



Тищенко Л. Н.

Ольшанский В. П.

Харьковский  
национальный  
технический  
университет  
сельского хозяйства  
им. Петра Василенко

Ольшанский С. В.

Национальный  
технический  
университет  
«Харьковский  
политехнический  
институт»

УДК 631.362.532

## КИНЕТИКА СЕПАРИРУЕМЫХ ЗЕРНОВЫХ СМЕСЕЙ В ВЕРТИКАЛЬНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВИБРОРЕШЕТАХ

Використовуючи аналогію руху вібророзрідженого сипкого середовища та в'язкої рідини, отримано формули для розрахунку швидкості вертикального руху кільцевого шару зернової суміші з урахуванням його коливань, які спричинені осьовими вібраціями циліндричного решета. В функціях Кельвіна побудовано аналітичні розв'язки граничної задачі гідродинаміки. Показано можливість спрощення розрахунків шляхом застосування асимптотичних представлень циліндричних функцій великого аргументу.

Using the analogy of movements vibroliquefied granular material and a viscous fluid, the formulas for calculating the rate of vertical motion of the annular layer of grain mixtures, taking into account their fluctuations caused by axial vibration of cylindrical lattice. In Kelvin's functions constructed an analytic solution of the boundary value problem in hydrodynamics. The possibility of simplifying the calculations by applying the asymptotic representations of cylindrical functions of large argument.

**Постановка проблемы.** Дальнейшее повышение производительности серийных виброцентробежных зерновых сепараторов связано с установлением закономерностей движения сепарируемых зерновых смесей. Несмотря на повышенный интерес к этой проблеме со стороны исследователей, распределение вибрационных полей в движущихся зерновых средах остается малоизученным. В то же время вибрации частиц движущейся смеси существенно влияют на процессы их сегрегации и просеивания на решете. Поэтому изучение распространения колебаний от виброрешет в массив сыпучих сред имеет актуальное научно-прикладное значение.

**Анализ последних исследований и публикаций.** Следуя гидродинамической аналогии движение зерновых смесей по вертикальным цилиндрическим виброрешетам рассматривалось в [1-5]. Но колебания скорости потока зерна не учитывались. Расчет колебаний скорости потока зерновой смеси, как слоя линейно-неоднородной вязкой жидкости, проводился в [6], где найдено аналитическое решение краевой задачи в функциях Бесселя и

Неймана комплексного аргумента. При этом поверхность вертикального решета считалась плоской, т.е. ее искривление не учитывалось. Колебания скорости потока смеси на плоском наклонном виброрешете рассматривались также в [7]. В отличие от указанных публикаций здесь строится решение краевой задачи для однородного кольцевого слоя смеси в цилиндрической системе координат.

**Целью работы** является получение формул для расчета колебаний скорости потока зерновых смесей, вызванных осевыми вертикальными вибрациями решета, с учетом искривления его по круговой цилиндрической поверхности.

**Постановка задачи и ее решение.** Пусть решето радиуса  $R$  вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью  $\omega_1$  и совершает осевые колебания с амплитудой  $A^*$  и круговой частотой  $\omega$ . Кольцевой слой зерновой смеси толщиной  $h$  вращается вместе с решетом и движется по нему вертикально вниз со скоростью  $u_z(r, t)$ , как показано на рис. 1.

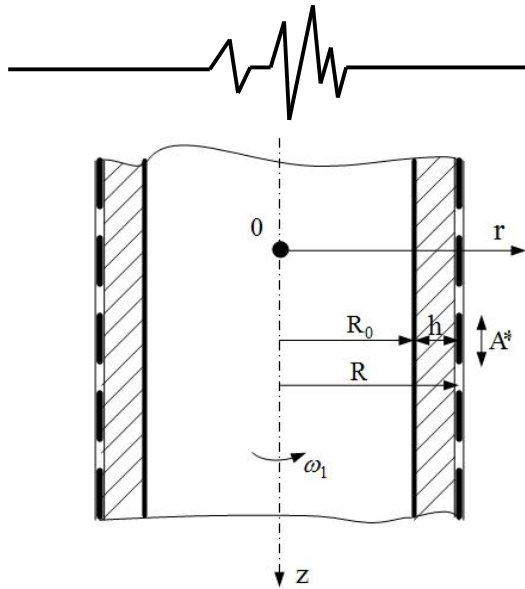


Рис. 1. Расчетная схема вертикального цилиндрического решета с сепарируемой зерновой смесью

Через  $r, z$  обозначены соответственно радиальная и осевая координаты точек смеси,  $t$  – время.

