



Зав'ялов В. Л.

Бодров В. С.

Мисюра Т. Г.

Попова Н. В.

Запорожець Ю. В.

*Національний  
університет  
харчових  
технологій*

УДК 664.061.4:084

## МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС ПРОЦЕСУ ПРОТИТЕЧІЙНОГО ТРАНСПОРТУВАННЯ ТВЕРДОЇ ФАЗИ ПРИ НЕПЕРЕРВНОМУ ВІБРОЕКСТРАГУВАННІ

*Проанализировано влияние гидродинамических параметров транспортирующей системы виброэкстрактора непрерывного действия, изложена методика разработки математического описания процесса противоточной транспортировки твердой фазы в рабочем объеме аппарата и, как результат, приведена разработанная математическая модель объемной производительности по твердой фазе одиночного транспортирующего устройства аппарата.*

*Influence of hydrodynamic parameters of the transporting system of vibroextractor of continuous action is analysed, methodology of development of mathematical description of process of the meeting transporting of hard phase is expounded in the swept volume of vehicle and, as a result, the worked out mathematical model over of the by volume productivity is brought after the hard phase of single transporting devices vehicle.*

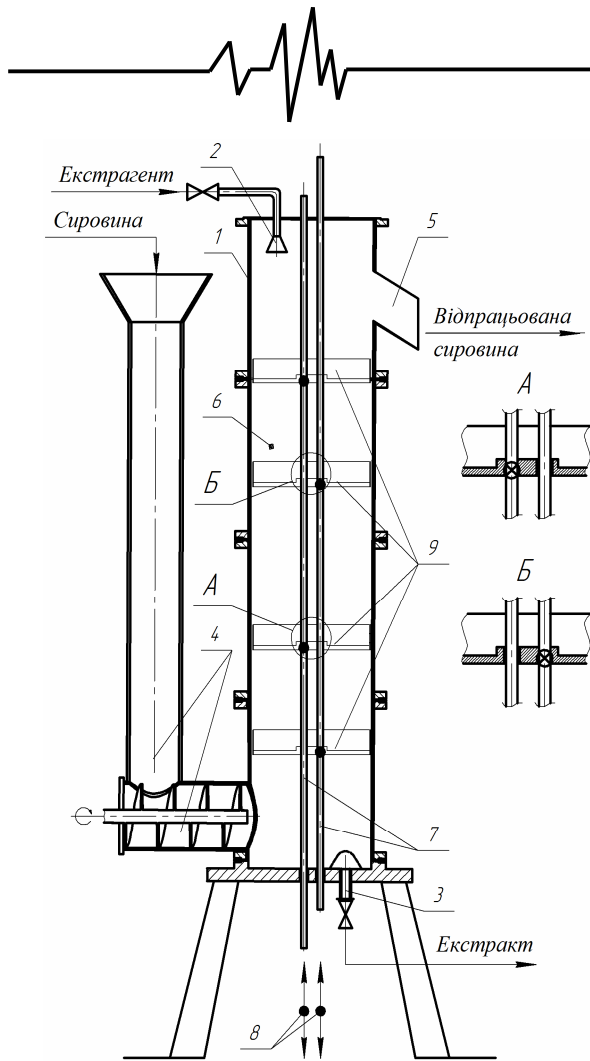
Теорія процесу неперервного віброекстрагування із рослинної сировини на сьогодні не забезпечує розв'язання багатьох практичних задач, пов'язаних з проектуванням екстракторів та оптимізацією процесу.

У зв'язку з цим, одним з найважливіших питань є математичний опис протитечійного розділення фаз в проточному середовищі, який найбільш точно віддзеркалює достань складну фізичну природу взаємозв'язків між основними параметрами процесу.

