

Тищенко Л. Н.

Ольшанский В. П.

Харьковский
национальный
технический
университет
сельского хозяйства
им. Петра Василенко

Ольшанский С. В.

Национальный
технический
университет
«Харьковский
политехнический
институт»

УДК 532:631.362

К РАСЧЁТУ КОЛЕБАНИЙ НЕОДНОРОДНОГО СЛОЯ ЗЕРНОВОЙ СМЕСИ НА ВИБРОРЕШЕТЕ

Розглянуто гармонічні коливання швидкості потоку неоднорідного вібророзрідженого шару, які виникають внаслідок вздовжніх вібрацій плоского нахиленого решета. Зміну вібров'язкості суміші по висоті шару описано дробово-лінійною функцією. В функціях Кельвіна дробового індексу отримано замкнутий розв'язок граничної задачі гідродинаміки.

Harmonical vibration of velocity of a flow non-uniform vibroliquefaction of a layer are considered arising owing to longitudinal vibrations of a flat inclined sieve. The change vibrovязkost of a mix on height of a layer is described by fractional-linear function. In Kelvin functions of a fractional index the closed solutions of a regional problem of hydrodynamics is received.

Постановка проблеми. Вибрации решета интенсифицируют процесс сепарирования зерновой смеси. В связи с этим изучение влияния параметров колебаний решета на сегрегацию зернового материала и движение его по перфорированной рабочей поверхности относится к актуальным научно-практическим задачам. При этом важное значение приобретает разработка адекватных математических моделей, которые уменьшают затраты на проведение экспериментов. Поэтому математическое моделирование активно применяют при решении задач, связанных с виброрешётным разделением зерновых материалов.

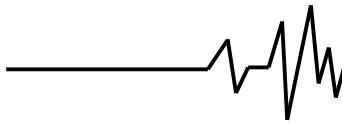
Обзор последних публикаций. В научной литературе описаны различные теоретические основы моделирования. Одна из них базируется на аналогии в поведении вязкой ньютоновской жидкости и сыпучей среды, которая в условиях вибраций приобретает свойство текучести [1,2,3]. В рамках этого направления при описании движения зерновой смеси по виброрешету используют известные уравнения течения однородной вязкой жидкости и классические методы их решения [4,5]. Но, учитывая специфику зерновой смеси, при разработке уточнённых моделей движения желательнее

учесть изменение вибровязкости по толщине зернового слоя, вызванное изменением внутреннего давления. Реализация такого уточнения возможна с применением уравнений динамики неоднородной вязкой жидкости. Рассматривая колебания скорости потока смеси, в работах [6,7] изменение вибровязкости по толщине слоя аппроксимировали линейной функцией декартовой координаты, перпендикулярной направлению потока. В отличие от указанных публикаций здесь для аппроксимации используется дробно-линейная функция.

Целью работы является получение формул для расчёта колебаний скорости движения зерна по наклонному плоскому виброрешету с учётом увеличения вибровязкости смеси по гиперболическому закону по мере удаления от свободной поверхности вглубь слоя.

Предполагается, что решето совершает продольные гармонические колебания в своей плоскости и наклонено под углом к горизонту.

Основная часть работы. Проекцию скорости потока смеси $u(y,t)$ на ось ox (см. рис. 1) в стационарном режиме движения считаем зависимой лишь от поперечной координаты y и времени t . Её определяем, решив краевую задачу для уравнения:



$$\frac{\partial}{\partial y} \left[v(y) \frac{\partial u}{\partial y} \right] - \frac{\partial u}{\partial t} = -g \sin \theta, \quad (1)$$

при граничных условиях:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0; \quad u(h, t) = A^* \omega \sin(\omega t). \quad (2)$$

В выражениях (1), (2) g - ускорение свободного падения; θ - угол наклона решета к горизонту; A^*, ω - амплитуда и круговая частота продольных колебаний решета в его плоскости; h - толщина движущегося слоя зерна.

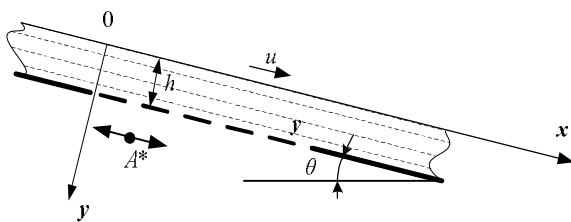


Рис. 1. Расчётная схема движения слоя зерновой смеси по виброрешету

Кинематическую вибровязкость псевдооживленной зерновой смеси аппроксимируем дробно-линейной функцией:

$$v(y) = \frac{v_0}{1 - \alpha y}, \quad (3)$$

где $v_0 = v(0)$ - вибровязкость у свободной поверхности слоя; α - положительная постоянная, такая что $\alpha h < 1$.