Ставится задача определения  $u_z(r, t)$  с учетом ее колебаний, вызванных вибрациями решета. В установившемся режиме движения задача сводится к решению дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} - \frac{1}{v} \frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{g}{v}, \quad (1)$$

при граничных условиях:

$$u_z(r, t)|_{r=R} = A^* \omega \cos \omega t; \quad \frac{\partial u_z(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=R_0} = 0. \quad (2)$$

В выражениях (1) и (2)  $R_0 = R - h$  – внутренний радиус кольцевого слоя;  $v$  – эффективная кинематическая вибровязкость зерновой смеси;  $g$  – ускорение свободного падения.

Кинематическая вибровязкость смеси зависит от скорости вращения и параметров смеси, а также координаты  $r$  [1,2,8]. Здесь, с целью упрощения модели,  $v$  считаем постоянной величиной.

Отметим, что частный случай краевой задачи (1), (2), соответствующей  $\omega = 0$ , имеет компактное решение:

$$u(r) = \frac{g}{4v} \left( R^2 - r^2 + 2R_0^2 \ln \frac{r}{R} \right). \quad (3)$$

Оно встречается в публикациях [1,2,3] и позволяет определять усредненную за период колебаний решета скорость потока смеси без учета инерционного слагаемого в уравнении (1).

Но при рассмотрении изменения скорости потока во времени это слагаемое следует учитывать. При  $\omega > 0$  решение поставленной краевой задачи ищем в виде:

$$u_z = \frac{g}{4v} \left( R^2 - r^2 + 2R_0^2 \ln \frac{r}{R} \right) + \text{Re} [w(r) e^{-i\omega t}], \quad (4)$$

где  $i = \sqrt{-1}$ ;  $w(r)$  – неизвестная комплексная функция вещественного аргумента.

Подставив (4) в (1) и (2), приходим к вспомогательной краевой задаче:

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \frac{i\omega}{v} w = 0; \quad (5)$$

$$\text{Re } w(R) = A^* \omega; \quad \text{Im } w(R) = 0;$$

$$\frac{d}{dz} \text{Re } w(r) \Big|_{r=R_0} = \frac{d}{dr} \text{Im } w(r) \Big|_{r=R_0} = 0, \quad (6)$$

для определения функции  $w(r)$ .

Общее решение уравнения (5) имеет вид:

$$w(r) = (a_1 + ia_2) \cdot J_0(\xi \sqrt{i}) + (a_3 + ia_4) \cdot H_0^{(1)}(\xi \sqrt{i}). \quad (7)$$

В нем  $\xi = r \sqrt{\omega/v}$ ;  $J_0(x), H_0^{(1)}(x)$  – функция Бесселя и функция Ганкеля нулевых индексов;  $a_1, a_2, a_3, a_4$  – вещественные произвольные постоянные.

Цилиндрические функции комплексного аргумента выражаются через функции Кельвина нулевого индекса:  $ber(x), bei(x), her(x), hei(x)$  по формулам [9]:

$$J_0(\xi \sqrt{i}) = ber(\xi) - i bei(\xi); \quad H_0^{(1)}(\xi \sqrt{i}) = -her(\xi) + i hei(\xi). \quad (8)$$

