



Гурський В. М.

Ланець О. С.

Шпак Я. В.

Лозинський В. І.

**Національний  
університет  
“Львівська  
політехніка”**

УДК 621.01

## **ВПЛИВ НЕЛІНІЙНОСТІ ЗУСИЛЛЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПРИВОДУ НА ДИНАМІКУ ВІБРАЦІЙНИХ МАШИН**

*В статье рассматривается вопрос влияния нелинейности усилия электромагнитного привода на амплитудно-частотные характеристики и работу линейных трехмассных вибрационных машин, рассчитанных на высокоэффективный режим работы.*

*This article describes researches of the three-mass oscillating system, synthesis of its own frequencies of vibrations, analysis of amplitude-phase-frequency characteristics and possible modes works under the action of electromagnetic and inertia excitations of vibrations.*

**Вступ.** На сучасному етапі розвитку математичних програмних продуктів досить якісно можна промодельовувати роботу та перевірити працездатність практично будь-якої нелінійної динамічної системи. Більшість з таких систем, без розгляду питання їхнього технологічного призначення, є комплексом виконавчих пристроїв та приводних (електричних, пневматичних, гідравлічних) механізмів. Особливу увагу, з точки зору динаміки механічних систем, заслуговують вібраційні машини, оскільки їхні динамічні параметри в повній мірі залежать від умов роботи приводу. В цьому сенсі більшість задач про динаміку вібраційних машин розглядаються на основі системи диференціальних рівнянь руху механічної системи з рівняннями роботи приводу.

**2. Постановка проблеми.** Однак, поєднання динаміки вібромашини з умовами роботи приводу часто приносить значні математичні складності. В багатьох випадках робота приводу та його врахування в рівняннях руху механічної системи абстрагується та зводиться до більш простих, іноді ідеалізованих, джерел збурення. Особливо це проявляється на рівні нелінійних задач механічної коливальної системи. Тому, питання ідеалізації джерела збурення повинно бути аргументованим чи обґрунтованим шляхом порівняльного аналізу реального та ідеального приводів.

**3. Аналіз останніх досліджень.** Складні нелінійні процеси роботи електромагнітних

приводів досить широко описані в багатьох наукових працях. Більш конкретно такі питання розглянуті в роботах [1—5] та інших вчених, з врахуванням динаміки коливального процесу механічних систем вібраційних машин. Так, в одних роботах акцент ставить на роботі приводу, у інших – на динаміці механічної складової системи вібромашини. В роботі [6] обґрунтовано використання ідеального синусоїдального закону збурення за умови використання двотактного електромагнітного вібророзбуджувача (ЕМВ) для реалізації високоефективних режимів роботи в міжрезонансній області тримасових механічних систем. Робота [7] власне присвячена питанню врахування рівняння електромагнітного приводу в задачах динаміки лінійних тримасових механічних систем. У [8] використано нелінійність для пружної ланки, яка має місце в електромагнітному збуренні коливальних мас (ця пружна ланка визначає значення першої власної частоти коливаний) таі враховано нелінійність номінального зусилля збурення ЕМВ, що виникає у змінному повітряному проміжку на динаміку роботи вібромашини в околі другої власної частоти.

**4. Постановка задачі.** Метою даної статті є встановлення впливу нелінійності зусилля електромагнітного приводу, що виникає у змінному повітряному проміжку між осердям з котушкою і якорем на амплітудно-частотні характеристики та роботу лінійних тримасових механічних систем вібраційних машин, розрахованих на високоефективний

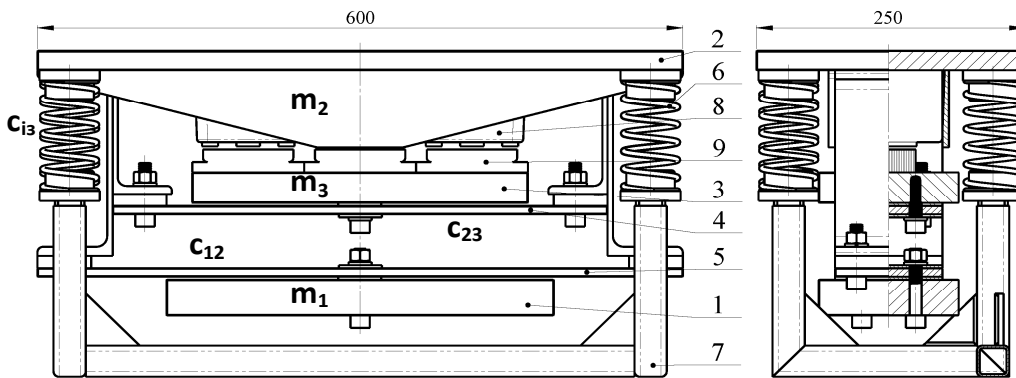


Рис. 1. Тримасовий вібраційний стіл із електромагнітним приводом:

- 1, 2, 3 — активна, робоча та реактивна коливальні маси;  
 4, 5 — резонансні плоскі пружини; 6 — віброізоляційні пружини;  
 7 — рама; 8, 9 — осердя та якорі ЕМВ

режим роботи [6], коли обидві пружні ланки є резонансними та формують вузьку наперед задану міжрезонансну область.

**5. Виклад основного матеріалу.**

Вирішення задачі базується на конструктивній схемі тримасового вібраційного стола з електромагнітним приводом за рис. 1. За вихідними значеннями маси робочого органа (наприклад  $m_2 = 60 \text{ кг}$ ), частоти збурення та  $\omega = 314 \text{ рад/с}$ , резонансного налагодження  $z = 0,95$  розраховується решта параметрів механічної складової системи, приймаючи згідно [6] значення частки жорсткості (параметра, що формує міжрезонансну область)  $\eta = 0,75$ :  $m_1 = 40 \text{ кг}$ ,  $m_3 = 3,465 \text{ кг}$ ,  $c_{12} = 2,422 \cdot 10^6 \text{ Н/м}$ ,  $c_{13} = 2 \cdot 10^4 \text{ Н/м}$ ,  $c_{23} = 2,83 \cdot 10^5 \text{ Н/м}$ .

Ключовими у встановленні квадратичної нелінійності зусилля електромагнітного приводу в змінному повітряному проміжку згідно [4, 5] є власне закони зміни цього проміжку в процесі роботи механічної системи  $\delta(t) = \delta - (x_2(t) - x_3(t))$  та сили струму  $i(t)$  в обмотці котушки:

$$F(t) = \frac{dW(t)}{d\delta(t)} = \mu_0 \cdot S \cdot w^2 \cdot \left[ \frac{i(t)}{2 \cdot [\delta - (x_2(t) - x_3(t))]} \right]^2 \quad (1)$$

де  $W(t) = L(t) \cdot i(t)^2 / 2$  — електрична енергія ЕМВ;  $L(t) = \mu_0 \cdot S \cdot w^2 / 2\delta(t)$  — індуктивність обмотки;  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$  — магнітна проникливість повітря;  $\delta$  — номінальне значення повітряного проміжку;  $S$  — площа поверхні полюсів магніту;  $w$  — кількість витків котушки ЕМВ.

Значення сили струму входить у рівняння балансу напруги в електричному контурі [2, 4]:

$$w \cdot \dot{\Phi}(t) + i(t) \cdot r = u(t) \quad (2)$$

де  $\Phi(t) = \mu_0 \cdot S \cdot w \cdot i(t) / 2(\delta - (x_2(t) - x_3(t)))$ ,  $u(t) = U_0 \sin(\omega t)$  — закони зміни магнітного потоку та напруги живлення.

Диференціювання по часу виразу для змінного магнітного потоку дає такий результат:

$$\dot{\Phi}(t) = \frac{\mu_0 \cdot S \cdot w}{2 \cdot (\delta - (x_2(t) - x_3(t)))^2} \left( \delta - (x_2(t) - x_3(t)) \cdot i(t) + i(t) \cdot (\dot{x}_2(t) - \dot{x}_3(t)) \right) \quad (3)$$