Учитывая (3), введением вспомогательной переменной $\xi = 1 - \alpha y$,

уравнение (1) преобразуем к виду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\xi}{\alpha^2 v_0} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{g \sin \theta}{\alpha^2 v_0} \xi. \quad (4)$$

Его решение представляем суммой

$$u(y, t) = u_1(y) + u_2(y, t), \quad (5)$$

слагаемые которой удовлетворяют граничным условиям:

$$\left. \frac{du_1}{dy} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial u_2}{\partial y} \right|_{y=0} = 0; \quad u_1(h) = 0; \quad u_2(h, t) = A^* \omega \sin(\omega t), \quad (6)$$

вытекающим из (2).

Поставив (5) в (4), получаем уравнения:

$$\frac{d^2 u_1}{d\xi^2} - \frac{1}{\xi} \frac{du_1}{d\xi} = -\frac{g \sin \theta}{\alpha^2 v_0} \xi,$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\xi} \frac{\partial u_2}{\partial \xi} - \frac{\xi}{\alpha^2 v_0} \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0. \quad (7)$$

Первое из них сводится к линейному уравнению первого порядка. Используя известные способы его решения, с учётом (6), находим

$$u_1(y) = \frac{g \sin \theta}{v_0} \left(\frac{h^2 - y^2}{2} - \alpha \frac{h^3 - y^3}{3} \right). \quad (8)$$

Второе слагаемое в сумме (5) ищем в виде:

$$u_2(y, t) = \operatorname{Re} w(y) \sin(\omega t) + \operatorname{Im} w(y) \cos(\omega t). \quad (9)$$

Согласно (6) и (7) комплексная функция вещественного аргумента $w(y)$ должна удовлетворять уравнению:

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} - \frac{1}{\xi} \frac{dw}{d\xi} - \frac{i\omega\xi}{\alpha^2 v_0} w = 0, \quad i = \sqrt{-1} \quad (10)$$

и граничным условиям:

$$\operatorname{Re} \left. \frac{dw}{dy} \right|_{y=0} = \operatorname{Im} \left. \frac{dw}{dy} \right|_{y=0} = 0; \quad \operatorname{Re} w(h) = A^* \omega; \quad \operatorname{Im} w(h) = 0. \quad (11)$$

Общим решением уравнения (10) есть:

$$w(y) = \eta^{2/3} \left[(c_1 + ic_2) e^{i\pi/3} I_{2/3} \left(\eta e^{i\pi/4} \right) + (c_3 + ic_4) e^{-i\pi/3} K_{2/3} \left(\eta e^{i\pi/4} \right) \right]. \quad (12)$$

Здесь $\eta = \frac{2}{3\alpha} \sqrt{\frac{\omega}{v_0}} \xi^{3/2}$; $I_{2/3}(z), K_{2/3}(z)$ -

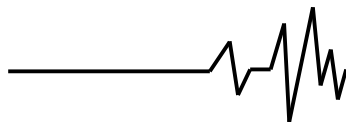
модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда индексов $2/3$; c_1, c_2, c_3, c_4 - вещественные произвольные постоянные.

Цилиндрические функции комплексного аргумента выражаются через функции Кельвина [8]:

$$e^{i\pi/3} I_{2/3} \left(\eta e^{i\pi/4} \right) = \operatorname{ber}_{2/3}(\eta) + i \operatorname{bei}_{2/3}(\eta);$$

$$e^{-i\pi/3} K_{2/3} \left(\eta e^{i\pi/4} \right) = \operatorname{ker}_{2/3}(\eta) + i \operatorname{kei}_{2/3}(\eta),$$

что позволяет выделить в (12) вещественную и мнимую части. Такое преобразование даёт:



$$\begin{aligned} \operatorname{Re} w(y) &= \eta^{2/3} [c_1 \operatorname{ber}_{2/3}(\eta) - c_2 \operatorname{bei}_{2/3}(\eta) + \\ &+ c_3 \operatorname{ker}_{2/3}(\eta) - c_4 \operatorname{kei}_{2/3}(\eta)]; \\ \operatorname{Im} w(y) &= \eta^{2/3} [c_1 \operatorname{bei}_{2/3}(\eta) + c_2 \operatorname{ber}_{2/3}(\eta) + \\ &+ c_3 \operatorname{kei}_{2/3}(\eta) + c_4 \operatorname{ker}_{2/3}(\eta)]. \end{aligned} \quad (13)$$

