



Тищенко Л. Н.

Лукьяненко В. М.

Жилина Е. А.

Кись В. Н.

Лукьяненко А. В.

**Харьковский
национальный
технический
университет
сельского хозяйства
им. Петра Василенко**

УДК 631. 362

ДВИЖЕНИЕ СЕМЯН РАПСА ПО ВИБРИРУЮЩЕЙ РЕБРИСТОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ГИПОТЕЗЕ ВЯЗКОГО ТРЕНИЯ

В настоящей работе составлены дифференциальные уравнения движения семян рапса по вибрирующей ребристой поверхности с использованием гипотезы вязкого трения.

In the this work is worked out differential equations of movement of seed of rape on the vibrating ribbed surface with the use of hypothesis of viscid friction.

Выделение из семян рапса трудноотделимых семян сорняков и примесей на существующих воздушно – решетно – триерных зерноочистительных машинах без значительных потерь основной культуры невозможно [1-3]. Поэтому изыскание новых рабочих органов семяочистительных машин для очистки семян рапса от трудноотделимых сорняков и примесей имеет важное народнохозяйственное значение.

Предварительным экспериментальным анализом была установлена целесообразность применения для очистки семян рапса от его трудноотделимых засорителей ребристой вибрирующей поверхности [4-7].

Наиболее удовлетворительным, в связи с интенсивностью проходящего процесса сепарации семян, является режим непрерывного подбрасывания [8], то есть такая установка параметров колеблющейся плоскости (частоты и амплитуды) при которой семена двигаются, соударяясь с рабочей поверхностью, а не скользят по ней. Вывод уравнений движения, описывающих данный режим, сводится к применению уравнений обычной свободной динамики (описывающих фазу полета), решению уравнений встречи (определение момента контакта семени с поверхностью и основных параметров, характеризующих его доударное состояние) и применению формул теории удара, позволяющих получить значения параметров, являющихся начальными данными для следующей фазы полета.

Введем на плоскости декартовые координаты X и Y как это показано на рис. 1.

Координаты жестко связанные с эллипсом обозначим через ξ и η . Пусть Ω – угол между осью ξ и осью X , тогда уравнения, описывающие движение семени на этапе свободного полета имеют вид:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -g \cdot \sin \alpha, \\ \ddot{y} = -g \cdot \cos \alpha, \\ \ddot{\Omega} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $X = x(t)$, $Y = y(t)$, $\Omega = \Omega(t)$ – координаты центра масс эллипса, в дальнейшем будем пользоваться обозначениями X , Y , Ω , подразумевая их функцией времени t .

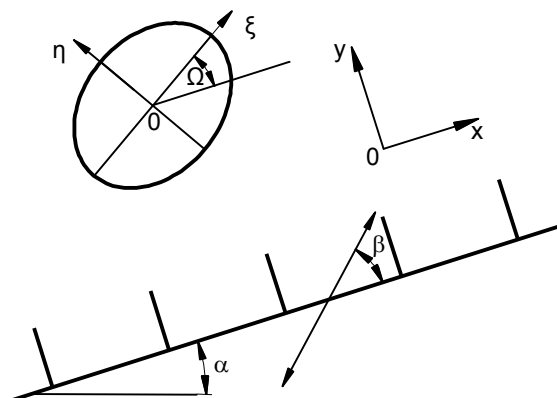
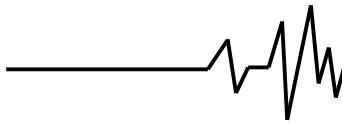


Рис. 1. Расчетная схема к определению параметров движения семени на этапе свободного полета



Следовательно,

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \dot{x}_0 \cdot t - g \sin \frac{t^2}{2}, \\ y(t) &= y_0 + \dot{y}_0 \cdot t - g \cos \frac{t^2}{2}, \\ \Omega(t) &= \Omega_0 + \dot{\Omega}_0 \cdot t, \end{aligned} \quad (2)$$

где $x_0, y_0, \Omega_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{\Omega}_0$ - константы, характеризующие начальное положение и скорость семени в момент отрыва от поверхности.