Поэтому, согласно (7) и (8):

$$\text{Re } w(z) = a_1 ber(\xi) + a_2 bei(\xi) + a_3 her(\xi) - a_4 hei(\xi); \quad (9)$$

$$\text{Im } w(z) = -a_1 bei(\xi) + a_2 ber(\xi) + a_3 hei(\xi) - a_4 her(\xi)$$

Подставив (9) и их производные в (6), получаем систему четырех уравнений с неизвестными  $a_j, j = \overline{1;4}$ . Решив систему, находим:

$$a_1 = \frac{A^* \omega}{\Delta} [ber(\eta) - \delta_1 her(\eta) + \delta_2 hei(\eta)];$$

$$a_2 = \frac{A^* \omega}{\Delta} [bei(\eta) - \delta_1 hei(\eta) - \delta_2 her(\eta)];$$

$$a_3 = \delta_1 a_1 + \delta_2 a_2; \quad a_4 = -\delta_2 a_1 + \delta_1 a_2;$$



$$\Delta = [ber(\eta) - \delta_1 her(\eta) + \delta_2 hei(\eta)]^2 + [bei(\eta) - \delta_1 hei(\eta) - \delta_2 her(\eta)]^2$$

$$\delta_1 = \frac{bei'(\zeta) \cdot hei'(\zeta) + ber'(\zeta) \cdot her'(\zeta)}{(her'(\zeta))^2 + (hei'(\zeta))^2}$$

$$\delta_2 = \frac{bei'(\zeta) \cdot her'(\zeta) - ber'(\zeta) \cdot hei'(\zeta)}{(her'(\zeta))^2 + (hei'(\zeta))^2}$$

Здесь  $\eta = R\sqrt{\omega/v}$ ;  $\zeta = R_0\sqrt{\omega/v}$ ; штрихом обозначены производные функций Кельвина по  $\zeta$ .

Учитывая значения констант, а также выражения (4) и (9), получаем формулу скорости потока смеси внутри решета:

$$u_z(r,t) = \frac{g}{4v} \left( R^2 - r^2 + 2R_0^2 \ln \frac{r}{R} \right) + [a_1 ber(\xi) + a_2 bei(\xi) - a_3 her(\xi) - a_4 hei(\xi)] \times \cos \omega t + [-a_1 bei(\xi) + a_2 ber(\xi) + a_3 hei(\xi) - a_4 her(\xi)] \cdot \sin \omega t. \quad (10)$$

Она позволяет рассчитывать уменьшение амплитуд колебаний скорости смеси по мере удаления от поверхности решета в сторону свободной поверхности слоя.

Несмотря на то, что использованные в решении (10) специальные функции затабулированы в [9], имеющиеся таблицы нельзя применить к расчету скорости смеси в производственных условиях работы виброрешета. Причина в том, что в реальных условиях работы зерновых сепараторов расчетные значения параметров таковы, что соответствующие им аргументы функций Кельвина большие и находятся вне области табулирования. Поэтому вместо таблиц необходимо использовать асимптотические разложения:

$$\begin{bmatrix} ber(x) \\ bei(x) \end{bmatrix} = M_0 \begin{bmatrix} \cos \theta_0 \\ \sin \theta_0 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} her(x) \\ hei(x) \end{bmatrix} = N_0 \begin{bmatrix} \sin \varphi_0 \\ -\cos \varphi_0 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} ber'(x) \\ bei'(x) \end{bmatrix} = M_1 \begin{bmatrix} \cos \left( \theta_1 - \frac{\pi}{4} \right) \\ \sin \left( \theta_1 - \frac{\pi}{4} \right) \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} her'(x) \\ hei'(x) \end{bmatrix} = N_1 \begin{bmatrix} \sin \left( \varphi_1 - \frac{\pi}{4} \right) \\ -\cos \left( \varphi_1 - \frac{\pi}{4} \right) \end{bmatrix}, \quad (11)$$

в которых

$$M_s \approx \frac{e^{x/\sqrt{2}}}{\sqrt{2\pi x}} \left[ 1 - \frac{4s^2 - 1}{8\sqrt{2}x} + \frac{(4s^2 - 1)^2}{256x^2} \right];$$

$$\theta_s \approx \frac{x}{\sqrt{2}} + \left( \frac{s}{2} - \frac{1}{8} \right) \cdot \pi + \frac{4s^2 - 1}{8\sqrt{2}x} + \frac{4s^2 - 1}{16x^2}; \quad (12)$$

