Тищенко Л. Н.

Слипченко М. В.

Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства им. П. Василенко

УДК 631.362.36; 621.928.9

К ПОСТРОЕНИЮ ВНУТРЕННИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ТАРЕЛЬЧАТОГО РАЗБРАСЫВАТЕЛЯ ВИБРОЦЕНТРОБЕЖНОГО СЕПАРАТОРА

Досліджено внутрішні поверхні тарілчастого розкидувача пневмосепаруючого пристрою вібровідцентрового сепаратора. Визначено коефіцієнти першої, другої і третьої квадратичних форм поверхонь, які необхідні для їх побудови, з урахуванням конкретного виду. Складено рівняння нерозривності потоку зернової суміші з урахуванням одержаних значень.

Inner surfaces of the poppet spreader of vibrocentrifugal separator air aspiration device are investigated. Required to build coefficients of the first, second and third quadratic form of a surfaces with given its particular species are defined. Grain mixture flow continuity equation with the results obtained are compiled.

Постановка проблемы. Для повышения эффективности очистки зерновых смесей (ЗС) виброцентробежными сепараторами ОАО "Вибросепаратор" (г. Житомир) разработано новое веерно-кольцевое конусно-каскадное пневмосепарирующее устройство (ПСУ) [1],. в котором процесс очистки осуществляется воздушным потоком (ВП). Очистка ЗС от легких примесей осуществляется как на воздухопроницаемой конусно-каскадной поверхности [2,3], так и при сходе с тарельчатого разбрасывателя. Исследование геометрии внутренних поверхностей тарельчатого разбрасывателя необходимо для изучения динамики очистки ЗС от легких примесей.

Формулировка целей статьи. Определение коэффициентов первой, второй и третьей квадратичных форм внутренних поверхностей тарельчатого разбрасывателя. Составление уравнения неразрывности потока очищаемой зерновой смеси с учетом конкретных значений.

Основная часть. Движение ЗС происходит по внутренней поверхности S_2 (рис.1), описываемой зависимостью:

$$z = Z(r) = \begin{cases} \dfrac{-d_1^2 + 4h_1^2 + \sqrt{d_1^4 - 8d_1^2h_1^2 + 16h_1^4 + 64d_1rh_1^2 - 64r^2h_1^2}}{8h_1} \\ (0 \le r \le r_B) \\ k\left(\dfrac{D_1}{2} - r\right) \qquad (r_B \le r \le D_1/2). \end{cases} \quad (1)$$

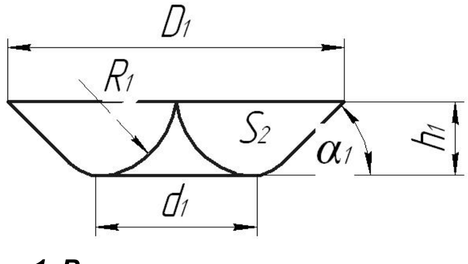

Рис. 1. Расчетная схема тарельчатого разбрасывателя

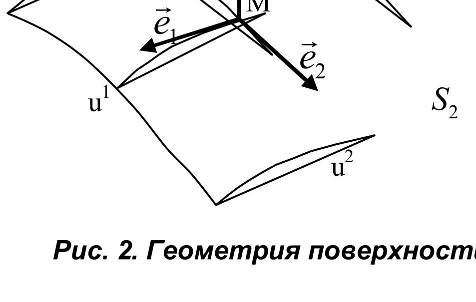

Рис. 2. Геометрия поверхности S_2

Помимо цилиндрической системы координат введем еще декартовы координаты (x, y, z) с осью Oz, совпадающей с соответствующей осью цилиндрической системы координат.