Поскольку предполагается, что плоскость колеблется по гармоническому закону, то уравнение движения плоскости имеет вид:

$$\begin{aligned} X(t) &= A \cdot \cos \beta \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0), \\ Y(t) &= A \cdot \sin \beta \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0), \end{aligned} \quad (3)$$

где A, ω, φ_0 - амплитуда, частота и начальная фаза колебаний плоскости;

β - угол, характеризующий направление вибрации.

Если бы рабочий орган рассматриваемого сепарируемого устройства представлял собой гладкую, а не рельефную поверхность, то для определения точки эллипса, вступившей в контакт с плоскостью и момента контакта следовало бы решить систему двух уравнений. Первое из них отражает равенство Y -ковой координаты соответствующей точки на эллипсе уровню, на котором находится в момент контакта вибрирующая плоскость (рис. 2).

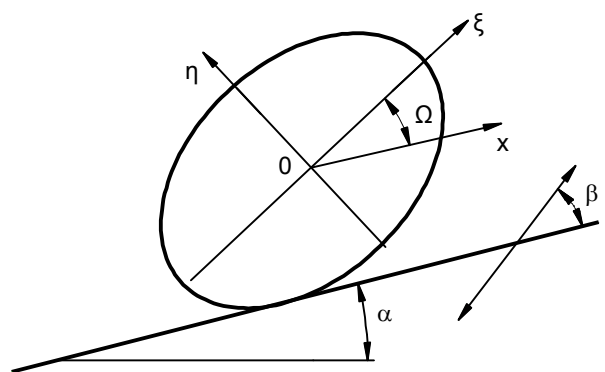


Рис. 2. Расчетная схема к определению точки эллипса, вступившей в контакт с плоскостью

$$Y + \xi_0 \cdot \sin \Omega + \eta_0 \cdot \cos \Omega = Y(t), \quad (4)$$

где ξ_0, η_0 - координаты точки контакта в системе (ξ, η) жестко связанной с эллипсом.

Второе уравнение отражает тот факт, что вибрирующая плоскость в момент контакта служит касательной к эллипсу. Как известно, уравнение касательной, проведенной к эллипсу в точке с координатами (ξ_0, η_0) имеет вид:

$$\frac{\xi \cdot \xi_0}{A^2} + \frac{\eta \cdot \eta_0}{B^2} = 1. \quad (5)$$

С другой стороны, угол наклона касательной известен, он равен Ω . Следовательно,

$$\frac{\xi_0}{A^2} \cdot \frac{B^2}{\eta_0} = \operatorname{tg} \Omega. \quad (6)$$

Так как точка (ξ_0, η_0) принадлежит эллипсу, то

$$\frac{\xi_0^2}{A^2} + \frac{\eta_0^2}{B^2} = 1. \quad (7)$$

Подставив (6) в (7), получим

$$\begin{aligned} \frac{\eta_0^2}{B^2} \cdot \left(\frac{\xi_0^2}{A^4} \cdot \frac{B^4}{\eta_0^2} \cdot \frac{A^2}{B^2} + 1 \right) &= \\ = \frac{\eta_0^2}{B^2} \cdot \left(1 + \frac{A^2}{B^2} \cdot \operatorname{tg}^2 \Omega \right) &= 1. \end{aligned} \quad (8)$$

откуда

$$\begin{aligned} \eta_0 &= \pm \frac{B}{\sqrt{1 + \frac{A^2}{B^2} \cdot \operatorname{tg}^2 \Omega}} = \\ &= - \frac{B^2 \cdot \cos \Omega}{\sqrt{A^2 \cdot \sin^2 \Omega + B^2 \cdot \cos^2 \Omega}}. \end{aligned} \quad (9)$$

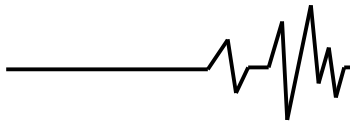
В последней формуле выбор знака перед радикалом согласован с выбором направления отсчета угла Ω . В свою очередь, в силу (7),

$$\xi_0 = \frac{A^2 \cdot \sin \Omega}{\sqrt{A^2 \cdot \sin^2 \Omega + B^2 \cdot \cos^2 \Omega}}. \quad (10)$$