Система диференціальних рівнянь руху електромеханічної коливальної системи у сукупності з електричною містить механічну складову, яка описується трьома звичайними диференціальними рівняннями другого роду [6] з внутрішнім тертям (за гіпотезою Сорокіна) із нелінійним електромагнітним збуренням (1). З врахуванням (2) і (3), система диференціальних рівнянь, записана за амплітудними значеннями в комплексній формі, після скорочень набуде вигляду, що на рис. 2. Така форма запису дає можливість переходу до системи нелінійних рівнянь із пошуком вектору невідомих — амплітудних значень коливань мас та сили струму за попередньо прийнятих наближень: амплітуди коливань мас  $X_1 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ ,  $X_2 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ ,  $X_3 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ , сила струму  $I = 1 \text{ А}$ . Вирішення системи числовим методом "Levenberg-Marquardt" у програмі MathCAD дає змогу отримати АЧХ електромеханічної системи. Для моделювання вибрано такі параметри ЕМВ: номінальне значення повітряного проміжку  $\delta = 0,005 \text{ м}$ ; площа поверхні полюса магніту  $S = 2,784 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$ ;



номінальне значення напруги живлення  $U_0 = 120 \text{ В}$ ; опір обмотки  $r = 10 \text{ Ом}$ ; число витків  $w = 520$ ; коефіцієнт внутрішнього непружного опору пружин  $\gamma = 0,04$ . Наведено амплітудні значення параметрів електромеханічної системи за частоти збурення  $\omega = 314 \text{ рад/с}$ . На рис. 3 представлено частотні залежності для коливального руху мас в околі другої власної частоти коливань. У

якості порівняння наведено характеристики (рис. 3 б) відповідної лінійної моделі з гармонійним силовим збуренням [6]. Відмітимо, що аналогічний результат, як і для лінійної моделі, отримуємо, коли у алгоритмі на рис. 2 підставити  $x_2(t) - x_3(t) = 0$ , тобто розрахунок проводити за номінальним значенням повітряного проміжку  $\delta$ .

$$X1 := 0.002 \quad X2 := 0.001 \quad X3 := 0.001 \quad t := 1 \quad l := 1 \quad - \text{прийняті наближення}$$

Given

$$\frac{l \cdot \delta \cdot (\mu_0 \cdot S \cdot w^2) \cdot \omega \cdot i}{2 \cdot [\delta - (X2 - X3) \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}]^2} + l \cdot r = U_0$$

$$m1 \cdot (-\omega^2 \cdot X1) + c12 \cdot (1 + i \cdot \gamma) \cdot (X1 - X2) = 0$$

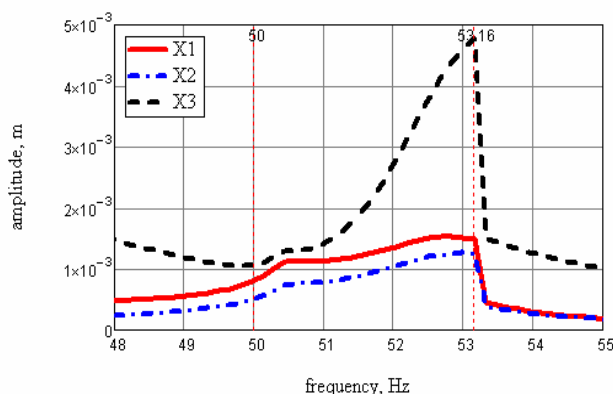
$$m2 \cdot (-\omega^2 \cdot X2) - c12 \cdot (1 + i \cdot \gamma) \cdot (X1 - X2) + c23 \cdot (1 + i \cdot \gamma) \cdot (X2 - X3) + ciz \cdot (1 + i \cdot \gamma) \cdot X2 = \frac{\mu_0 \cdot S \cdot w^2}{e^{i \cdot \omega \cdot t}} \cdot \left[ \frac{l}{2 \cdot [\delta - (X2 - X3) \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}]^2} \right]^2$$

$$m3 \cdot (-\omega^2 \cdot X3) - c23 \cdot (1 + i \cdot \gamma) \cdot (X2 - X3) = \frac{-(\mu_0 \cdot S \cdot w^2)}{e^{i \cdot \omega \cdot t}} \cdot \left[ \frac{l}{2 \cdot [\delta - (X2 - X3) \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}]^2} \right]^2$$