Тогда параметрическое задание поверхности S_2 (рис.2) можно осуществить посредством соотношений:

$$\begin{gathered}\vec{r} = \vec{R}_0(u^1, u^2) = \vec{R}_0(r, \varphi) = \\ = \left(u^1\cos(u^2), u^1\sin(u^2), Z(u^1)\right) = \\ = \left(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), Z(r)\right)\end{gathered} \qquad (2)$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки поверхности S_2; $Z(r)$ – определяется (1); $u^1 \equiv r,\ u^2 \equiv \varphi$. Для построения внутренней поверхности важно знать первую А, вторую В и третью С квадратичные формы поверхности S_2 [4,5]:

$$\begin{gathered}A = d\vec{R}_0 \cdot d\vec{R}_0 = \frac{\partial \vec{R}_0}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{R}_0}{\partial u^\beta} du^\alpha du^\beta = \\ = \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta du^\alpha du^\beta = a_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta;\end{gathered} \qquad (3)$$

$$\begin{gathered}B = -d\vec{R}_0 \cdot d\vec{n} = -\frac{\partial \vec{R}_0}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial u^\beta} du^\alpha du^\beta = \\ = -\vec{e}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial u^\beta} du^\alpha du^\beta = b_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta;\end{gathered} \qquad (4)$$

$$\begin{gathered}C = d\vec{n} \cdot d\vec{n} = \frac{\partial \vec{n}}{\partial u^\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial u^\beta} du^\alpha du^\beta = \\ = \frac{\partial \vec{n}}{\partial u^\beta} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial u^\beta} du^\alpha du^\beta = c_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta,\end{gathered} \qquad (5)$$

где $\vec{n}$ - вектор единичной нормали к поверхности S_2, $a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta}, c_{\alpha\beta}$- коэффициенты первой, второй и третьей квадратичных форм поверхности (по повторяющимся греческим индексам подразумевается суммирование от 1 до 2).

Найдем коэффициенты первой квадратичной формы А:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \qquad (6)$$

$$\begin{gathered}\vec{e}_1 = \frac{\partial \vec{R}_0}{\partial u^1} = \left(\cos\left(u^2\right), \sin\left(u^2\right), Z_1'\right) = \\ = \left(\cos(\varphi), \sin(\varphi), Z_1'\right);\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\vec{e}_2 = \frac{\partial \vec{R}_0}{\partial u^2} = \left(-u^1\sin\left(u^2\right), u^1\cos\left(u^2\right), Z_2'\right) = \\ = \left(-u^1\sin\left(u^2\right), u^1\cos\left(u^2\right), 0\right) = \\ = \left(-r\sin(\varphi), r\cos(\varphi), 0\right);\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}a_{11} = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = 1 + Z_1'^2, \\ a_{12} = a_{21} = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0, \\ a_{22} = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = \left(u^1\right)^2 = r^2;\end{gathered} \qquad (7)$$

$$\left(\begin{gathered} Z_\alpha' = \frac{\partial Z}{\partial u^\alpha},\ \alpha = 1,2; \\ Z_1' = Z' = \frac{\partial Z}{\partial r} = \frac{dZ}{dr},\ Z_2' = \frac{\partial Z}{\partial \varphi} = 0 \end{gathered}\right).$$

Координатные линии на S_2 представляют собой два семейства кривых $u^1 \equiv r = const$ – окружности и $u^2 \equiv \varphi = const$ – линии, лежащие в полуплоскостях $\varphi = const$. Матрица А – диагональная. Это означает – данная криволинейная система координат на поверхности S_2 является ортогональной, кривые разных семейств пересекаются под прямым углом.

Единичная нормаль $\vec{n}$ к S_2 определяется векторным произведением:

$$\begin{gathered}\vec{n} = \frac{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}{\left|\vec{e}_1 \times \vec{e}_2\right|} = \\ = \frac{1}{\left|\sqrt{1 + Z'^2}\right|}\left(-Z'\cos\left(u^2\right), -Z'\sin\left(u^2\right), 1\right) = \\ = \frac{1}{\left|\sqrt{1 + Z'^2}\right|}\left(-Z'\cos\left(u^2\right), -Z'\sin\left(u^2\right), 1\right) = \\ = \frac{1}{\left|\sqrt{1 + Z'^2}\right|}\left(-Z'\cos(\varphi), -Z'\sin(\varphi), 1\right).\end{gathered} \qquad (8)$$

Тогда матрицы второй и третьей квадратичных форм:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

согласно (3) и (4) будут иметь вид:

$$\begin{gathered}b_{11} = \frac{Z''}{\sqrt{1 + Z'^2}}, \\ b_{12} = b_{21} = 0, \\ b_{22} = \frac{u^1 Z'}{\sqrt{1 + Z'^2}} = \frac{r\,Z'}{\sqrt{1 + Z'^2}}.\end{gathered} \qquad (9)$$

$$c_{11} = \frac{Z''^2}{\left(1+Z'^2\right)^2},$$
$$c_{12} = c_{21} = 0,$$
$$c_{22} = \frac{Z'^2}{1+Z'^2}. \qquad (10)$$

Введем локальную криволинейную систему координат (x^1, x^2, x^3) (рис.3).

