**Бурдейна О. В.****Вінницький
національний
технічний
університет****Гель П. В.****Вінницький
національний
аграрний
університет****Бурдейний В. М.****УСЗ Вінницька філія****УДК 534.12+517.927.2****МОДИФІКАЦІЯ ВІБРАЦІЙНОГО
СПЕКТРУ МЕМБРАНИ З
НЕРЕГУЛЯРНИМ ХАОТИЧНИМ
КОНТУРОМ**

В данной работе предлагается применение метода конформных преобразований для исследования вибрационного спектра мембраны, ограниченной нерегулярным контуром близким к круговому. Соответствующее конформное отображение записано с точностью линейной по флуктуациям формы. Вычислена функция распределена частных производных, что позволило получить волновое уравнение в приближении эффективного поля. Исходя из установленной формы волнового уравнения в основном порядке теории возмущений вычислены частоты вибрационных мод и определена модификация спектральной плотности колебаний.

We have applied conform mapping method to investigate the eigenfrequencies's spectrum modifications because of the circular membrane boundary contour irregular distortions. Conform mapping of the contour to the canonical one has been written in assumption of small fluctuations of its form. The distribution of partial derivatives as well as wave equation in effective field approximation have been deduced. These results allowed us to find leading contributions to normal modes and evaluate spectral density modifications. By this paper the authors are trying to attract attention to conform mapping as effective method to study some two-dimensional systems with chaotic boundary.

1. Постановка задачі.

Тут досліджуються коливання мембрани, закріпленої вздовж контуру хаотичної форми близької до колової. В наближенні суцільного ізотропного середовища має місце розділення поперечних і поздовжніх хвиль, а тому поздовжні і поперечні зміщення описуються відповідними рівняннями Гельмгольца, які відрізняються лише швидкостями поширення хвиль. В силу цього нижче розглядається рівняння, яке описує як поперечні, так і поздовжні хвилі. Слід зауважити, що відзначене розділення хвиль може порушитися за рахунок граничних умов. Проте, для закріпленої мембрани зміщення на граничному контурі повинні задовольняти умовам Діріхле. Тому виключається зв'язування коливань різної поляризації і напряду завдяки граничним ефектам.

Позначивши зміщення через ζ , відповідне рівняння запишемо в традиційній формі [1,2]:

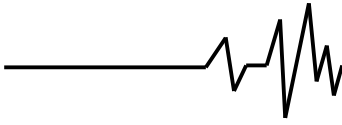
$$\nabla^2 \zeta + \frac{\omega^2}{c^2} \zeta = 0 \quad (1)$$

Що стосується граничних умов, то ці зводяться до співвідношення

$$\zeta|_{\Gamma \in \Gamma} = 0 \quad (2)$$

Для мембрани, обмеженої ідеальним коловим контуром радіусу R розв'язок граничної задачі (1)-(2) є добре відомим [2,3] і зводиться до функцій Бесселя цілочисленого порядку, в той час як власні частоти визначаються нулями функцій Бесселя.

Проте, ці результати перестають бути вірними, якщо контур, як це насправді має місце на практиці, відрізняється від колового. Відхилення від ідеальності зобов'язані технологічним причинам. Виключивши похибки систематичного характеру, матимемо контур обмежений кривою, кожен елемент якої описується випадковою функцією. Границя, як



така, стає випадковою і її відхилення від колової задається функцією

$R \cdot \delta(t)$. Тут i надалі аргументом випадкової функції δ є кутова координата точки граничного контуру.

Стосовно функції $\delta(t)$, то її розподіл, як і інші статистичні властивості, є похідним від технології виготовлення мембрани і априорі невідомий. Проте, подальший розгляд стає можливим лише при умові, що ці статистичні характеристики задані у явній формі. Ми приймаємо припущення, за яким відхилення граничного контуру від кола підлягають гауссівському розподілу. Аргументуючи цей вибір, ми можемо послатися лише на його поширеність, на простоту розрахунку кореляторів та інших середніх і, не в останню чергу на відсутність більш-менш прийнятної альтернативи. При гауссівському розподілі корелятори підлягають статистичній теоремі Віка і допускають вираження в термінах бінарної кореляційної функції $\Delta(t, t') \equiv \langle \delta(t) \delta(t') \rangle$, де має місце усереднення за реалізаціями випадкової функції. Усереднення повертає ротаційну симетрію мембрани, в силу чого бінарний корелятор має наступні властивості:

$$\Delta(t, t') = \Delta(|t - t'|) = \Delta(|t - t' \pm 2\pi|) \quad (3)$$

Закінчуючи з описом функції форми, ми припускаємо, що кожна її реалізація разом з відповідними частинними похідними задовольняє умовам теорем [4], які дозволяють застосовувати техніку наближених конформних перетворень.