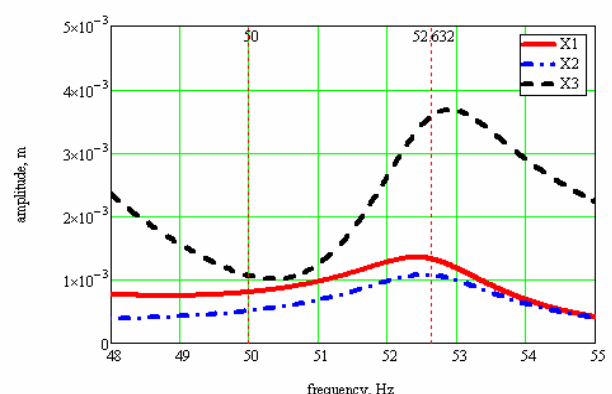
$$X(\omega 1) := \text{Find}(X1, X2, X3, l)$$

$$\overrightarrow{|X(314)|} = \begin{pmatrix} 7.897 \times 10^{-4} \\ 4.971 \times 10^{-4} \\ 1.063 \times 10^{-3} \\ 4.603 \end{pmatrix}$$

Рис. 2. Алгоритм розв'язку системи нелінійних рівнянь за допомогою програми MathCAD

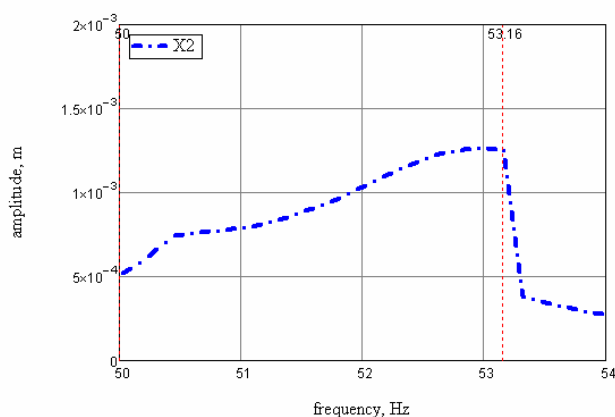
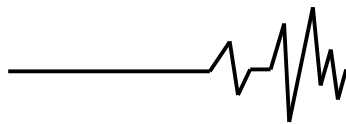


а

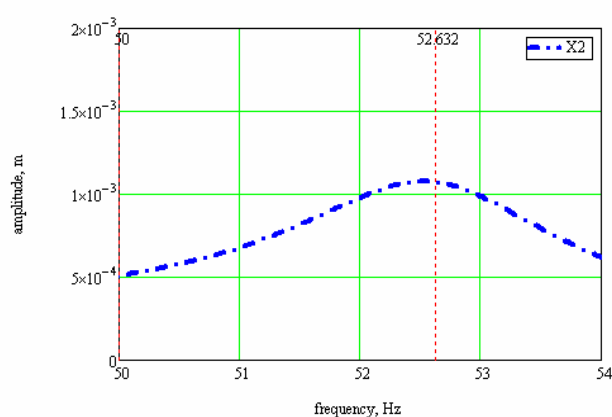


б

Рис. 3. АЧХ коливальних мас вібраційного стола за нелінійною (а) та лінійною (б) моделлю

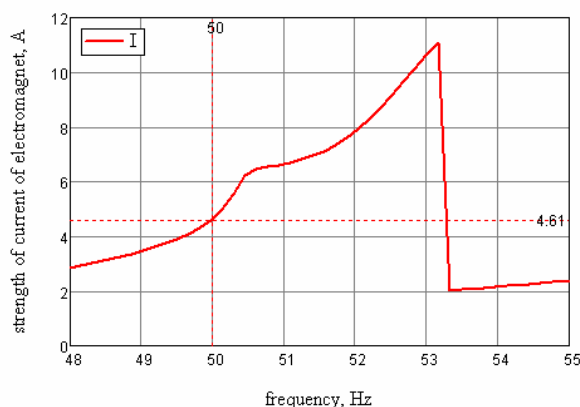


а

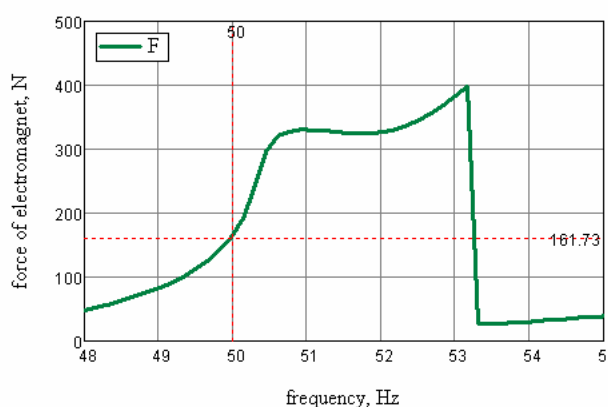


б

Рис. 4. Ширина резонансної зони робочого органа за нелінійною (а) та лінійною (б) моделлю