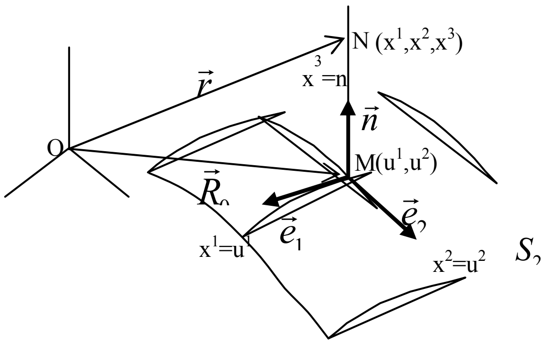

Рис. 3. Локальная система координат

Координаты пространственной т. N определяются следующим образом: из этой точки опускается перпендикуляр на поверхность S_2, основание M которого лежит на поверхности S_2 и имеет координаты $\left(u^1 = r, u^2 = \varphi\right)$. Через n обозначим расстояние, отсчитываемое от т. M к т. N. Тогда примем $x^1 = u^1 = r, \quad x^2 = u^2 = \varphi$.

Радиус-вектор $\vec{r}$ т. N можно записать в виде:

$$\vec{r} = \vec{R}_0(u^1, u^2) + n\vec{n}(u^1, u^2). \qquad (11)$$

Базисные вектора $\left(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3\right)$ этой системы координат определяются соотношениями [6]:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_1\left(u^1, u^2, n\right) = \frac{\partial \vec{r}\left(u^1, u^2, n\right)}{\partial u^1} = \frac{\partial \vec{R}_0\left(u^1, u^2\right)}{\partial u^1} + n\frac{\partial \vec{n}\left(u^1, u^2\right)}{\partial u^1};$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_2\left(u^1, u^2, n\right) = \frac{\partial \vec{r}\left(u^1, u^2, n\right)}{\partial u^2} = \frac{\partial \vec{R}_0\left(u^1, u^2\right)}{\partial u^2} + n\frac{\partial \vec{n}\left(u^1, u^2\right)}{\partial u^2};$$

$$\vec{E}_3 = \vec{E}_3\left(u^1, u^2, n\right) = \frac{\partial \vec{r}\left(u^1, u^2, n\right)}{\partial n} = \vec{n}\left(u^1, u^2\right). \qquad (12)$$

Для записи дифференциальных операций при использовании криволинейных координат требуется привлечение ковариантного дифференцирования [4-6]. Ковариантная производная использует понятие метрического тензора $\hat{g}$ – симметричного тензора второго ранга, определяемого матрицей $\left\|g_{ij}\right\|_{i,j=1}^{3}$, коэффициенты которой выражаются через базисные вектора $g_{i,j} = \vec{E}_i \cdot \vec{E}_j$. Согласно (12) компоненты указанного тензора имеют вид:

$$g_{11} = a_{11}\left(u^1, u^2\right) - 2n\, b_{11}\left(u^1, u^2\right) + n^2 c_{11}\left(u^1, u^2\right);$$
$$g_{12} = g_{21} = a_{12}\left(u^1, u^2\right) - 2n\, b_{12}\left(u^1, u^2\right) + n^2 c_{12}\left(u^1, u^2\right);$$
$$g_{13} = g_{31} = g_{23} = g_{32} = 0; \quad g_{33} = 1$$
$$g_{22} = a_{22}\left(u^1, u^2\right) - 2n\, b_{22}\left(u^1, u^2\right) + n^2 c_{22}\left(u^1, u^2\right). \qquad (13)$$