$$u(\rho, \theta) = \rho \cos \theta - \rho(1 - \rho) \cdot M + 2\rho^2 N \cdot \sin \theta; \quad (4)$$

$$v(\rho, \theta) = \rho \sin \theta - \rho(1 - \rho) M \cdot \sin \theta - 2\rho^2 N \cdot \cos \theta \quad (5)$$

де функції M , N задані так:

$$M = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\delta(t) dt}{D(\theta - t, \rho)}; \quad N = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\delta(t) \cdot \sin(\theta - t) dt}{D(\theta - t, \rho)} \quad (6)$$

3

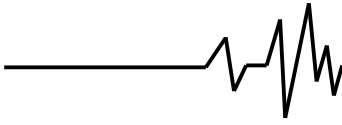
$$D(\theta - t, \rho) = 1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\theta - t) \quad (7)$$

Конформне відображення спрощує форму границі і дозволяє виконати бажане розділення змінних в точках контуру, але ефект спотворення границі за рахунок оператора Бертрама-Лапласа переноситься безпосередньо в хвильове рівняння, яке після перетворення координат (4), (5) приводиться до наступного вигляду:

$$\nabla_{\rho}^2 \zeta(\rho, \theta) + \frac{\omega^2}{c^2} R^2 Q(\rho, \theta) \zeta(\rho, \theta) = 0 \quad (8)$$

В цьому рівнянні функція $Q(\rho, \theta)$ визначена співвідношенням

$$Q(\rho, \theta) = \frac{1}{\rho^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} \right)^2 \right] \quad (9)$$



є не що інше, як якобіан переходу від змінних u, v до змінних ρ, θ . За своїм змістом квадратний корінь з цієї функції задає локальне значення безрозмірного хвильового числа.

Для певної форми контуру функція $Q(\rho, \theta)$ повністю визначається формулами (4-7,9). Але $\delta(t)$ є невідомою і, крім того, випадковою величиною. Саме тому стає необхідним ще один елемент, який полягає в процедурі усереднення хвильового рівняння (7) за реалізаціями випадкової функції форми $\delta(t)$. Введемо співвідношенням

$$\kappa^2(\rho, \theta) = Q(\rho, \theta) - \langle Q(\rho, \theta) \rangle \quad (10)$$

флуктуаційну компоненту квадрату локального хвильового числа. Очевидно, що флуктуаційна складова дає вклад лише, починаючи з другого порядку теорії збурень. Обмежившись основним порядком, приходимо до рівняння

$$\nabla_{\rho}^2 \zeta(\rho, \theta) + \frac{\omega^2}{c^2} R^2 \langle Q(\rho, \theta) \rangle \zeta(\rho, \theta) = 0 \quad (11)$$

яке враховує усереднений вплив спотворень границі на вібраційні моди мембрани.

Рівняння (11) є основним результатом застосовуваного методу і відповідає добре відомому [10] наближенню ефективного поля. Стосовно ефектів вищих порядків зауважимо, що вони можуть бути враховані застосуванням

техніки фейнманівських діаграм, розвинутої для статистичних методів квантової теорії поля [11].

3. Розподіл частинних похідних.

Вищеописаний підхід стає змістовним лише при умові, що усереднення за статистичними реалізаціями форми спотворень можна здійснити у явному вигляді. Звернувшись до означення (9), можна переконаватися, що єдине, що для цього потрібне – це функція розподілу частинних похідних. В силу умов Коші-Рімана [4] достатньо встановити розподіл двох із чотирьох частинних похідних першого порядку трансформуючої функції. Введемо цей розподіл співвідношенням

$$f(\xi, \eta) = \langle \delta(\xi - \partial_{\theta} u) \cdot \delta(\eta - \partial_{\theta} v) \rangle \quad (12)$$

Дельта-функції Дірака, які мають місце у формулі (12), замінюються відповідними інтегральними зображеннями після чого приймаються до уваги припущення щодо статистичних властивостей граничного контуру. Оскільки ми прийняли гіпотезу про нормальний розподіл випадкових функцій $\delta(t)$, то обчислення середнього за конфігураціями виконується за теоремою Віка. Подальші перетворення приводять до інтегралів пуассонівського типу. Відповідні інтегрування дають

$$f(\xi, \eta) = (2\pi)^{-1} (R_{XY})^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ - \frac{\langle [Y_{\theta}(\xi + \rho \sin \theta) - X_{\theta}(\eta - \rho \cos \theta)]^2 \rangle}{2R_{XY}} \right\} \quad (13)$$