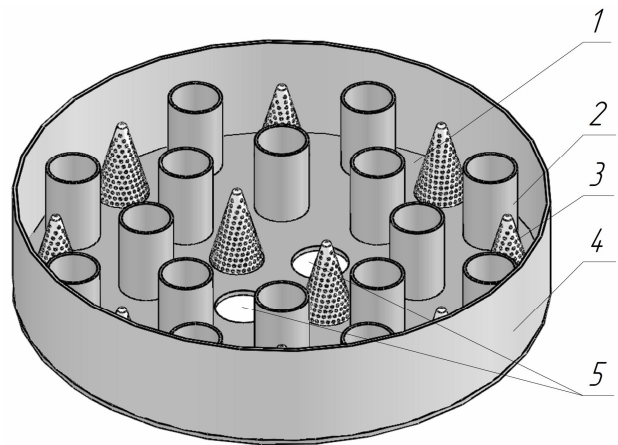
Складність такої задачі обумовлюється не тільки специфікою структури гідродинамічних потоків, що створюються віброперемішувальними і, одночасно, вібротранспортувальними робочими органами, а й одночасним здійсненням основного процесу масообміну – на різних його рівнях – молекулярною, конвективною і турбулентною дифузійми.

Протитечійне розділення фаз при неперервному віброекстрагуванні досліджувалось на моделі віброекстрактора за схемою з'єднань його елементів, наведеною на рис.1. При цьому, подрібнена сировина через завантажувальний пристрій подається під нижню тарілку 9 віброекстрактора і, після послідовного протитечійного з екстрагентом розділення на тарілках, відводиться через лоток 5 (рис.1, 2).

Як відзначалось нами раніше [1], протитечійне транспортування забезпечується за рахунок різниці гідравлічних опорів в перетинах потоків неоднорідної системи – суміші твердої та рідкої фаз, що мають місце в транспортувальних елементах 2, (рис.2), та седиментаційного ефекту на фільтрувальній поверхні елементів 3 [1, 2, 3].



**Рис. 1.** Загальний вид вібраційного екстрактора: 1 – корпус; 2 – пристрій введення рідкої фази; 3 – пристрій виведення рідкої фази; 4 – пристрій введення твердої фази; 5 – пристрій виведення твердої фази; 6 – робочий об’єм апарата; 7 – штоки; 8 – вібропривід; 9 – транспортувально-сепарувальна тарілка

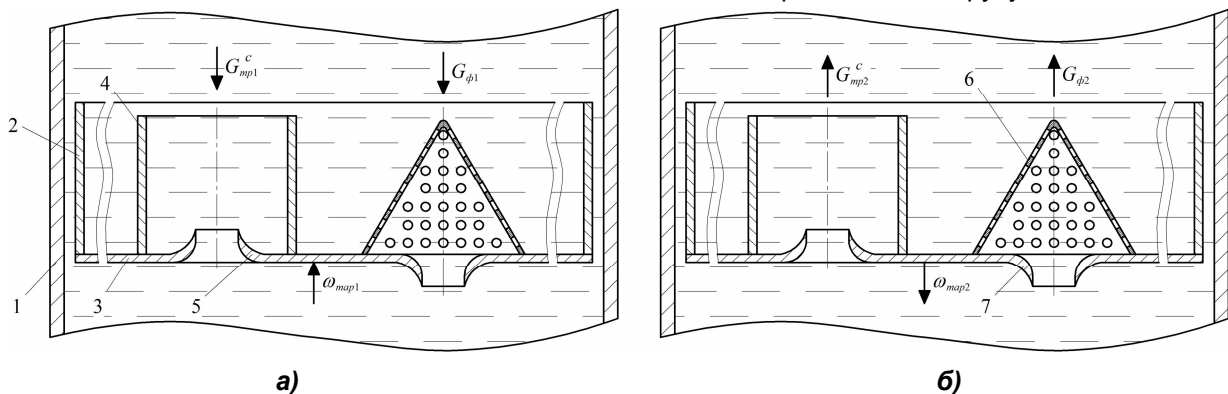


**Рис. 2.** Загальний вид тарілки з жорсткими транспортувальними та фільтрувальними елементами: 1 – основа тарілки; 2 – транспортувальний елемент; 3 – фільтрувальний елемент; 4 – борт; 5 – отвори для штоків