Дважды контравариантные компоненты g^{ij} этого метрического тензора представляются матрицей, коэффициенты которой совпадают с коэффициентами обратной матрицы:

$$\left\|g^{ij}\right\|_{i,j=1}^{3} = \begin{pmatrix} \dfrac{g_{22}}{\det g} & -\dfrac{g_{21}}{\det g} & 0 \\ -\dfrac{g_{12}}{\det g} & \dfrac{g_{11}}{\det g} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (14)$$

$$\left(\det g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right).$$

Как известно, любой вектор $\vec{\mathrm{v}}$ может быть разложен по любому базису, в частности по базисным векторам $\left(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3\right)$:

$$\vec{\mathrm{v}} = \mathrm{v}^i \, \vec{E}_i, \tag{15}$$

где v^i представляют собой контравариантные компоненты вектора (по повторяющимся латинским индексам суммирование от 1 до 3). При дифференцировании вектора необходимо учитывать то, что базисные вектора являются переменными и зависят от криволинейных координат $\left(x^1, x^2, x^3\right)$:

$$\frac{\partial \vec{\mathrm{v}}}{\partial x^k} = \frac{\partial \mathrm{v}^i}{\partial x^k} \vec{E}_i + \mathrm{v}^i \frac{\partial \vec{E}_i}{\partial x^k}. \tag{16}$$

Вектор $\partial \vec{E}_i / \partial x^k$, в свою очередь может быть разложен по выбранным базисным векторам:

$$\frac{\partial \vec{E}_i}{\partial x^k} = \Gamma^j_{ik} \vec{E}_j. \tag{17}$$

Коэффициенты данного разложения Γ^j_{ik} называют символами Кристоффеля второго рода, и определяются они через компоненты метрического тензора:

$$\Gamma^j_{ik} = \frac{1}{2} g^{jm} \left(\frac{\partial g_{mi}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m} \right), \tag{18}$$
$$(i, j, k, m = 1, 2, 3).$$

Объединяя соотношения (15), (16) и меняя названия «немых» (повторяющихся) индексов, получаем:

$$\frac{\partial \vec{\mathrm{v}}}{\partial x^k} = \frac{\partial \mathrm{v}^i}{\partial x^k} \vec{E}_i + \mathrm{v}^i \, \Gamma^j_{ik} \vec{E}_j = \left(\frac{\partial \mathrm{v}^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{jk} \, \mathrm{v}^j \right) \vec{E}_i, \tag{19}$$

где сомножитель при базисном векторе $\vec{E}_i$ представляет собой ковариантную производную контравариантного вектора по переменной x^k:

$$\mathrm{v}^i_k = \frac{\partial \mathrm{v}^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{jk} \, \mathrm{v}^j. \tag{20}$$

В дальнейшем потребуется ковариантная производная тензора напряжений σ^{ij} – как дважды контравариантного тензора второго ранга. Ковариантная производная этого тензора имеет вид [6]:

$$\sigma^{ij}_k = \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{mk} \sigma^{mj} + \Gamma^j_{mk} \sigma^{im}. \tag{21}$$

В уравнения движения $\rho_\alpha \dfrac{d\, \vec{\mathrm{v}}_\alpha}{dt} = div \hat{\sigma}_\alpha + \vec{f}_{\alpha\beta} + \rho_\alpha \vec{g}$ входят выражения $div\left(\vec{\mathrm{v}}\, \vec{\mathrm{v}}\right)$ и $div \hat{\sigma}$, которые в координатной форме можно записать в виде ковариантных векторов $div\left(\vec{\mathrm{v}}\,\vec{\mathrm{v}}\right) = \vec{E}_k \left(\mathrm{v}^i \, \mathrm{v}^k\right)_i$, $div\, \hat{\sigma} = \vec{E}_j \sigma^{ij}_i$. Используя ковариантное дифференцирование, эти вектора можно записать в форме:

$$div\left(\vec{\mathrm{v}}\,\vec{\mathrm{v}}\right)^j = \left(\mathrm{v}^i \, \mathrm{v}^j\right)_i = \left(\frac{\partial\, \mathrm{v}^i \, \mathrm{v}^j}{\partial x^i} + \Gamma^i_{ik} \, \mathrm{v}^k \, \mathrm{v}^j + \Gamma^j_{ik} \, \mathrm{v}^k \, \mathrm{v}^i \right), \tag{22}$$
$$\left(div\, \hat{\sigma}\right)^j = \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^i} + \Gamma^i_{ik} \sigma^{kj} + \Gamma^j_{ik} \sigma^{ki}.$$