де

$$R_{XY} = \langle X_{\theta}^2 \rangle \langle Y_{\theta}^2 \rangle - \langle X_{\theta} Y_{\theta} \rangle^2 \quad (14)$$

і флуктуаційні компоненти частинних похідних X_{θ}, Y_{θ} визначені так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \theta} &= -\rho \sin \theta + X_{\theta}; \\ \frac{\partial v}{\partial \theta} &= \rho \cos \theta + Y_{\theta} \end{aligned} \quad (15)$$

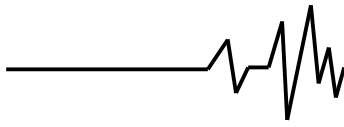
Явна форма цих випадкових складових встановлюється на основі (4-7) після чого стає можливим обчислення бінарних кореляторів

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi S^2} \exp \left\{ - \frac{1}{2S^2} [(\xi + \rho \sin \theta)^2 + (\eta - \rho \cos \theta)^2] \right\} \quad (16)$$

, які визначають параметри нормального розподілу (13). Прямі розрахунки показують, що, як наслідок осевої симетрії, яка відновлюється при усередненні, парні корелятори $\langle X_{\theta}^2 \rangle, \langle Y_{\theta}^2 \rangle$ дорівнюють один одному, в той час, як перехресна кореляційна функція $\langle X_{\theta} Y_{\theta} \rangle$ виявляється рівною нулю. Тому, позначивши

$$\langle X_{\theta}^2 \rangle = \langle Y_{\theta}^2 \rangle \equiv S^2,$$

для функції розподілу приходимо до остаточного результату



Дисперсія розподілу може бути виражена в термінах спектральної густини парного корелятора флуктуацій граничного контуру s_m , яку визначимо співвідношенням

$$s_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta(\tau) \exp(-im\tau) d\tau \quad (17)$$

Прийнявши до уваги (3-7,15,17), після відповідних інтегрувань по кутовій змінній, для дисперсії S^2 одержуємо

$$S^2 = \sum_{m \geq 1} \sigma_{m-1} \cdot m^2 \rho^{2m} \quad (18)$$

де

$$\sigma_m = s_0, m = 0; \quad \sigma_m = 2s_m, m \geq 1; \quad (19)$$

4. Ефективне локальне хвильове число.

Звернувшись до означення (9) для $\langle Q(\rho, \theta) \rangle$, записуємо

$$S^2 = \begin{cases} \Delta_0 \cdot \rho^2 \\ \frac{\alpha \Delta_0}{2\sqrt{\pi}} \rho^2 + \frac{\alpha \Delta_0}{\sqrt{\pi}} \sum_{m \geq 1} (m+1)^2 \rho^{2(m+1)} \exp\left(-\frac{m^2 \alpha^2}{2}\right) \\ -\frac{\Delta_0}{2\pi} \rho^2 + \frac{\Delta_0 \rho^2 [1 + \rho^2 \exp(-\alpha)]}{\pi [1 - \rho^2 \exp(-\alpha)]^3} \end{cases} \quad (22)$$

Тут перша формула відповідає однорідним кореляціям, друга-гаусівським кореляціям і третя-лоренцівським флуктуаціям. Зауважимо, що Δ_0 -квадрат амплітуди флуктуацій, а α - радіус кореляції для гаусівського розподілу. Для всіх випадків S^2 є гладкою неособливою функцією полярного радіусу на відрізьку $[0,1]$. Співвідношення аналогічні формулам (22) отримані для фріделевських флуктуацій і тих, які класифікуються як «білий шум». Не виписуючи явних результатів, відзначимо, що в обох

$$\langle Q(\rho, \theta) \rangle = \frac{1}{\rho^2} \iint (\xi^2 + \eta^2) f(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (20)$$

Очевидні інтегрування дають результат

$$\langle Q(\rho, \theta) \rangle = 1 + \frac{2S^2}{\rho^2} \quad (21)$$

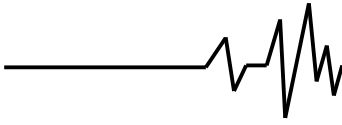
простий як за формою, так і за змістом. Для регулярного контуру співвідношення (21) як і повинно бути, приводить до значення рівного одиниці.

Щодо залежності від полярного радіусу, то ця повністю визначається спектральною густиною флуктуацій форми. Нами розглянуто кілька стандартних випадків. Для того, щоб скласти уявлення про поведінку S^2 , приведемо деякі результати в явному вигляді:

випадках дисперсія не має особливостей в центрі «мембрани». Проте, при флуктуаціях типу-«білий шум» точка $\rho = 1$ є особливою, що обумовлено δ -подібним характером кореляцій.