а



б

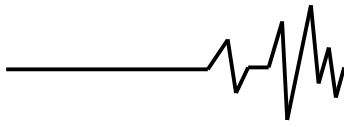
Рис. 5. Частотна залежність сили струму(а) та тягового зусилля ЕМВ (б)

Критерієм динамічної рівноцінності порівнювальних нелінійної електромеханічної та лінійної механічної систем є рівність кількостей руху, що визначається як

$$L = \omega \cdot \sum_{i=1}^3 (m_i \cdot X_i) = 20,77 \text{ кг} \cdot (\text{м} / \text{с}).$$

Однак, врахування нелінійного, відносно переміщення коливальних мас та сили струму, зусилля збурення ЕМВ (1), дозволяє встановити такі характерні особливості АЧХ мас: 1) їх нелінійність, яка проявляється затягуванням резонансної зони (за аналогією до систем із м'якою пружною характеристикою нелінійності) та відповідно більшим (на 0,528 Гц) значенням другої власної частоти коливальних мас, порівняно із лінійною моделлю; 2) дещо вищі амплітуди резонансних коливальних мас в нелінійній моделі (рис. 3 а). Такий характер нелінійності має позитивне значення в практичному сенсі, оскільки підвищується

стійкість механічної системи до зміни маси завантаження, оскільки система має більший запас резонансної зони. Однак, відомо, що в нелінійній моделі зрив амплітуд коливальних мас у зарезонансний режим є більш істотним (рис. 4), ніж у лінійній. Характерною особливістю досліджуваної моделі є можливість отримання частотних характеристик роботи приводу. На рис. 5 а наведена частотна залежність сили струму, резонансний пік якого співпадає з резонансною частотою механічної складової системи. За формулою (1) розраховано номінальне значення зусилля збурення ЕМВ, яке складає  $F = 161,73 \text{ Н}$ . Відмітимо, що амплітудне значення лінійного гармонійного зусилля збурення для досягнення рівнозначних динамічних характеристик коливальних мас в лінійній моделі становить  $F = 190,6 \text{ Н}$ . Дані та порівняння інших характеристик показано в табл. 1.



За результатами моделювання АФЧХ нелінійної системи відображено часові залежності усталених гармонійних коливань механічних та силових параметрів (рис. 6).

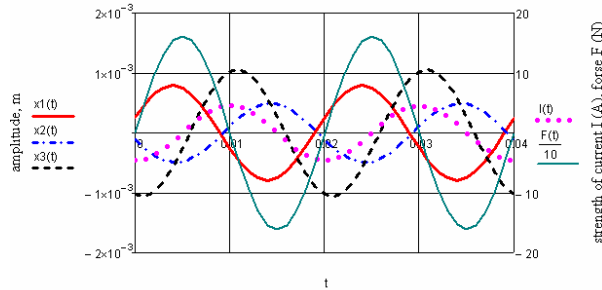


Рис. 6. Часові залежності усталених коливань електромеханічної системи за даними АФЧХ

Таблиця 1

Порівняльна характеристика моделей

Параметри електромеханічної системи	Тип моделі	
	нелінійна	лінійна
кількість руху $L$ , кг/(м/с)	20,77	20,77
зусилля збурення $F$ , Н	161,73	190,6
напруга живлення $U_0$ , В	120	-
сила струму в обмотці $I$ , А	4,61	-
значення другої власної частоти коливань, Гц	53,16	52,632
ширина резонансної зони $\Delta f = f_{02} - f$ , Гц	3,16	2,632
відносний кут зсуву фаз коливань $\Delta\varphi$ , град:		
а) між $m_1$ та $m_2$	185,932	185,922
б) між $m_2$ та $m_3$	-62,541	-63,582
в) між $m_1$ та $m_3$	123,39	122,34
початкова фаза коливань $\varphi_0$ , град:		
а) зусилля збурення	0	0
б) сили струму	-90,043	-