Під час роботи апарата маса твердої фази  $G_{тв}$ , що накопичується (затримується) над тарілкою за одне її повне коливання може бути розрахована з рівняння матеріального балансу (рис.3):

$$G_{тв} = (G_{тп2}^c + G_{ф2}) - (G_{тп1}^c + G_{ф1}), \quad (1)$$

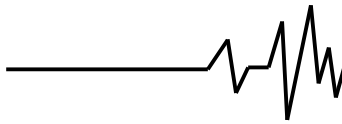
де  $G_{тп1}^c$ ,  $G_{ф1}$  – відповідно, маса двофазового середовища та маса рідкої фази, що пройшла крізь транспортувальний та фільтрувальний елементи тарілки під час її руху вгору;  $G_{тп2}^c$ ,  $G_{ф2}$  – відповідно, маса двофазового середовища та маса рідкої фази, що пройшла крізь транспортувальний та фільтрувальний елемент тарілки під час її руху вниз.



**Рис. 3.** Схема руху масових потоків твердої та рідкої фаз в локальних робочих областях тарілки:

а) при русі тарілки вгору; б) при русі тарілки вниз.

1 – корпус апарата; 2 – борт тарілки; 3 – тарілка; 4 – патрубок; 5 – транспортувальний елемент; 6 – фільтрувальна поверхня; 7 – фільтрувальний елемент



Подавши (1) через відповідні об'єми, отримаємо

$$V_{me} = \frac{(\rho_{c2} \cdot V_{mp2}^c + \rho_{\phi} \cdot V_{\phi2}) - (\rho_{c1} \cdot V_{mp1}^c + \rho_{\phi} \cdot V_{\phi1})}{\rho_{c1}}, \quad (2)$$

де  $V_{me}$  – об'єм твердої фази, що затримався над тарілкою за одне повне її коливання;  $V_{mp1}^c$ ,  $V_{mp2}^c$ ,  $V_{\phi1}$ ,  $V_{\phi2}$  – відповідно, об'єми двофазового середовища та рідкої фази, що пройшли крізь транспортувальний та фільтрувальний елементи під час руху тарілки ввєрх (індекс 1) та вниз (індекс 2);  $\rho_{c1}$ ,  $\rho_{c2}$  – відповідно, густина двофазового середовища в надтарілчастому та підтарілчастому робочих об'ємах;  $\rho_{\phi}$  – густина рідкої фази.

Об'ємні складові процесу можуть бути розраховані як:

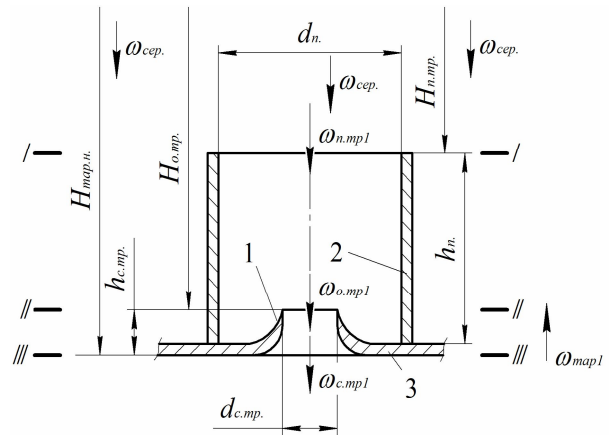
$$V_{mp1}^c = \omega_{mp1} \cdot F_{mp} \cdot T; \quad V_{mp2}^c = \omega_{mp2} \cdot F_{mp} \cdot T; \quad (3)$$

$$V_{\phi1} = \omega_{\phi1} \cdot F_{\phi} \cdot T; \quad V_{\phi2} = \omega_{\phi2} \cdot F_{\phi} \cdot T, \quad (4)$$

де  $\omega_{mp1}$ ,  $\omega_{mp2}$  – швидкість руху двофазового середовища в транспортувальному елементі під час руху тарілки, відповідно, ввєрх та вниз;  $F_{mp}$  – площа живого перерізу транспортувального елемєнту ( $F_{mp} = F_{o.mp}$ );  $F_{o.mp}$  – площа живого перерізу сопла транспортувального елемєнту;  $T = \frac{1}{n}$  – період коливань тарілки;  $n$  – частота коливань тарілки;  $\omega_{\phi1}$ ,  $\omega_{\phi2}$  – швидкість фільтрування на фільтрувальному елементі під час руху тарілки, відповідно, ввєрх та вниз;  $F_{\phi}$  – площа живого перерізу фільтрувального елемєнту.