$$N_s \approx \frac{\sqrt{2}e^{-x/\sqrt{2}}}{\sqrt{\pi x}} \left[ 1 + \frac{4s^2 - 1}{8\sqrt{2}x} + \frac{(4s^2 - 1)^2}{256x^2} \right];$$

$$\varphi_s \approx -\frac{x}{\sqrt{2}} - \left( \frac{s}{2} + \frac{1}{8} \right) \cdot \pi - \frac{4s^2 - 1}{8\sqrt{2}x} + \frac{4s^2 - 1}{16x^2};$$

$$s = \overline{1, 2}.$$

Информация о точности приближенных формул (11) и (12) представлена в табл. 1, 2, где записаны в числителях значения функций Кельвина и их производных аргумента шесть, взятые из [9]. Для сравнения в знаменателях записаны результаты вычислений по формулам (11) и (12). С увеличением значений аргумента точность асимптотических приближений повышается. Поэтому, учитывая небольшие расхождения результатов в табл. 1 и 2, приходим к выводу о возможности использования (11) и (12) в технических расчетах.

**Таблица 1**  
Значения функций Кельвина, найденные двумя способами

$ber(6)$	$bei(6)$	$10^3 her(6)$	$10^3 hei(6)$
<u>-8,858</u>	<u>-7,335</u>	<u>4,594</u>	<u>0,416</u>
-8,857	-7,338	4,594	0,415

**Таблица 2**  
Значения производных функций Кельвина

$ber'(6)$	$bei'(6)$	$10^3 her'(6)$	$10^3 hei'(6)$
<u>-0,293</u>	<u>-10,846</u>	<u>-3,326</u>	<u>-3,585</u>
-0,300	-10,840	-3,325	-3,588

Рассмотренная теория существенно упрощается, если пренебречь вторым слагаемым в уравнении (4). Этот вариант теории приводит к приближенной формуле:

$$u_z(r,t) = \frac{g}{v} \cdot (R - r) \left( \frac{R + r}{2} - R_0 \right) +$$



$$+ A^* \omega \frac{\sqrt{sh^2(\beta(r - R_0)) + \cos^2(\beta(r - R_0))}}{\sqrt{sh^2(\beta h) + \cos^2(\beta h)}} \times \cos(\omega t - \varphi), \quad (13)$$

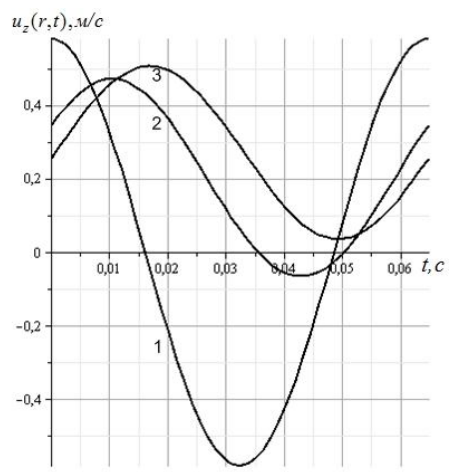
где

$$\varphi = \arctg \frac{th(\beta h) \cdot tg(\beta h) - th(\beta(r - R_0)) \cdot tg(\beta(r - R_0))}{1 + th(\beta h) \cdot tg(\beta h) \cdot th(\beta(r - R_0)) \cdot tg(\beta(r - R_0))};$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}.$$

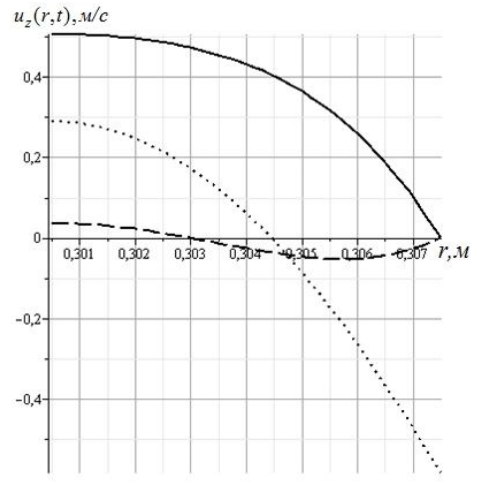
Согласно (13) амплитуда колебаний скорости смеси минимальна на свободной поверхности слоя и равна  $A^* \omega \cdot [sh^2(\beta h) + \cos^2(\beta h)]^{-1/2}$ . Для других точек кольцевого слоя амплитуды колебаний заключены между минимальной и максимальной, равной  $A^* \omega$ .