Розв'язування систем нелінійних рівнянь в класичному підході здійснюється ітераційними методами [9], наприклад за методом Ньютона, що дозволяє досягнути задану точність розрахунку та перевірити збіжність розв'язків за прийнятими наближень, обґрунтувати вибір прийнятних наближень, оскільки від цього суттєво залежить вид АЧХ. Перевіримо точність та збіжність отриманих розв'язків. Для цього представимо досліджувану систему нелінійних рівнянь (рис. 2) у векторній формі:

$$f(X) = \begin{bmatrix} m_1(-\omega^2 X_1) + c_{12}(1+i\gamma)(X_1 - X_2) \\ m_2(-\omega^2 X_2) - c_{12}(1+i\gamma)(X_1 - X_2) + c_{23}(1+i\gamma)(X_2 - X_3) + c_{i3}(1+i\gamma)X_2 - \frac{k}{e^{i\omega t}} \cdot \left(\frac{X_4}{2\delta(t)}\right)^2 \\ m_3(-\omega^2 X_3) - c_{23}(1+i\gamma)(X_2 - X_3) + \frac{k}{e^{i\omega t}} \cdot \left(\frac{X_4}{2\delta(t)}\right)^2 \\ X_4 \left( \frac{k\delta\omega}{2\delta(t)^2} + r \right) - U_0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

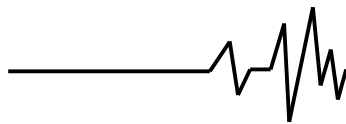
де прийняті такі позначення:  $k = \mu_0 S w^2$ ;  $i = \sqrt{-1}$ ;  $\delta(t) = \delta - (X_2 - X_3)e^{i\omega t}$ ;  $X = [X_1, X_2, X_3, X_4]^T \equiv [X1, X2, X3, I]^T$ .

Інтерполяційна формула методу Ньютона для  $K$ -ої ітерації має вигляд [9]:  $X^{(K+1)} = X^{(K)} - J(X^{(K)})^{-1} \cdot f(X^{(K)})$ , де  $J(X^{(K)})$  — матриця Якобі вектору (4). Розв'язок системи рівнянь (4)  $f(X) = 0$  має задовольняти заданій точності  $\varepsilon = |X^{(K+1)} - X^{(K)}| = 0,00001$ , яку досягнуто на 5-ій ітерації (табл. 2).

Таблиця 2  
Розв'язки системи нелінійних рівнянь (4) за методом Ньютона

$K$	$X^{(K+1)}$	$\varepsilon$
0	$[2.914 \cdot 10^{-4}; 1.834 \cdot 10^{-4}; 3.922 \cdot 10^{-4}; 3.84]^T$	3.613
1	$[7.436 \cdot 10^{-4}; 4.68 \cdot 10^{-4}; 1.001 \cdot 10^{-3}; 4.712]^T$	1.329
2	$[8.129 \cdot 10^{-4}; 5.116 \cdot 10^{-4}; 1.094 \cdot 10^{-3}; 4.664]^T$	0.629
3	$[7.896 \cdot 10^{-4}; 4.97 \cdot 10^{-4}; 1.063 \cdot 10^{-3}; 4.603]^T$	0.08
4	$[7.897 \cdot 10^{-4}; 4.971 \cdot 10^{-4}; 1.063 \cdot 10^{-3}; 4.603]^T$	0.001
5	$[7.897 \cdot 10^{-4}; 4.971 \cdot 10^{-4}; 1.063 \cdot 10^{-3}; 4.603]^T$	0

Алгоритм даного методу для попередньо прийнятого вектору наближених значень амплітуд параметрів електромеханічної системи  $X_0$  є реалізований в програмі MathCAD (рис. 7). Результатом розрахунку є вектор



```

J(X) := Jacob(f(X), X)      ε := 0.00001      iter(X) := v ← (X) - (J(X))-1 · f(X)
                                     v
norma(X, X1) := a ← √(|X1 - |X11||2 + (|X2 - |X12||2 + (|X3 - |X13||2 + (|X4 - |X14||2
                                     a
Newton(X, eps) := for K ∈ 0..1000      X0 := (0.001 0.001 0.001 1)T      X := Newton(X0, ε)
                                     Z ← iter(X)
                                     b ← norma(X, Z)
                                     X ← Z if b > ε
                                     break if b < ε
                                     Z
                                     |X| = ( 7.897 × 10-4
                                             4.971 × 10-4
                                             1.063 × 10-3
                                             4.603 )
    
```