Для знаходження швидкостей  $\omega_{mp1}$ ,  $\omega_{mp2}$ ,  $\omega_{\phi1}$  та  $\omega_{\phi2}$  скористаємось рівняннями балансів енергії реальних потоків (за Бернуллі) для транспортувального та фільтрувального елемєнтів тарілки та для двох періодів коливань тарілки: перший період руху тарілки ввєрх; другий період руху тарілки вниз.

На рис.4 зображено напрями швидкостей потоків в транспортувальному елементі тарілки під час її руху ввєрх.



**Рис. 4. Схема геометрії та напрямів швидкостей потоків, які виникають у транспортувальному елементі тарілки під час її руху ввєрх: 1 – сопло; 2 – патрубок; 3 – основа тарілки**

Склавши рівняння Бернуллі для перерізів I–I і II–II та III–III і розв'язавши його відносно швидкості переміщення двофазового середовища через транспортувальний елемент, отримуємо:

$$\omega_{c.mp1} = \sqrt{\frac{(\omega_{map1} + \omega_{sep})^2 - 2g(h_n + \delta_{map} + \zeta_{n1} h_{c.mp})}{(1 + \zeta_{c.mp1})(1 + \zeta_{n1})}}, \quad (5)$$

де  $\zeta_{c.mp1}$  – коефіцієнт місцевого гідравлічного опору сопла транспортувального елемєнту;  $\zeta_{n1}$  – коефіцієнт місцевого гідравлічного опору на вході в патрубок;  $h_n$  – висота патрубку;  $\delta_{map}$  – товщини основи тарілки;  $h_{c.mp}$  – висота сопла транспортувального елемєнту;  $\omega_{sep}$  – середня швидкість руху двофазового середовища;  $\omega_{map1,2}$  – швидкість руху тарілки ( $\omega_{map1} = \omega_{map2}$ ).

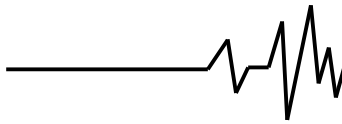
Швидкість руху тарілки з її жорсткими транспортувальними та фільтрувальними елемєнтами  $\omega_{map1,2}$  є функцією заданих амплітуди  $A$  та частоти  $n$  її коливань [1]:

$$\omega_{map1,2} = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{\pi}{4}} v_1 dt = 4An \quad (6)$$

де  $v_1$  – миттєва швидкість тарілки в заданий момент часу  $t$ .

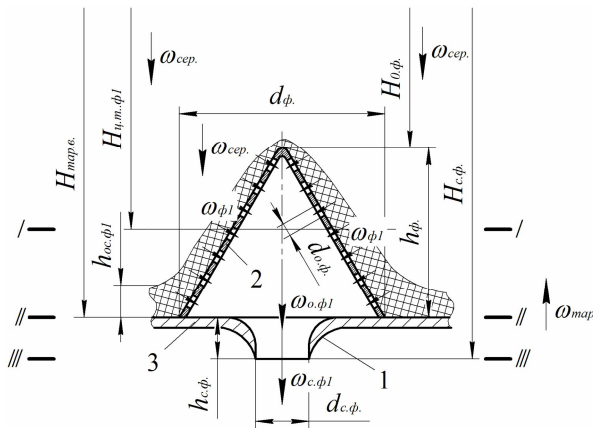
З рівняння нерозривності потоку двофазового середовища його середня швидкість:

$$\omega_{sep} = \frac{Q_{sep}}{F_{ж.}}, \quad (7)$$



де  $Q_{сеп.}$  – об'ємні витрати двофазового середовища;  $F_{ж.}$  – площа живого перерізу апарата.