Подставив значения ξ_0 и η_0 в (4) получим уравнение встречи, соответствующее случаю на рельефной поверхности:

$$y(t) - \sqrt{A^2 \cdot \sin^2 \Omega(t) + B^2 \cdot \cos^2 \Omega(t)} = Y(t). \quad (11)$$

или в развернутой форме:



$$y_0 + \dot{y}_0 \cdot t - g \cos \alpha \frac{t^2}{2} - A \sin \beta \sin(\omega t + \varphi_0) = \sqrt{A^2 \sin^2(\Omega_0 + \dot{\Omega}_0 t) + B^2 \cos^2(\Omega_0 + \dot{\Omega}_0 t)}. \quad (12)$$

В случае, когда решается задача встречи эллипса с рельефной поверхностью рассматриваемого типа, второе из использованных выше исходных уравнений – уравнение (5), заменяется соотношением:

$$x(t) + \xi_0 \cos \Omega(t) - \eta_0 \sin \Omega(t) - X(t) = K \cdot a, \quad (13)$$

где K – целочисленный параметр. В силу (7) величины ξ_0 и η_0 могут быть параметризованы следующим образом

$$\xi_0 = A \cdot \cos \theta, \eta_0 = B \cdot \sin \theta. \quad (14)$$

Подставим (14) в (4)

$$A \sin \Omega \cos \theta + B \cos \Omega \sin \theta = Y(t) - y(t) \quad (15)$$

или

$$\sin \Omega_1 \cdot \cos \theta + \cos \Omega_1 \cdot \sin \theta = \frac{Y(t) - y(t)}{\sqrt{A^2 \cdot \sin^2 \Omega + B^2 \cdot \cos^2 \Omega}}, \quad (16)$$

где

$$\sin \Omega_1 = \frac{A \cdot \sin \Omega}{\sqrt{A^2 \cdot \sin^2 \Omega + B^2 \cdot \cos^2 \Omega}}, \quad (17)$$

$$\cos \Omega_1 = \frac{B \cdot \cos \Omega}{\sqrt{A^2 \cdot \sin^2 \Omega + B^2 \cdot \cos^2 \Omega}}.$$

То есть

$$\sin(\Omega_1 + \theta) = \frac{Y(t) - y(t)}{\sqrt{A^2 \sin^2 \Omega + B^2 \cos^2 \Omega}}. \quad (18)$$

Уравнение (18) имеет два решения

$$\theta_1 = -\Omega_1 + \arcsin \frac{Y(t) - y(t)}{\sqrt{A^2 \sin^2 \Omega + B^2 \cos^2 \Omega}}, \quad (19)$$

$$\theta_2 = -\Omega_1 + \pi - \arcsin \frac{Y(t) - y(t)}{\sqrt{A^2 \sin^2 \Omega(t) + B^2 \cos^2 \Omega(t)}}.$$

соответствующие двум возможным столкновения эллипса с правым или левым ребром (рис. 3).

Таким образом, момент соударения следует искать как наименьший положительный корень одного из следующих двух уравнений:

$$A \cos \theta_1(t) \cos \Omega(t) - B \sin \theta_1(t) \sin \Omega(t) = X(t) - x(t) + (K_0 + 1) \cdot a, \quad (20)$$

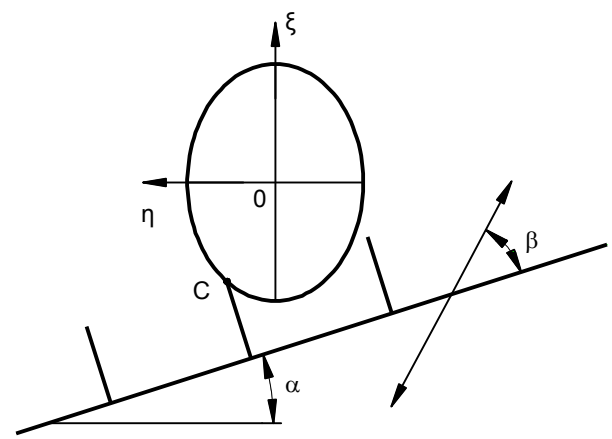
$$A \cos \theta_2(t) \cos \Omega(t) - B \sin \theta_2(t) \sin \Omega(t) = X(t) - x(t) + K_0 \cdot a.$$