В останніх двох виразах маємо експоненційні множники, які в силу додатних значень радіусу кореляції α менші, ніж одинця. В силу цього можна обмежитися доданками основного порядку за цими малими параметрами. Таким способом приходимо до наступних співвідношень

$$\langle Q(\rho, \theta) \rangle = \begin{cases} 1 + 2\Delta_0 \\ 1 + \frac{\alpha \Delta_0}{\sqrt{\pi}} + \frac{8\alpha \Delta_0}{\sqrt{\pi}} \rho^2 \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2}\right), \rho^2 \exp\left(-\frac{3\alpha^2}{2}\right) \ll \frac{4}{9} \\ 1 + \frac{\Delta_0}{2\pi} + \frac{8\Delta_0}{\pi} \rho^2 \exp(-\alpha), \rho^2 \exp(-\alpha) \ll \frac{4}{9} \end{cases} \quad (23)$$



для квадрату локального хвильового числа в наближенні ефективного поля.

5. Спектр і спектральна густина станів.

Навіть при відомому ефективному потенціалі розв'язати рівняння (11) в загальному вигляді неможливо. Традиційним у таких випадках є застосування теорії збурень[12], розвиток якої для більярдних задач в деталях описано в роботі [13]. Розкладемо зміщення в ряд за нормованими і ортогональними функціями

$$\psi_{ms}(\rho, \theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi} |J'_m(k_{ms})|} J_m(k_{ms}\rho) \exp(im\theta), \quad (24)$$

де $J_m(x)$ - функція Бесселя, $J'_m(x)$ - її похідна, а k_{ms} - згадуваний раніше нуль з номером s функції Бесселя порядку m . За своєю суттю система функцій $\psi_{ms}(\rho, \theta)$ є не чим іншим, як нормальними коливаннями мембрани з регулярною круговою формою, які відповідають нормальним вібраційним модам з частотами

$\omega_{ms}^0 = \frac{c}{R} k_{ms}$. Запропонований розклад має вигляд:

$$\zeta(\rho, \theta) = \sum_{m,s} C_{ms} \psi_{ms}(\rho, \theta) \quad (25)$$

Підстановкою розкладу (24) в рівняння (11) і проектуванням результату на систему нормальних мод (25) одержується система лінійних рівнянь для невідомих коефіцієнтів розкладу C_{ms} . Варто підкреслити, що наслідком симетрії ефективного поля є відсутність «перепутування» кутових квантових чисел. Приймаючи адіабатичний підхід, який нехтує «перепутуванням» радіальних квантових чисел, для власних частот одержуємо

$$\omega_{ms} = \frac{c}{R} k_{ms} \left\{ 1 + \frac{4}{|J'_m(k_{ms})|^2} \int_0^1 \frac{S^2}{\rho} J_m^2(k_{ms}\rho) d\rho \right\}^{-1/2} \quad (26)$$

Всі нулі функції Бесселя, за виключенням нуля $k_{01} \approx 0,89$, є більшими, ніж одиниця і швидко наростають зі збільшенням порядкового номера [14]. Поскільки $\rho \in [0,1]$, то матричний елемент у співвідношенні (26) визначається поведінкою S^2 при малих ρ . Виділивши з (23) доданки основного порядку

по ρ , після відповідних інтегрувань [15], одержуємо остаточний результат, який визначає спектр вібрацій мембрани в головному порядку за малими флуктуаціями форми обмежуючого контуру:

$$\omega_{ms} = \frac{c}{R} k_{ms} \left\{ 1 + \Lambda_1 + \Lambda_2 \frac{m^2 - 1}{k_{ms}^2} \right\}^{-1/2} \quad (27)$$

з константами Λ_1, Λ_2 , які залежать параметрів спектральної щільності флуктуацій. Для випадків, поданих формулами (22), ці константи визначаються так:

$$\Lambda_1 = \begin{cases} 2\Delta_0 \\ \frac{\alpha\Delta_0}{\sqrt{\pi}} + \frac{8\alpha\Delta_0}{3\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2/2} \\ \frac{\Delta_0}{2\pi} + \frac{8\Delta_0}{3\pi} e^{-\alpha} \end{cases} \quad \Lambda_2 = \begin{cases} 0 \\ \frac{16\alpha\Delta_0}{3\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2/2} \\ \frac{16\alpha\Delta_0}{3\pi} e^{-\alpha} \end{cases} \quad (28)$$

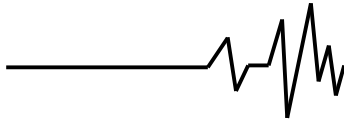
Одержані результати показують, що вже у головному порядку теорії збурень має місце не тільки перенормування швидкості поширення хвиль (доданок Λ_1), а також зміна аналітичної форми дисперсії нормальних мод (доданки, які містять коефіцієнти Λ_2). Порівняння експериментально спостережуваних частот з теоретичними модами дозволяє оцінити амплітуду флуктуацій і прогнозувати їх вплив на розлаштування частот приладів з сенсорами мембранного типу.