Рис. 7. Програма методу Ньютона в MathCAD

амплітуд невідомих, який виведено для частоти збурення. Отриманий результат аналогічний тому, що за рис. 2. Збіжність розв'язків підтверджується результатом згідно виразу:

$$q = \frac{|J(X)^{-1}|^2 \cdot |J(X)| \cdot |f(X)|}{2} = 0 < 1. \quad (5)$$

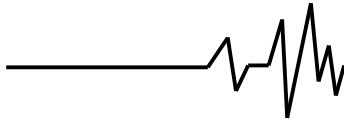
**6. Висновок.** Проведений порівняльний аналіз нелінійної та лінійної моделей вібраційних машин з електромагнітним приводом дозволяє стверджувати про позитивний вплив нелінійності зусилля електромагнітного приводу на динаміку механічної коливальної системи. Він визначається на практиці підвищеною технологічною стійкістю вібраційних машин, порівняно із розрахунковою лінійною моделлю, а також дає змогу отримати реальні силові характеристики роботи приводу.

Дані дослідження показують збіжність лінійних та нелінійних моделей за амплітудним значенням зусилля збурення в межах 15%, тим самим обґрунтовується можливість використання ідеалізованого джерела збурення в розрахунку лінійних тримасових вібраційних машин [6], хоча про неприпустимість такого підходу говориться у роботі [3]. На основі методу Ньютона проведено розрахунок амплітудних значень параметрів електромеханічної системи за заданою точністю. Обґрунтовано вибрані наближення в розрахунку нелінійної системи на основі числових методів (Левенберга та Ньютона) встановленням збіжності нелінійних розв'язків. В подальшому варто розглянути такі задачі: 1) проведення теоретичних досліджень та

моделювання системи диференціальних рівнянь нелінійної електромеханічної системи в часовій області; 2) підтвердження достовірності одержаних результатів на основі експериментальних досліджень АФЧХ реальних конструкцій вібростолів з електромагнітним приводом.

### 7. Список літератури.

1. Скубов Д. Ю., Ходжаев К. Ш. Нелинейная электромеханика. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 360 с.
2. Божко А.Е., Белых В.И., Мякохлеб К.Б. Математические модели и структурные схемы электромагнитных вибровозбудителей // Проблемы машиностроения. – 2005. – Т. 8. – № 4. – С. 35-40.
3. Крюков Б. И. Динамика вибрационных машин резонансного типа. – К.: Наукова думка, 1967. – 210 с.
4. Божко А. Е. О сингуларисной формуле тягового усилия двухтактного электромагнитного вибровозбудителя // Доп. НАН України. – 2009. – № 9. – С. 92–96.
5. Низкочастотные электровибрационные машины / М. В. Хвингия, М. М. Тедошвили, И. А. Питимашвили и др.; под ред. К. М. Рагульскиса. – Л.: Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1989. – 95 с.: ил.
6. Ланець О. С. Високоєфективні міжрезонансні вібраційні машини з електромагнітним приводом (Теоретичні основи та практика створення): Монографія. – Львів: Видавництво Національного університету "Львівська політехніка", 2008. – 324 с.
7. Гурський В.М., Ланець О.С., Гаврильченко О.В., Шпак Я.В. Обґрунтування



переваг електромеханічної системи вібраційної синфазної машини з електромагнітним приводом на основі аналізу амплітудно-частотних характеристик // Вісник Національного університету "Львівська політехніка" "Оптимізація виробничих процесів і технічний контроль у машинобудуванні". – Львів, 2008. – № 613. – С. 100-106.

8. Гаврильченко О.В., Гурський В.М., Ланець О.С., Шпак Я.В. Дослідження динаміки

нелінійної електромеханічної коливальної системи вібраційної синфазної машини з електромагнітним приводом // Ж.: Вібрації в техніці та технологіях. – 2008. – № 3 (52). – С. 5-10.

9. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы: Учеб. пособие. - М.: Наука, 1987 – 600 с.