Для проведения дальнейших расчетов, следуя [6], приняли:  $\rho = 750 \text{ кг/м}^3$ ;  $h = 0,007 \text{ м}$ ;  $A^* = 0,006 \text{ с}^{-1}$ ;  $\omega = 96,9 \text{ с}^{-1}$ ;  $\rho\nu = 0,66 \text{ Па}\cdot\text{с}$ ;  $R = 0,3075 \text{ м}$ , что соответствует зерновой смеси пшеницы и паспортным конструктивно-кинематическим параметрам серийных виброцентробежных сепараторов ОАО «Вибросепаратор» (г. Житомир).



**Рис. 2. Зависимости колебаний скорости зерновой смеси пшеницы от времени для различных  $r$ : 1, 2, 3 -**

$$r = R; \quad R_0 + \frac{R - R_0}{2}; \quad R_0$$



**Рис. 3. Профили скорости потока сепарируемой зерновой смеси пшеницы по толщине слоя в различные моменты**

времени: —  $t = \frac{\pi}{2\omega}$ ; ...  $t = \frac{\pi}{\omega}$ ; ---  $t = \frac{3\pi}{2\omega}$ .

**Выводы.** Вычислениями с помощью полученных решений установлено:

1. Вследствие осевых (вертикальных) вибраций решет профиль скорости потока смеси в установившемся режиме движения с течением времени меняется периодически.
2. Вибрационное поле по толщине слоя с удалением от цилиндрической поверхности решет затухает.
3. У свободной поверхности слоя обратных потоков, которые имеют место у поверхности виброрешета, не наблюдается.

**Литература**

1. Тищенко Л.Н. Гидродинамические характеристики псевдооживленных сыпучих сред при виброцентробежном сепарировании на зерноперерабатывающих предприятиях // Сучасні напрямки технології та механізації процесів переробних та харчових виробництв: Вісник ХДТУСГ. – Харків: ХДТУСГ, 2001. – Вып. 5. – С. 13-33.
2. Тищенко Л.Н. Интенсификация сепарирования зерна. – Харьков: Основа, 2004. – 204 с.
3. Тищенко Л.Н., Абдуева Ф.М., Ольшанский В.П. О решениях упрощенных уравнений Навье-Стокса в гидродинамической модели движения зерновой смеси // Механізація сільськогосподарського



виробництва: Вісник ХНТУСГ. – Харків: ХНТУСГ, 2008. – Вип. 75, Т. 1. – С. 217-223.

4. Тищенко Л.Н., Абдуева Ф.М., Ольшанский В.П. К исследованию движения зерновой смеси по модернизированным решетам виброцентробежного сепаратора при малой загрузке // Збірник наукових праць Луганського національного аграрного університету. – Луганськ: ЛНАУ, 2008. – № 87. – С. 366-373.

5. Тищенко Л.Н., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В. К расчету движения зерновой смеси по вертикальному цилиндрическому решетку вибросепаратора // Вібрації в техніці та технологіях. – 2009. – № 2 (54). – С. 50-55.

6. Тищенко Л.Н., Мазоренко Д.И., Пивень М.В., Харченко С.А., Бредихин В.В., Мандрыка

А.В. Моделирование процессов зерновых сепараторов. – Харьков: Міськдрук, 2010. – 360 с.

7. Тищенко Л.Н., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В. Гидродинамика сепарирования зерна. – Харьков: Міськдрук, 2010. – 174 с.

8. Тищенко Л.Н., Абдуева Ф.М., Ольшанский В.П. Сравнение двух способов вычисления коэффициента вибровязкости псевдооживленной зерновой смеси при виброцентробежном сепарировании // Вібрації в техніці та технологіях. – 2008. – № 1 (50). – С. 96-100.

9. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. – М.: Наука, 1977. – 344 с.