Розподіл частот за спектром є основною характеристикою коливальної системи. У нашому випадку власні частоти визначаються двома цілими числами. Одне з них забезпечує осьову симетрію зміщень, а інше задає положення вузлів відповідної стоячої хвилі. При відомих частотах ω_{ms} спектральна густина станів $g(\omega)$ описується співвідношенням

$$g(\omega) = \pi \sum_{m,s} \delta(\omega - \omega_{ms}) \quad (29)$$

В наближенні суцільного середовища сума за вібраційними модами переходить в інтегрування за неперервним хвильовим числом і для кількості станів, обмежених в просторі хвильових чисел поверхнею, яка відповідає частоті ω , визначається так:

$$N(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_D d^2\vec{\rho} d^2\vec{k} \quad (30)$$



де область інтегрування D задана умовою:

$$D \in \omega(\vec{k}, \vec{\rho}) \leq \omega \quad (31)$$

Зауважимо, що $\omega(\vec{k}, \vec{\rho})$ - квазікласична частота коливань мембрани з певною поляризацією.

Поскілки для $\omega(\vec{k}, \vec{\rho})$ з рівняння (11) в наближенні ефективного поля впливає

$$\omega(\vec{k}, \vec{\rho}) = \frac{ck}{R\sqrt{\langle Q(\rho, \theta) \rangle}}$$

то очевидні інтегрування в (30) приводять до співвідношення

$$N(\omega) = \frac{\omega^2 R^2}{2c^2} \int_0^1 \rho \langle Q(\rho, \theta) \rangle d\rho \quad (32)$$

Диференціювання (27) для спектральної густини вібраційних мод дає

$$g(\omega) = \omega \left(\frac{R}{c} \right)^2 \int_0^1 \rho \langle Q(\rho, \theta) \rangle d\rho = \omega \left(\frac{R}{c} \right)^2 \frac{\tilde{A}}{2\pi} \quad (33)$$

Вище зауважувалося, що $Q(\rho, \theta)$ є якобіаном переходу при конформному перетворенні. А тому в континуальному і квазікласичному наближенні ефективного поля до спектральної густини станів дають вклад квадратичні флуктуації площі мембрани. Залежність від частоти співпадає з такою, яка є властивою для акустичних хвиль, збуджених у однорідному суцільному середовищі і відповідає моделі Дебая [10].

Література

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Теория упругости, Наука, 1988, 206с.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики, Наука, 1977, 680с.

3. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики, ИЛ, т 1, 1958, 942с.

4. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функции комплексной переменной, «Наука», 1987, 688с.

5. Prosen T., Robnik M. Survey of the eigenfunctions of a billiard system between integrability and chaos, Journal of Physics A: Mathematical and General. 1993. Т. 26. № 20. С. 5365-5373.

6. Murthy G., Shankar R., Mathur H. Ballistic chaotic quantum dots with interaction: A numerical study of the Robnik-Berry billiard, Physical Review B: Condensed Matter and Materials Physics, 2005, T72, №7.

7. Gregor Tanner, Niels Sondergaard, Wave chaos in acoustics and elasticity, J. Phys A 40R443-510

8. G Veble, T Prosen and M Robnik, Expanded boundary integral method and chaotic time-reversal doublets in quantum billiards, New Journal of Physics 9 (2007) 15

9. Karl-Fredrik Berggren, Dmitrii N. Maksimov, Almas F. Sadreev, Quantum stress in chaotic Billiards.

10. Ashcroft Neil W., Mermin David N., Solid State Physics, Holt and Wilson, V1, 1976, 422p.

11. Бонч-Бруевич В.Л., Тябликов С.В., Метод функций Грина в статистической механике, Физматгиз, 1961, 312.

12. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика - Нерелятивистская теория, Наука, 1988,

13. Paolo Amore, Spectroscopy of drums and quantum billiards: perturbative and non-perturbative. Results, arXiv09,0910.4798V1, 2009

14. Абрамовиц М., Стиган И., Справочник по специальным функциям, «Наука», 1979, 832 с.

15. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И., Интегралы и ряды. Специальные функции «Наука», 1983, 752 с.