Розглянемо гідродинаміку процесу розділення двофазового потоку на фільтрувальному елементі (рис.5).



**Рис. 5. Схема геометрії та напрямів потоків, які виникають у фільтрувальному елементі тарілки під час її руху вгору: 1 – сопло; 2 – фільтрувальний елемент; 3 – основа тарілки**

Для розрахунку швидкості процесу розділення фаз на фільтрувальному елементі під час руху тарілки вгору, скориставшись методикою з теорії фільтрування Знаменського Г.М., та склавши рівняння Бернуллі для перерізів II – II і III – III, отримаємо рівняння швидкості руху рідкої фази в перерізі отвору сопла фільтрувального елемента:

$$\omega_{с.ф1} = \sqrt{\frac{1}{(1 + \zeta_{с.ф1})} (\omega_{о.ф1}^2 + 2gh_{с.ф.})}, \quad (8)$$

де  $\zeta_{с.ф1}$  – коефіцієнт місцевого гідравлічного опору сопла фільтрувального елемента;  $h_{с.ф.}$  – висота сопла фільтрувального елемента.

Примітка: перерізи I – I, II – II і III – III відповідають, відповідно, висотам занурення від вільної поверхні двофазового середовища в апараті центра тиску фільтрувальної перегородки, звуженні на вході в сопло та виході з сопла фільтрувального елемента.

Швидкість руху рідкої фази в перерізі III – III отвору сопла (на вході в сопло) фільтрувального елемента:

$$\omega_{о.ф1} = \frac{\omega_{ф1} \cdot m_{фе.} \cdot d_e^2}{d_{о.ф.}^2}, \quad (9)$$

де  $m_{фе.}$  – кількість перфорацій фільтрувальної перегородки;  $d_e$  – еквівалентний діаметр перфорацій фільтрувальної перегородки;  $d_{о.ф.}$  – діаметр отвору на вході в сопло фільтрувального елемента.

Швидкість фільтрування  $\omega_{ф1}$  можна визначити за рівнянням Знаменського Г.М. для процесу з утворенням стисливого осаду, виконавши певні перетворення:

$$\rho_{ф.}^2 \omega_{ф1}^4 + 2R\rho_{ф.} \omega_{ф1}^3 + 4\omega_{ф1}^2 \rho_{ф.} \left( A_1 + \frac{G}{2} - B_1 \right) + 4R\omega_{ф1} (G - B_1) - 4B_1 (G - B_1) = 0, \quad (10)$$

де 
$$A_1 = \frac{G\sigma_0\mu_{ф.}\chi_1k_1}{2n\rho_{ф.}} \quad (11)$$

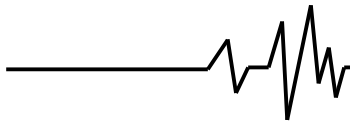
та 
$$B_1 = gH_{у.м.ф1}(\rho_{с1} - \rho_{ф.}) + \frac{\rho_{с1}(\omega_{мар1} - \omega_{сеп.})^2}{2}. \quad (12)$$

В рівняннях (10) – (12) позначено:

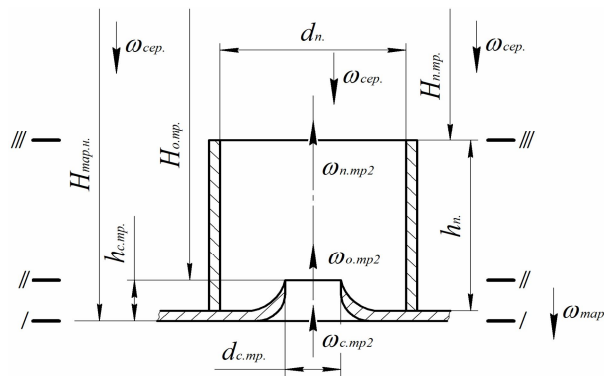
$\rho_{ф.}$  – густина рідкої фази;  $\mu_{ф.}$  – коефіцієнт динамічної в'язкості рідкої фази;  $\sigma_0$  – структурний опір осаду товщиною  $h_{ос.ф1}$ ;  $h_{ос.ф1}$  – питома товщина шару осаду, отриманого при тиску 1 м стовпа двофазового середовища;  $\chi_1$  – об'ємна частка твердої фази в надтарілчастому об'ємі двофазового середовища;  $k_1$  – коефіцієнт тертя маси осаду на похилій зовнішній поверхні фільтрувальної перегородки;  $R$  – гідравлічний опір фільтрувальної перегородки;  $G$  – модуль стиснення осаду;  $\rho_{с1}$  – густина двофазового середовища в надтарілчастому об'ємі.