причем параметр K_0 – обозначает число ребер соответствующих местоположению семени, то есть расстоянию от начала координат до положения "низшей" точки на эллипсе:

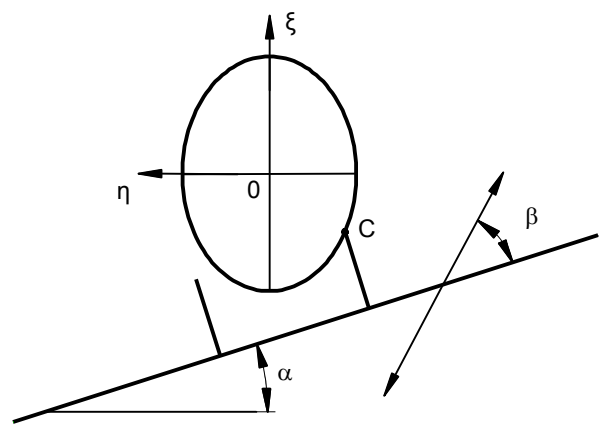
$$K_0 = \left[\frac{1}{a} x(t) - X(t) - \frac{(A^2 + B^2) \sin \Omega \cos \Omega}{\sqrt{A^2 \sin^2 \Omega + B^2 \cos^2 \Omega}} \right], \quad (21)$$

квадратные скобки в данном случае обозначают целую часть, стоящего в них числа.

Заметим, что в уравнениях (19), определяющих функции $\theta_1(t)$ и $\theta_2(t)$, под знаком арксинуса стоит величина

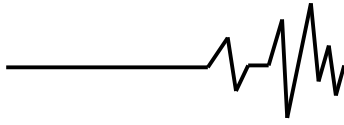


а) столкновение с левым штырьком



б) столкновение с правым штырьком

Рис. 3. Расчетная схема к определению различных возможностей столкновения эллипса со штырьком



$$\frac{Y(t) - y(t)}{\sqrt{A^2 \cdot \sin^2 \Omega + B^2 \cdot \cos^2 \Omega}}, \quad (22)$$

которая должна быть заключена в интервале (-1, 1). Поскольку в наших рассуждениях $y(t)$ всегда больше $Y(t)$, то остается условие

$$Y(t) - y(t) \leq -\sqrt{A^2 \cdot \sin^2 \Omega(t) + B^2 \cdot \cos^2 \Omega(t)}. \quad (23)$$

Знак равенства в последнем неравенстве соответствует уравнению (12), физический смысл которого обсуждался выше.

Таким образом, при использовании традиционных численных методов решения, решению двух уравнений (20) предшествует анализ условия (23), что адекватно решению уравнения (12).

По теореме об изменении количества движения доударные и послеударные скорости связаны соотношением:

$$\begin{aligned} \dot{x}_+ - \dot{x}_- &= I_x \\ \dot{y}_+ - \dot{y}_- &= I_y \\ \dot{\Omega}_+ - \dot{\Omega}_- &= \frac{1}{\rho^2} \cdot (x_{oc} \cdot I_y - y_{oc} \cdot I_x) \end{aligned} \quad (24)$$

где I_x, I_y – проекции приведенного ударного импульса;

x_{oc}, y_{oc} – проекции вектора, соединяющего центр эллипса с точкой контакта (на оси X и Y). В силу (1)

$$\begin{aligned} \dot{x}_- &= \dot{x}_0 - g \cdot \sin \alpha \cdot t^* \\ \dot{y}_- &= \dot{y}_0 - g \cdot \cos \alpha \cdot t^* \\ \dot{\Omega}_- &= \dot{\Omega}_0, \end{aligned} \quad (25)$$

где t^* – момент контакта семени с ребристой поверхностью.

Наиболее употребительными гипотезами, характеризующими ударные взаимодействия, служат гипотезы сухого и вязкого трения.