Подставив выражения (13), а также их производные по η , в (11), приходим к системе четырёх алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} c_1 \operatorname{ber}_{2/3}(\eta_1) - c_2 \operatorname{bei}_{2/3}(\eta_1) + \\ + c_3 \operatorname{ker}_{2/3}(\eta_1) - c_4 \operatorname{kei}_{2/3}(\eta_1) &= A^* \omega \eta^{-2/3}; \\ c_1 \operatorname{bei}_{2/3}(\eta_1) + c_2 \operatorname{ber}_{2/3}(\eta_1) + \\ + c_3 \operatorname{kei}_{2/3}(\eta_1) + c_4 \operatorname{ker}_{2/3}(\eta_1) &= 0; \\ c_1 br - c_2 bi + c_3 kr - c_4 ki &= 0; \\ c_1 bi + c_2 br + c_3 ki + c_4 kr &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} br &= \frac{2}{3} \operatorname{ber}_{2/3}(\eta_0) + \eta_0 \operatorname{ber}'_{2/3}(\eta_0) = \\ &= -\frac{\eta_0}{\sqrt{2}} [\operatorname{ber}_{-1/3}(\eta_0) + \operatorname{bei}_{-1/3}(\eta_0)]; \\ bi &= \frac{2}{3} \operatorname{bei}_{2/3}(\eta_0) + \eta_0 \operatorname{bei}'_{2/3}(\eta_0) = \\ &= \frac{\eta_0}{\sqrt{2}} [\operatorname{ber}_{-1/3}(\eta_0) - \operatorname{bei}_{-1/3}(\eta_0)]; \\ kr &= \frac{2}{3} \operatorname{ker}_{2/3}(\eta_0) + \eta_0 \operatorname{ker}'_{2/3}(\eta_0) = \\ &= -\frac{\eta_0}{\sqrt{2}} [\operatorname{ker}_{-1/3}(\eta_0) + \operatorname{kei}_{-1/3}(\eta_0)]; \\ ki &= \frac{2}{3} \operatorname{kei}_{2/3}(\eta_0) + \eta_0 \operatorname{kei}'_{2/3}(\eta_0) = \\ &= \frac{\eta_0}{\sqrt{2}} [\operatorname{ker}_{-1/3}(\eta_0) - \operatorname{kei}_{-1/3}(\eta_0)]; \end{aligned}$$

$$\eta_0 = \frac{2}{3\alpha} \sqrt{\frac{\omega}{v_0}}; \quad \eta_1 = \frac{2}{3\alpha} \sqrt{\frac{\omega}{v_0}} (1 - \alpha h)^{3/2};$$

штрихом обозначены производные функций Кельвина.

Решив систему (14), находим постоянные $c_j, j = \overline{1;4}$:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad c_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \\ c_3 &= c_1 \delta_1 + c_2 \delta_2; \quad c_4 = -c_1 \delta_2 + c_2 \delta_1; \\ \Delta_1 &= A^* \omega \eta^{-2/3} [\operatorname{ber}_{2/3}(\eta_1) + \delta_1 \operatorname{ker}_{2/3}(\eta_1) + \\ &+ \delta_2 \operatorname{kei}_{2/3}(\eta_1)]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= -A^* \omega \eta^{-2/3} [\operatorname{bei}_{2/3}(\eta_1) + \delta_1 \operatorname{kei}_{2/3}(\eta_1) - \\ &- \delta_2 \operatorname{ker}_{2/3}(\eta_1)]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= [\operatorname{ber}_{2/3}(\eta_1) + \delta_1 \operatorname{ker}_{2/3}(\eta_1) + \delta_2 \operatorname{kei}_{2/3}(\eta_1)]^2 + \\ &+ [\operatorname{bei}_{2/3}(\eta_1) + \delta_1 \operatorname{kei}_{2/3}(\eta_1) - \delta_2 \operatorname{ker}_{2/3}(\eta_1)]^2; \end{aligned}$$

$$\delta_1 = -\frac{br \cdot kr + bi \cdot ki}{kr^2 + ki^2}; \quad \delta_2 = \frac{bi \cdot kr - br \cdot ki}{kr^2 + ki^2}.$$