Согласно соотношениям (13), (14), (18), получаем:

$$\Gamma^1_{11} = \frac{\left(a_{22} - 2n\, b_{22} + n^2 c_{22}\right)\left(\frac{\partial a_{11}}{\partial u^1} - 2n \frac{\partial b_{11}}{\partial u^1} + n^2 \frac{\partial c_{11}}{\partial u^1} \right)}{2\, det\, g} - \frac{\left(a_{12} - 2n\, b_{12} + n^2 c_{12}\right)}{2\, det\, g} \times$$
$$\times \left(2 \frac{\partial a_{12}}{\partial u^1} - 4n \frac{\partial b_{12}}{\partial u^1} + 2n^2 \frac{\partial c_{12}}{\partial u^1} - \frac{\partial a_{11}}{\partial u^2} + 2n \frac{\partial b_{11}}{\partial u^2} - n^2 \frac{\partial c_{11}}{\partial u^2} \right),$$

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \frac{\left(a_{22} - 2n\, b_{22} + n^2 c_{22}\right)\left(\frac{\partial a_{11}}{\partial u^2} - 2n \frac{\partial b_{11}}{\partial u^2} + n^2 \frac{\partial c_{11}}{\partial u^2} \right)}{2\, det\, g} -$$

$$- \frac{\left(a_{12} - 2n\, b_{12} + n^2 c_{12}\right)\left(\frac{\partial a_{22}}{\partial u^1} - 2n \frac{\partial b_{22}}{\partial u^1} + n^2 \frac{\partial c_{22}}{\partial u^1} \right)}{2\, det\, g},$$

$$\Gamma^1_{13}=\Gamma^1_{31}=\frac{\left(a_{22}-2n\,b_{22}+n^2c_{22}\right)\left(-2b_{11}+2n\,c_{11}\right)}{2\,det\,g}-\frac{\left(a_{12}-2n\,b_{12}+n^2c_{12}\right)\left(-2b_{12}+2n\,c_{12}\right)}{2\,det\,g}, \qquad (23)$$

$$\Gamma^1_{22}==\frac{\left(a_{22}-2n\,b_{22}+n^2c_{22}\right)}{2\,det\,g}\times\left(2\frac{\partial a_{12}}{\partial u^2}-4n\frac{\partial b_{12}}{\partial u^2}+2n^2\frac{\partial c_{12}}{\partial u^2}-\frac{\partial a_{22}}{\partial u^1}+2n\frac{\partial b_{22}}{\partial u^1}-n^2\frac{\partial c_{22}}{\partial u^1}\right)-$$

$$-\frac{\left(a_{12}-2n\,b_{12}+n^2c_{12}\right)\left(\frac{\partial a_{22}}{\partial u^2}-2n\frac{\partial b_{22}}{\partial u^2}+n^2\frac{\partial c_{22}}{\partial u^2}\right)}{2\,det\,g},$$

$$\Gamma^1_{23}=\Gamma^1_{32}=\frac{\left(a_{22}-2n\,b_{22}+n^2c_{22}\right)\left(-2b_{12}+2n\,c_{12}\right)}{2\,det\,g}-\frac{\left(a_{12}-2n\,b_{12}+n^2c_{12}\right)\left(-2b_{22}+2n\,c_{22}\right)}{2\,det\,g},$$

$$\Gamma^2_{11}=-\frac{\left(a_{12}-2n\,b_{12}+n^2c_{12}\right)\left(\frac{\partial a_{11}}{\partial u^1}-2n\frac{\partial b_{11}}{\partial u^1}+n^2\frac{\partial c_{11}}{\partial u^1}\right)}{2\,det\,g}+$$

$$+\frac{\left(a_{11}-2n\,b_{11}+n^2c_{11}\right)}{2\,det\,g}\times\left(2\frac{\partial a_{12}}{\partial u^1}-4n\frac{\partial b_{12}}{\partial u^1}+2n^2\frac{\partial c_{12}}{\partial u^1}-\frac{\partial a_{11}}{\partial u^2}+2n\frac{\partial b_{11}}{\partial u^2}-n^2\frac{\partial c_{11}}{\partial u^2}\right),$$

