданной системы характеров. Если система характеров, в отношении которой рассматривается УНЕ, содержит m элементов, то для однозначного определения булевой функции от n аргументов, реализуемым одним таким обобщенным нейронным элементом, достаточно $m + 1$ спектральных коэффициентов по спектральному разложению этой функции в системе базисных функций Уолша–Адамара. Полученные результаты можно эффективно использовать для компрессии обобщенных булевых нейрофункций, а также для разработки методов синтеза обобщенного нейронного элемента.

Ключевые слова: группа, характер группы, спектр функции, характеристический вектор булевой функции.

Гече Федор Элемирович — д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой кибернетики и прикладной математики;

Мулеса Оксана Юриевна — канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры кибернетики и прикладной математики, e-mail: Oksana.Mulesa@uzhnu.edu.ua