Рассмотрим случай применения формул теории удара в гипотезе вязкого трения. В соответствии с ней, доударная и послеударная скорости точки контакта, при ударе о неподвижную преграду, связаны соотношением

$$\bar{V}_+ = -R \cdot (\bar{V}_-, \bar{n}) \cdot \bar{n} + (1 - \lambda) \cdot (\bar{V}_-, \bar{\tau}) \cdot \bar{\tau}, \quad (26)$$

где \bar{n} – единичный вектор нормали к соударяющимся поверхностям;

τ – орт касательной;
 R – коэффициент восстановления нормальной составляющей вектора скорости при ударе;

λ – коэффициент мгновенного (вязкого) трения.

Если ξ_0, η_0 – координаты точки контакта в системе (ξ, η) , жестко связанной с семенем, то, как следует из уравнений касательной (5), вектор нормали в системе (ξ, η) имеет вид:

$$\bar{n} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\xi_0}{A^2}\right)^2 + \left(\frac{\eta_0}{B^2}\right)^2}} \cdot \left(-\frac{\xi_0}{A^2}, \frac{\eta_0}{B^2}\right). \quad (27)$$

Соответственно, вектор касательной имеет вид:

$$\bar{\tau} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\xi_0}{A^2}\right)^2 + \left(\frac{\eta_0}{B^2}\right)^2}} \cdot \left(\frac{\eta_0}{B^2}, \frac{\xi_0}{A^2}\right). \quad (28)$$

Так как, угол между соответствующими осями координат (ξ, η) и (X, Y) равен Ω , то векторы $\bar{n}, \bar{\tau}$ в системе координат (X, Y) представляются следующим образом

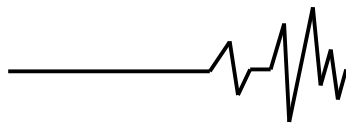
$$\begin{aligned} \bar{n} &= \frac{-1}{\sqrt{\left(\frac{\xi_0}{A^2}\right)^2 + \left(\frac{\eta_0}{B^2}\right)^2}} \cdot \\ &\cdot \left(\frac{\xi_0}{A^2} \cos \Omega - \frac{\eta_0}{B^2} \sin \Omega, \frac{\xi_0}{A^2} \sin \Omega + \frac{\eta_0}{B^2} \cos \Omega\right), \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \bar{\tau} &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\xi_0}{A^2}\right)^2 + \left(\frac{\eta_0}{B^2}\right)^2}} \cdot \\ &\cdot \left(-\frac{\eta_0}{B^2} \cos \Omega - \frac{\xi_0}{A^2} \sin \Omega, \frac{-\eta_0}{B^2} \sin \Omega + \frac{\xi_0}{A^2} \cos \Omega\right). \end{aligned}$$

Используя формулу, связывающую скорости двух произвольных точек твердого тела, движущегося плоскопараллельно, имеем

$$\bar{V}_c = (\dot{x}, \dot{y}) - \dot{\Omega} (y_{oc}, -x_{oc}). \quad (30)$$

В соответствии с этим доударная и послеударная скорости точки контакта относительно вибрирующей плоскости представляются формулами:



$$V_{\pm} = (\dot{x}_{\pm}, \dot{y}_{\pm}) - \dot{\Omega} \pm (y_{oc}, -x_{oc}) - (\dot{X}, \dot{Y}), \quad (31)$$

причем, в силу (2)

$$(\dot{X}, \dot{Y}) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t^* + \varphi_0) \cdot (\cos \beta, \sin \beta). \quad (32)$$

Подставляя (24) в (31+), и используя (31.) получим:

$$\begin{aligned} \bar{V}_+ &= (\dot{x}_+, \dot{y}_+) - \dot{\Omega} + (y_{oc}, -x_{oc}) - (\dot{X}, \dot{Y}) = \\ &= (\dot{x}_-, \dot{y}_-) - \dot{\Omega} - (y_{oc}, -x_{oc}) - (\dot{X}, \dot{Y}) + \\ &+ (I_x, I_y) - \frac{1}{\rho^2} \cdot (x_{oc} \cdot I_y - y_{oc} \cdot I_x) \cdot (y_{oc}, -x_{oc}) = \\ &= \bar{V}_- + \left(\left[1 + \frac{y_{oc}^2}{\rho^2} \right] I_x - \frac{x_{oc} y_{oc}}{\rho^2} I_y, -\frac{x_{oc} y_{oc}}{\rho^2} I_x + \left[1 + \frac{x_{oc}^2}{\rho^2} \right] I_y \right). \end{aligned} \quad (33)$$