$$\Gamma^2_{12}=\Gamma^2_{21}=-\frac{\left(a_{12}-2n\,b_{12}+n^2c_{12}\right)\left(\frac{\partial a_{11}}{\partial u^2}-2n\frac{\partial b_{11}}{\partial u^2}+n^2\frac{\partial c_{11}}{\partial u^2}\right)}{2\,det\,g}+$$

$$+\frac{\left(a_{11}-2n\,b_{11}+n^2c_{11}\right)\left(\frac{\partial a_{22}}{\partial u^1}-2n\frac{\partial b_{22}}{\partial u^1}+n^2\frac{\partial c_{22}}{\partial u^1}\right)}{2\,det\,g},$$

$$\Gamma^2_{13}=\Gamma^2_{31}=-\frac{\left(a_{12}-2n\,b_{12}+n^2c_{12}\right)\left(-2b_{11}+2n\,c_{11}\right)}{2\,det\,g}+\frac{\left(a_{11}-2n\,b_{11}+n^2c_{11}\right)\left(-2b_{12}+2n\,c_{12}\right)}{2\,det\,g},$$

$$\Gamma^2_{22}=-\frac{\left(a_{12}-2n\,b_{12}+n^2c_{12}\right)}{2\,det\,g}\times\left(2\frac{\partial a_{12}}{\partial u^2}-4n\frac{\partial b_{12}}{\partial u^2}+2n^2\frac{\partial c_{12}}{\partial u^2}-\frac{\partial a_{22}}{\partial u^1}+2n\frac{\partial b_{22}}{\partial u^1}-n^2\frac{\partial c_{22}}{\partial u^1}\right)+$$

$$+\frac{\left(a_{11}-2n\,b_{11}+n^2c_{11}\right)\left(\frac{\partial a_{22}}{\partial u^2}-2n\frac{\partial b_{22}}{\partial u^2}+n^2\frac{\partial c_{22}}{\partial u^2}\right)}{2\,det\,g},$$

$$\Gamma^2_{23}=\Gamma^2_{32}=\frac{\left(a_{12}-2nb_{12}+n^2c_{12}\right)\left(2b_{12}-2n\,c_{12}\right)}{2\,det\,g}-\frac{\left(a_{11}-2nb_{11}+n^2c_{11}\right)\left(2b_{22}-2n\,c_{22}\right)}{2\,det\,g},$$

$$\Gamma^3_{11}=b_{11}-n\,c_{11},\quad \Gamma^3_{22}=b_{22}-n\,c_{22},$$

$$\Gamma^3_{12}=\Gamma^3_{21}=b_{12}-n\,c_{12},$$

$$\Gamma^1_{33}=\Gamma^2_{33}=\Gamma^3_{13}=\Gamma^3_{23}=\Gamma^3_{31}=\Gamma^3_{32}=\Gamma^3_{33}=0.$$

Здесь $det\, g$ является определителем матрицы метрического тензора g:

$$\begin{aligned} det\, g &= \left(c_{11}c_{22} - c_{12}^2\right)n^4 - \\ &-2\left(b_{11}c_{22} + c_{11}b_{22} - 2b_{12}c_{12}\right)n^3 + \\ &-2\left(b_{11}a_{22} + a_{11}b_{22} - 2a_{12}b_{12}\right)n + \\ &+a_{11}a_{22} - a_{12}^2. \end{aligned} \quad (24)$$

Примем во внимание конкретный вид поверхности S_2. Тогда имеем:

$$A = \begin{pmatrix} Z'^2+1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}; \quad (25)$$

$$B = \begin{pmatrix} \dfrac{Z''}{\sqrt{\left(Z'^2+1\right)}} & 0 \\ 0 & \dfrac{rZ'}{\sqrt{\left(Z'^2+1\right)}} \end{pmatrix}; \quad (26)$$

$$C = \begin{pmatrix} \dfrac{Z''^2}{\left(Z'^2+1\right)^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{Z'^2}{Z'^2+1} \end{pmatrix}; \quad (27)$$