Учитывая эти выражения констант, а также (5), (8), (9) и (13), получаем формулу скорости потока слоя зерна по решетке:

$$\begin{aligned} u(y, t) &= \frac{g \sin \theta}{v_0} \left(\frac{h^2 - y^2}{2} - \alpha \frac{h^3 - y^3}{3} \right) + \\ &+ \eta^{2/3} [c_1 \operatorname{ber}_{2/3}(\eta) - c_2 \operatorname{bei}_{2/3}(\eta) + c_3 \operatorname{ker}_{2/3}(\eta) - \\ &- c_4 \operatorname{kei}_{2/3}(\eta)] \sin(\omega t) + \eta^{2/3} [c_1 \operatorname{bei}_{2/3}(\eta) + \\ &+ c_2 \operatorname{ber}_{2/3}(\eta) + c_3 \operatorname{kei}_{2/3}(\eta) + c_4 \operatorname{ker}_{2/3}(\eta)] \times \\ &\times \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (15)$$

Колебания скорости потока смеси происходят с той же частотой, что и вибрации решета, но со смещением по фазе.

Удельную производительность решета определяем интегрированием:

$$\bar{Q}(t) = \int_0^h u(y, t) dy = \frac{2}{3\alpha \eta_0^{2/3}} \int_{\eta_1}^{\eta_0} u(\eta, t) \cdot \eta^{-1/3} d\eta. \quad (16)$$

Поскольку [8]:

$$\int \eta^{1/3} \begin{bmatrix} \operatorname{ber}_{2/3}(\eta) \\ \operatorname{bei}_{2/3}(\eta) \end{bmatrix} d\eta = \frac{\eta^{1/3}}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \operatorname{ber}_{-1/3}(\eta) - \operatorname{bei}_{-1/3}(\eta) \\ \operatorname{ber}_{-1/3}(\eta) + \operatorname{bei}_{-1/3}(\eta) \end{bmatrix},$$

$$\int \eta^{1/3} \begin{bmatrix} \operatorname{ker}_{2/3}(\eta) \\ \operatorname{kei}_{2/3}(\eta) \end{bmatrix} d\eta = \frac{\eta^{1/3}}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \operatorname{ker}_{-1/3}(\eta) - \operatorname{kei}_{-1/3}(\eta) \\ \operatorname{ker}_{-1/3}(\eta) + \operatorname{kei}_{-1/3}(\eta) \end{bmatrix},$$

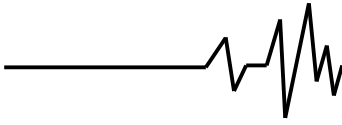
то, согласно (15) и (16),

$$\begin{aligned} \bar{Q}(t) &= \frac{gh^3}{3v_0} \left(1 - \frac{3\alpha h}{4} \right) \sin \theta + \frac{\sqrt{2}}{3\alpha \eta_0^{2/3}} [(c_1 \Phi_1 - c_2 \Phi_2 + \\ &+ c_3 \Phi_3 - c_4 \Phi_4) \sin(\omega t) + (c_1 \Phi_2 + c_2 \Phi_1 + \\ &+ c_3 \Phi_4 + c_4 \Phi_3) \cos(\omega t)]. \end{aligned}$$

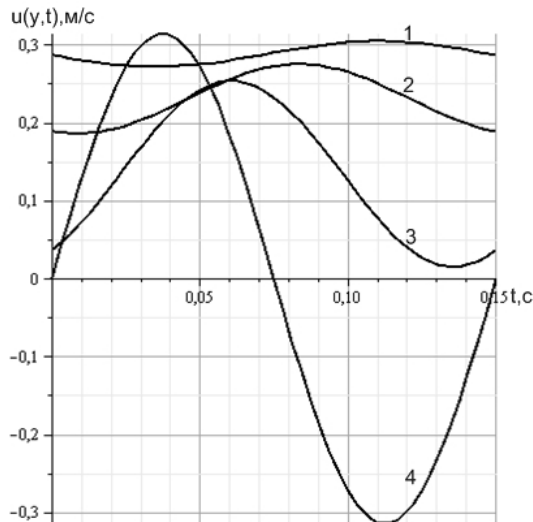
Здесь

$$\begin{aligned} \Phi_{1,2} &= \eta_0^{1/3} [\operatorname{ber}_{-1/3}(\eta_0) \mp \operatorname{bei}_{-1/3}(\eta_0)] - \eta_1^{1/3} \times \\ &\times [\operatorname{ber}_{-1/3}(\eta_1) \mp \operatorname{bei}_{-1/3}(\eta_1)]; \end{aligned}$$