Глибина занурення центру тиску фільтрувальної перегородки в надтарілчастому об'ємі:

$$H_{у.м.ф1} = \left\{ H_{о.ф.} + \frac{2}{3}h_{ф.} + \frac{3d_{ф.}^2\delta}{40} \right\} \times \left[ \frac{\left[ \frac{d_{ф.}^2 \cos \alpha (4 - 5 \cos^2 \alpha) - 4(d_{ф.}^2 - \delta^2)}{3 \cos^3 \alpha \sin \alpha} \right]}{\left( H_{о.ф.} + \frac{2}{3}h_{ф.} \right)^2 \left( \frac{d_{ф.}^2}{\cos \alpha} - m_{фе.}d_e^2 \right)} \right] \times \left[ \frac{m_{фе.}d_e^2}{\left( H_{о.ф.} + \frac{2}{3}h_{ф.} \right)^2 \left( \frac{d_{ф.}^2}{\cos \alpha} - m_{фе.}d_e^2 \right)} \right], \quad (13)$$



де  $H_{o.ф.}$  – глибина занурення вершини фільтрувальної перегородки (конуса) від вільної поверхні стовпа суспензії в робочому об'ємі апарата;  $h_{ф.}$  – висота фільтрувальної перегородки (конуса);  $d_{ф.}$  – діаметр основи фільтрувальної перегородки;  $\delta$  – товщина стінки фільтрувальної перегородки;  $\alpha$  – кут нахилу твірної поверхні (конуса) фільтрувальної перегородки.



**Рис. 6. Схема геометрії та напрями швидкостей потоків, які виникають у транспортувальному елементі тарілки під час її руху вниз**

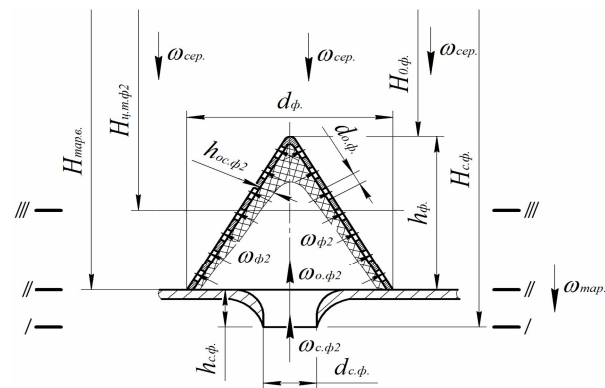
Для розрахунку швидкості процесу розділення фаз на транспортувальному елементі під час руху тарілки вниз (рис.6) складаємо рівняння Бернуллі для перерізів I– I і II– II та II– II і III– III та подаємо їх відносно швидкості переміщення двофазового середовища через транспортувальний елемент:

$$\omega_{n.мп2} = \sqrt{\frac{(\omega_{тар2} - \omega_{сеп.})^2}{(1 + \zeta_{с.мп2})(1 + \zeta_{n2})} + 2g \times \frac{h_n + \delta_{тар.} + \zeta_{с.мп2}(h_n + \delta_{тар.} - h_{с.мп.})}{(1 + \zeta_{с.мп2})(1 + \zeta_{n2})}}, \quad (14)$$

де  $\omega_{тар2}$  – швидкість переміщення тарілки вниз;  $\zeta_{с.мп2}$  – коефіцієнт місцевого гідравлічного опору сопла транспортувального елемента;  $h_{с.мп.}$  – висота сопла транспортувального елемента;  $\zeta_{n2}$  – коефіцієнт місцевого гідравлічного опору на виході з патрубку.