$$g = \begin{pmatrix} Z'^2+1-2\dfrac{nZ''}{\sqrt{\left(Z'^2+1\right)}}+\dfrac{n^2Z''^2}{\left(Z'^2+1\right)^2} & 0 & 0 \\ 0 & r^2-2\dfrac{nrZ'}{\sqrt{\left(Z'^2+1\right)}}+\dfrac{n^2Z'(r)^2}{Z'^2+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (28)$$

$$\Gamma_{11}^1 = -2\frac{Z''^3n^2Z'}{\left(Z'^2+1\right)^4} + \frac{nZ''^2Z'}{\left(Z'^2+1\right)^{\frac{5}{2}}} + \frac{Z'Z''}{Z'^2+1};$$

$$\Gamma_{13}^1 = \Gamma_{31}^1 = \frac{Z''^2n}{\left(Z'^2+1\right)^3} - \frac{Z''}{\left(Z'^2+1\right)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{Z'Z''n^2}{\left(Z'^2+1\right)^3} + \frac{\left(Z'^3+Z'+rZ''\right)n}{\left(Z'^2+1\right)^{\frac{5}{2}}} - \frac{r}{Z'^2+1};$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{n^2Z'Z''}{\left(Z'^2+1\right)^2r^2} - \frac{\left(Z'^3+Z'+rZ''\right)n}{\left(Z'^2+1\right)^{\frac{3}{2}}r^2} + \frac{1}{r};$$

$$\Gamma_{23}^2 = \Gamma_{32}^2 = \frac{r^2\sqrt{Z'^2+1}\,Z'^2}{\left(Z'^2+1\right)^{3/2}} \times$$

$$\times\left(-2\frac{rZ'}{\sqrt{Z'^2+1}} + 2\frac{nZ'^2}{Z'^2+1}\right)^{-1};$$

$$\Gamma_{11}^3 = \frac{Z''}{\sqrt{\left(Z'^2+1\right)}} - \frac{nZ''^2}{\left(Z'^2+1\right)^2}; \quad (29)$$

$$\Gamma_{22}^3 = \frac{rZ'}{\sqrt{Z'^2+1}} - \frac{nZ'^2}{Z'^2+1}.$$

Толщина смеси, движущейся по поверхности S_2, мала по сравнению с радиусом кривизны кривой OABC. Поэтому слагаемые, содержащие n во всех выражениях, представленных выше, являются малыми величинами. Запишем необходимые выражения с точностью до членов порядка $\sim o(n)$. Тогда контравариантные вектора $\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}$, $div\hat{\sigma}$ принимают вид:

$$\begin{aligned} \left(div\left(\vec{v}\,\vec{v}\right)\right)^1 &= \frac{\partial v^1 v^1}{\partial r} + \frac{\partial v^2 v^1}{\partial \varphi} + \frac{\partial v^3 v^1}{\partial n} + \\ &+A_{1,1}v^1v^1 - A_{1,3}v^1v^3\,A_{2,2}v^2v^2; \\ \left(div\left(\vec{v}\,\vec{v}\right)\right)^2 &= \frac{\partial v^1 v^2}{\partial r} + \frac{\partial v^2 v^2}{\partial \varphi} + \\ &+\frac{\partial v^2 v^3}{\partial n} + B_{1,2}v^1v^2 - B_{2,3}v^2v^3; \\ \left(div\left(\vec{v}\,\vec{v}\right)\right)^3 &= \frac{\partial v^1 v^3}{\partial r} + \frac{\partial v^2 v^3}{\partial \varphi} + \frac{\partial v^3 v^3}{\partial n} + \\ &+C_{1,1}v^1v^1 + C_{1,3}v^1v^3 + C_{22}v^2v^2 - C_{3,3}v^3v^3. \end{aligned} \quad (30)$$

$$\left(div\,\hat{\sigma}\right)^1=\frac{\partial}{\partial r}\sigma^{11}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\sigma^{21}+\frac{\partial}{\partial n}\sigma^{31}+$$
$$+A_{1,1}\sigma^{11}-A_{1,3}\sigma^{13}-A_{2,2}\sigma^{22};$$
$$\left(div\,\hat{\sigma}\right)^2=\frac{\partial}{\partial r}\sigma^{12}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\sigma^{22}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial n}\sigma^{32}+B_{1,2}\sigma^{12}-B_{2,3}\sigma^{23};$$
$$\left(div\,\hat{\sigma}\right)^3=\frac{\partial}{\partial r}\sigma^{13}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\sigma^{32}+ \quad (31)$$
$$+\frac{\partial}{\partial n}\sigma^{33}+C_{1,1}\sigma^{11}+C_{1,3}\sigma^{13}+$$
$$+C_{22}\sigma^{22}-C_{3,3}\sigma^{33},$$