Таким образом, координаты вектора ударного импульса могут быть получены из системы

$$(I_x, I_y) \cdot \begin{bmatrix} 1 + \frac{y_{oc}^2}{\rho^2} & -\frac{x_{oc} \cdot y_{oc}}{\rho^2} \\ -\frac{x_{oc} \cdot y_{oc}}{\rho^2} & 1 + \frac{x_{oc}^2}{\rho^2} \end{bmatrix} = \bar{V}_+ - \bar{V}_-. \quad (34)$$

Обращая матрицу данной системы, находим

$$(I_x, I_y) = (\bar{V}_+ - \bar{V}_-) \cdot \begin{bmatrix} 1 + \frac{x_{oc}^2}{\rho^2} & \frac{x_{oc} \cdot y_{oc}}{\rho^2} \\ \frac{x_{oc} \cdot y_{oc}}{\rho^2} & 1 + \frac{y_{oc}^2}{\rho^2} \end{bmatrix} \cdot \frac{\rho^2}{\rho^2 + x_{oc}^2 - y_{oc}^2}.$$

Подводя итог, получаем следующую схему для определения послеударных скоростей. Формула (25) позволяет вычислить доударные скорости, при известном решении уравнений встречи. Формула (31.) позволяет определить вектор доударной скорости точки контакта V_- . По формуле (26), с использованием соотношений (29) определяется вектор послеударной скорости точки контакта V_+ . Затем из (34) находятся проекции послеударного импульса на оси

(X, Y). Наконец подстановка (I_x, I_y) в (24) дает возможность вычислить требуемые начальные данные для нового этапа полета $(\dot{X}_+, \dot{Y}_+, \dot{\Omega}_+)$.

Литература

1. Средства механизации для возделывания, уборки и послеуборочной обработки рапса: Отчет о НИР (промежуточн.) /Всесоюзн. научно-исслед. ин-т масл. культур.- 0.СХ.65.04.06.03.- Краснодар, 1985.- 74 с.
2. Гайдаш В.Д. Особенности уборки и послеуборочной обработки семян рапса //Масличные культуры.- 1987.- № 4.- С. 16-17.
3. Крохмаль С.Д., Шафоростов В.Д., Мамонцев И.П., Курунин П.А. Уборка и послеуборочная обработка семян рапса //Масличные культуры.- 1987.- №1.- С.18-21.
4. Заика П.М., Лукьяненко В.М., Бортников А.И. и др. Очистка и сортирование семян рапса и сурепицы //Научно – технический бюллетень ВНИИМК.— Краснодар, 1986.— вып. 4.— с. 43 – 46.
5. Заика П.М., Ильин В.Я., Сметанкин В.А. Движение тел круглой формы по вибрирующей ребристой плоскости в безотрывном режиме //Применение новейших математических методов и вычислительной техники в решении инженерных задач: Сб. науч. тр. МИИСП.- 1976.— Т. 13, Вып. 10.- С. 51–55.
6. Заика П.М., Гудым В.А., Юдицкий П.М. Движение семян круглой формы по вибрирующей ребристой плоскости в одноударном периодическом режиме //Совершенствование конструкций, улучшение ремонта и эксплуатации с.-х. техники: Сб. науч. тр. ХСХИ.— Харьков, 1985.— С. 31-42.
7. Жмай Л.Г. Обоснование параметров технологического процесса очистки и сортирования семян овощных культур на вибрационной семяочистительной машине: Авторефер. дис. канд. техн. наук: 05.20.01 /Харьк. ин-т мех. и электр. с. х.— Харьков, 1990.- 20 с.
8. Заика П.М., Мазнев Г.Е. Сепарация семян по комплексу физико-механических свойств.- М.: Колос, 1978.— 287 с.