Під час аналізу гідродинамічних та гідромеханічних ефектів, що мають місце в фільтрувальному елементі при русі тарілки вниз, слід зазначити, що, по-перше, в сопло фільтрувального елемента надходить потік

двофазового середовища із відповідним співвідношенням масових (об'ємних) витрат кожної з фаз і, по-друге, за причиною додаткової різниці напорів середовищ до та після фільтрувальної перегородки цього елемента, відбувається локальне (місцеве) розділення фаз – процес фільтрування: тверда фаза затримується на внутрішній поверхні фільтрувального елемента, утворюючи шар осаду з відповідними характеристиками, а рідка фаза проходить (фільтрується) через утворений осад та, далі, через фільтрувальну поверхню елемента – в надтарілчастий робочий простір.



**Рис. 7. Схема геометрії та напрями потоків, що виникають у фільтрувальному елементі тарілки під час її руху вниз**

Швидкість фільтрування  $\omega_{ф2}$  при русі тарілки вниз визначаємо за методикою, наведеною до рівнянь (10) – (12):

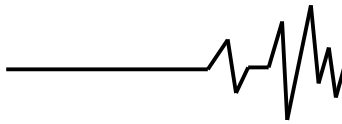
$$\rho_{ф.}^2 \omega_{ф2}^4 + 2R\rho_{ф.} \omega_{ф2}^3 + 4\omega_{ф2}^2 \rho_{ф.} \left( A_2 + \frac{G}{2} - B_2 \right) + 4R\omega_{ф2} (G - B_2) - 4B_2 (G - B_2) = 0, \quad (15)$$

$$\text{де} \quad A_2 = \frac{G\sigma_0 \mu_{ф.} \chi_2 k_2}{2n} \quad (16)$$

$$\text{та} \quad B_2 = gH_{н.ф.} (\rho_{с2} - \rho_{ф.}) + \frac{\rho_{с2} \omega_{с.ф2}^2}{2}. \quad (17)$$

В рівняннях (15) – (17) позначено:  $\chi_2$  – об'ємна частка твердої фази в підтарілчастому об'ємі двофазового середовища;  $k_2$  – коефіцієнт тертя маси осаду на похилій внутрішній поверхні фільтрувальної перегородки;  $\rho_{с2}$  – густина двофазового середовища в підтарілчастому об'ємі.

Глибина занурення центру тиску фільтрувальної перегородки:



$$H_{у.м.ф2} = \left\{ H_{о.ф.} + \frac{2}{3} h_{ф.} + \frac{3d_{ф.}^2 \delta}{40} \right\} \times \left[ \frac{d_{ф.}^2 \cos \alpha (4 - 5 \cos^2 \alpha) - 4(d_{ф.}^2 - \delta^2)}{3 \cos^3 \alpha \sin \alpha} \right] - \left[ \frac{\left( H_{о.ф.} + \frac{2}{3} h_{ф.} \right)^2 \left( \frac{d_{ф.}^2}{\cos \alpha} - m_{фe.} d_{e.}^2 \right)}{m_{фe.} d_{e.}^2} \right] \left[ \frac{d_{ф.}^2}{\cos \alpha} - m_{фe.} d_{e.}^2 \right] \quad (18)$$

Швидкість руху в перерізі сопла фільтрувального елемента:

$$\omega_{о.ф2} = \sqrt{\frac{(\omega_{мп2} - \omega_{сеп.})^2 + 2gh_{с.ф.}}{1 + \zeta_{с.ф2}}}, \quad (19)$$

де  $\zeta_{с.ф2}$  – коефіцієнт місцевого гідравлічного опору сопла фільтрувального елемента;  $h_{с.ф.}$  – висота сопла фільтрувального елемента.