где

$$A_{1,1}=\frac{1}{r}+\frac{2Z'Z''}{\left(Z'^2+1\right)},$$
$$A_{1,3}=\frac{Z'}{r\left(Z'^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}+\frac{3Z''}{\left(Z'^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad (32)$$
$$A_{2,2}=\frac{r}{Z'^2+1};$$

$$B_{1,2}=\frac{3}{r}+\frac{Z'Z''}{Z'^2+1},$$
$$B_{2,3}=\frac{Z''}{\left(Z'^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{3Z'}{r\left(Z'^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}; \quad (33)$$

$$C_{11}=\frac{Z''}{\sqrt{\left(Z'^2+1\right)}},$$
$$C_{13}=\frac{1}{r}+\frac{Z''}{Z'^2+1},$$
$$C_{22}=\frac{rZ'}{\sqrt{\left(Z'^2+1\right)}}, \quad (34)$$
$$C_{33}=\frac{Z''}{\left(Z'^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{Z'}{\sqrt{\left(Z'^2+1\right)}}.$$

Уравнение неразрывности содержит операцию $div\left(\rho\,\vec{\mathrm{v}}\right)$. Запишем выражение для этого оператора в выбранной системе координат при сделанных предположениях:

$$div\left(\rho\,\vec{\mathrm{v}}\right)=\frac{1}{r\sqrt{\left(Z'^2+1\right)}}\times$$
$$\times\frac{\partial}{\partial r}\left(r\sqrt{\left(Z'^2+1\right)}\rho\,\mathrm{v}^1\right)+\frac{\partial\rho\,\mathrm{v}^2}{\partial\varphi}+\frac{\partial\rho\,\mathrm{v}^3}{\partial n}. \quad (35)$$

Выводы

Получены формулы для нахождения первой, второй и третьей квадратичной форм поверхности S_2, необходимых для построения внутренних поверхностей тарельчатого разбрасывателя в выбранной системе координат. Составлено уравнение неразрывности потока с учетом этих значений. Это позволяет проводить дальнейшее исследование динамики очистки зернового слоя на тарельчатом разбрасывателе пневмосепарирующего устройства.

Литература

1. Пат. 50587 Україна, МПК[9] B07B 1/00, B07B 4/00. Вібровідцентровий сепаратор / Тіщенко Л.М., Пастушенко М.Г., Харченко С.О., Сліпченко М.В.; заявник та власник Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка. №u 201000743; заявл. 26.01.10; опубл. 10.06.10, Бюл. №11/2010.
2. Тищенко Л.Н., Слипченко М.В. К исследованию динамики продуваемого слоя зерновой смеси / Л.Н. Тищенко, М.В. Слипченко // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету: ТДАТУ, Вип. 10 - Т.7 - Мелітополь, 2010. – С. 201-209.
3. Тищенко Л.Н., Слипченко М.В. Динамика извлечения легких примесей пневмосепарирующим устройством виброцентробежного сепаратора / Л.Н. Тищенко, М.В. Слипченко // Вібрації в техниці та технологіях, № 1 (61), 2011. – С. 186-193.
4. Погорелов А.В. Лекции по дифференциальной геометрии. / А.В. Погорелов – Харьков: Изд-во Харьковск. гос. ун-та, 1967. - 163 с.
5. Мак-Коннел А.Дж. Введение в тензорный анализ. / А.Дж. Мак-Коннел – М.: Физматгиз, 1963. - 412 с.
6. Тарапов И.Е. Механика сплошной среды. / И.Е. Тарапов - В 3 ч., Ч.2: Общие законы кинематики и динамики. Харьков: Золотые страницы, 2002. - 516 с.