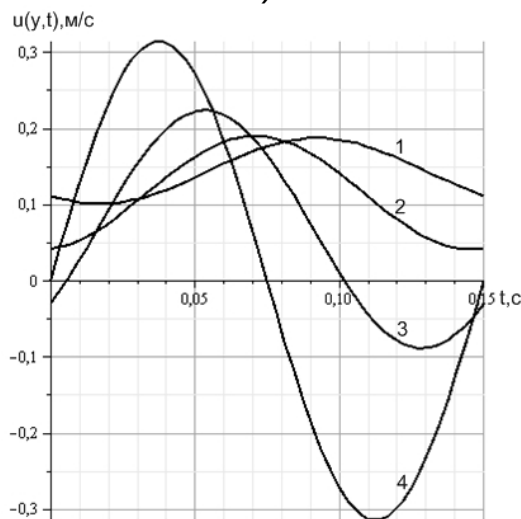
$$\begin{aligned} \Phi_{3,4} &= \eta_0^{1/3} [\operatorname{ker}_{-1/3}(\eta_0) \mp \operatorname{kei}_{-1/3}(\eta_0)] - \eta_1^{1/3} \times \\ &\times [\operatorname{ker}_{-1/3}(\eta_1) \mp \operatorname{kei}_{-1/3}(\eta_1)]. \end{aligned}$$



С целью апробации полученных решений краевой задачи проведены вычисления изменений скорости потока смеси при следующих исходных данных: $\rho = 750 \text{ кг/м}^3$; $f = 0,47$; $M = 0,00004 \text{ кг}$; $r_0 = 0,001825 \text{ м}$; $h = 0,006 \text{ м}$, $\alpha = 0,1 \text{ м}^{-1}$, которые соответствуют зерновой смеси пшеницы [4]. Работу решета характеризовали параметрами: $\theta = 5^\circ$; $A^* = 0,0075 \text{ м}$; $\omega = 41,86 \text{ с}^{-1}$.



а)



б)

Рис. 2. Зависимости колебаний скорости зерновой смеси пшеницы по высоте неоднородного слоя: 1, 2, 3, 4 -

$y/h = 0,25; 0,5; 0,75; 1,$

а) - $v_0 = 0,00005 \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$; б) - $v_0 = 0,0001 \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$

Выводы

Расчёты с помощью полученных решений показали, что амплитуды колебаний

скорости потока быстро убывают с удалением от поверхности решета (с уменьшением y). На свободной поверхности слоя скорость потока близка к постоянному значению, которое зависит от величины v_0 . Увеличение этого параметра сопровождается возрастанием амплитуд колебаний у свободной поверхности слоя и уменьшением среднего значения скорости, относительно которого происходят эти колебания. Идентификация параметров v_0 и α по результатам экспериментов позволяет повышать адекватность математической модели движения зерновой смеси на плоском наклонном решете в стационарном режиме его работы.

Литература

1. Захаров Н.Н. Об аналогии вибрируемого слоя с вязкой жидкостью // Доклады МИИСП. – М., 1966. – Т. III. Вып. 1. – С. 201-210.

2. Членов В.А., Михайлов Н.В. Виброкипящий слой. М.: Наука, 1972. – 343 с.

3. Тищенко Л.Н. Гидродинамические характеристики псевдооживленных сыпучих сред при виброцентробежном сепарировании на зерноперерабатывающих предприятиях // Сучасні напрямки технології та механізації процесів переробних та харчових виробництв: Вісник ХДТУСГ. – Харків: ХДТУСГ, 2001. – Вып. 5. – С. 13-33.

4. Тищенко Л.Н. Интенсификация сепарирования зерна. – Харьков: Основа, 2004. – 224 с.

5. Тищенко Л.Н., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В. Гидродинамика сепарирования зерна. – Харьков: Миськдрук, 2010. – 174 с.

6. Тищенко Л.Н., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В. О колебаниях скорости неоднородного слоя зерновой смеси на плоском виброрешете // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Мелітополь: ТДАТУ, 2010. – Вып. 10, Т.7. – С. 32-42.

7. Ольшанский В.П., Ольшанский С.В., Дидур В.А. Колебания скорости неоднородного слоя зерновой смеси, вызванные поперечными вибрациями решета // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Мелітополь: ТДАТУ, 2010. – Вып. 10, Т.7. – С. 173-180.

8. Абрамовиц А., Стиган И. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). – М.: Наука, 1979. – 832 с.