Якщо задатися певною конструктивною кількістю транспортувальних  $m_{мп}$  та фільтрувальних  $m_{ф}$  елементів, що розміщені на одній тарілці, то, використовуючи рівняння (5), (8), (14), (15), можна визначити об'єми двофазового середовища та рідкої фази, що проходять через всю кількість відповідних транспортувальних та фільтрувальних елементів однієї тарілки:

$$V_{мп1}^c = m_{мп} \omega_{с.мп1} F_{мп.} T; \quad V_{мп2}^c = m_{мп} \omega_{мп2} F_{мп.} T \quad (20)$$

$$V_{ф1} = m_{ф} \omega_{ф1} F_{ф.} T; \quad V_{ф2} = m_{ф} \omega_{ф2} F_{ф.} T \quad (21)$$

Після підстановки рівнянь (20) – (21) в рівняння (2) отримаємо рівняння розрахунку об'єму твердої фази, що накопичується над тарілкою за одне повне її коливання:

$$V_{мс} = T \left[ \frac{m_{мп} F_{мп.} (\rho_{с2} \omega_{мп2} - \rho_{с1} \omega_{с.мп1})}{\rho_{с1}} + \frac{\rho_{ф} m_{ф} F_{ф.} (\omega_{ф2} - \omega_{ф1})}{\rho_{с1}} \right] \quad (22)$$

Враховуючи, що період коливань тарілки  $T$  обернено пропорційний частоті коливань  $n$ ,  $T = 1/n$ , за рівнянням (22) отримаємо рівняння розрахунку об'ємної продуктивності однієї тарілки за твердою фазою:

$$Q_{мс} = \left[ \frac{m_{мп} F_{мп.} (\rho_{с2} \omega_{мп2} - \rho_{с1} \omega_{с.мп1})}{\rho_{с1}} + \frac{\rho_{ф} m_{ф} F_{ф.} (\omega_{ф2} - \omega_{ф1})}{\rho_{с1}} \right] \quad (23)$$

**Висновки.** Отримані нові математичні описи гідродинаміки вібротранспортування твердої фази в робочих під- та надтарілчастих об'ємах апарата дозволяють визначити швидкості (питомі продуктивності) переміщення двофазового потоку в транспортувальних елементах та швидкості процесу сепарації твердої фази на фільтрувальних елементах поодиноких робочих тарілок з певними конструктивними характеристиками, як приклад, "з жорсткими патрубками", "пелюстковими" та "стулковими" [4]. Сумісне розв'язання отриманих рівнянь уможливорює розроблення математичної моделі продуктивності віброекстракторів за неперервним переміщенням твердої фази в робочому об'ємі апарата.

При попередньо визначеній тривалості процесу екстрагування з рослинної сировини з використанням наведеної залежності (23) можна визначити необхідну кількість контактних пристроїв (тарілок) з відповідними міжтарілчастими відстанями  $i$ , за таким, визначити оптимальну висоту робочого об'єму апарата.

### Література

1. Зав'ялов В.Л., Лобода П.П., Бодров В.С. Механізм та особливості процесу віброекстрагування рослинної сировини // Наук. праці НУХТ. – 2002. – № 12. – С. 74 – 77.
2. А. с. № 1214130 Вибрационный экстрактор / П.П. Лобода, В.Л. Завьялов. – Оpubл. Бюл. № 8 // Открытия. Изобретения, 1986.
3. Завьялов В.Л., Лобода П.П. Переработка боя и хвостиков сахарной свеклы в вибрационной установке. – В кн.: Разработка и совершенствование технологических процессов, машин и оборудования для производства, хранения и транспортировки продуктов питания, МТИПП, М., 1987. – С. 177 – 179.
4. Мисюра Т.Г. Віброекстрактори з гнучкими еластичними пластинками-пелюстками та стулками / Т.Г. Мисюра, В.Л. Зав'ялов, В.С. Бодров // Наукові праці Одеської національної академії харчових технологій: зб. наук. праць / Одеська нац. акад. харч. технологій. – Одеса, 2008. Вип. 32. – С. 131-133.