



Надуть В. П.

Лапшин Е. С.

Шевченко А. И.

Институт
геотехнической
механики
им. Н.С. Полякова
НАН Украины

УДК [622.742:621.928.2]:51.001.57

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОХОЖДЕНИЯ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ ПРОСЕИВАЮЩУЮ ПОВЕРХНОСТЬ ПРИ ВИБРАЦИОННОМ ГРОХОЧЕНИИ

Виконано аналіз досліджень із зневоднення гірської маси. Розроблено математичну модель, що встановлює залежність кількості води, яка залишилась на просіваючій поверхні, від амплітуди та частоти віброзбудження.

The analysis of researches on dehydration of mountain weight is made. The mathematical model establishing dependence of a quantity of water, remained on a sifting surface, from amplitude and frequency vibrating excitation is developed.

Одной из важных и наиболее распространённых технологических операций при обезвоживании горной массы на разных стадиях и в различных отраслях народного хозяйства является вибрационное грохочение. Эффективность обезвоживания зависит от гранулометрического состава, характера расположения частиц и их физико-химических свойств. Грохоты проще и дешевле центрифуг и фильтров. Кроме того, даже в тех случаях, когда применяются центрифуги и фильтры, то перед ними устанавливают вибрационные грохоты. Отсюда пристальное внимание к усовершенствованию вибрационных грохотов, которое обеспечит повышение качества сырья, энерго- и ресурсосбережение, уменьшение вредного влияния на экологию [1, 2].

Обезвоживание горной массы на вибрационном грохоте происходит в результате прохождения жидкости через ячейки просеивающей поверхности. При тонком и сверхтонком грохочении этому процессу препятствует поверхностное натяжение жидкости. Ни одна из теорий грохочения не позволяет определить, при каких режимах вибровозбуждения обеспечивается обезвоживание.

В ИГТМ НАН Украины на протяжении многих лет ведутся исследования процессов классификации и обезвоживания с помощью вибрационного грохочения. Эксперименты выполнялись на различных просеивающих поверхностях в виде калибровочной тканой

сетки (стальной или полиамидной) с разными размерами отверстий, лежащей на:

- резиновых лентах-струнах или металлических стержнях;
- поддерживающей полипропиленовой сетке, под которой находились резиновые ленты-струны или металлические стержни.

Изучение влияния режимов возбуждения на прохождение жидкости через различные просеивающие поверхности грохота выполнено при вибрационном [1] и импульсном воздействиях [2]. В результате исследований накоплен большой экспериментальный материал, который требует анализа и обобщения. В этой связи цель работы – математическое моделирование прохождения жидкости через просеивающую поверхность при вибрационном грохочении.

Интенсивность процесса прохождения жидкости через ячейки сита будем характеризовать количеством воды, оставшимся на сите после вибрационного воздействия по истечении времени, при котором процесс прекращается.

Из предварительных экспериментов установлено, что остаток воды на просеивающей поверхности зависит от размера отверстий l_o , амплитуды A и частоты вибровозбуждения ω , плотности ρ , поверхностного натяжения σ и вязкости жидкости, т. е.

$$W_s = f(l_o, A, \omega, \rho, \sigma, \mu) \quad (1)$$



где μ – коэффициент динамической вязкости.
 Определим критерии подобия. В табл. 1 для указанных параметров приведены показатели степеней μ_i, λ_i, τ_i при единицах измерения массы $[M]$, длины $[L]$ и времени $[T]$

Таблица 1
Размерности величин

Параметр	Основные единицы измерения		
	$[M]$, кг	$[L]$, м	$[T]$, с
Размер отверстия l_o	$\mu_1 = 0$	$\lambda_1 = 1$	$\tau_1 = 0$
Амплитуда A	$\mu_2 = 0$	$\lambda_2 = 1$	$\tau_2 = 0$
Частота ω	$\mu_3 = 0$	$\lambda_3 = 0$	$\tau_3 = -1$
Плотность ρ	$\mu_4 = 1$	$\lambda_4 = -3$	$\tau_4 = 0$
Коэффициент поверхностного натяжения σ	$\mu_5 = 1$	$\lambda_5 = 0$	$\tau_5 = -2$
Коэффициент динамической вязкости μ	$\mu_6 = 1$	$\lambda_6 = -1$	$\tau_6 = -1$

Примем за основные единицы A, ω и ρ , поскольку определитель, составленный из показателей степеней отличен от нуля [3, 4]

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mu_2 & \lambda_2 & \tau_2 \\ \mu_3 & \lambda_3 & \tau_3 \\ \mu_4 & \lambda_4 & \tau_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \quad (2)$$

Уравнение (1) представим в виде

$$\frac{w_s}{A^{x_w} \omega^{y_w} \rho^{z_w}} = F \left(\frac{l_o}{A^{x_L} \omega^{y_L} \rho^{z_L}}, \frac{\sigma}{A^{x_\sigma} \omega^{y_\sigma} \rho^{z_\sigma}}, \frac{\mu}{A^{x_\mu} \omega^{y_\mu} \rho^{z_\mu}} \right) \quad (3)$$

где показатели степеней – неизвестные величины, определяемые из условия, что в формуле дроби – безразмерные комплексы.

Поскольку, w_s безразмерная величина, то x_w, y_w и z_w равны нулю.

Размерность первого комплекса в скобках следующая:

$$\frac{[L]}{[L]^{x_L} ([T]^{-1})^{y_L} ([M][L]^{-3})^{z_L}} = 1 \quad (4)$$

или $[M]^{-z_L} [L]^{1-x_L+3z_L} [T]^{y_L} = 1$, откуда следует система уравнений [3, 4]

$$\left. \begin{aligned} -z_L &= 0, \\ 1-x_L+3z_L &= 0, \\ y_L &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Решая систему (5), получим $x = 1, y_L = 0, z_L = 0$.

Имеем

$$\frac{l_o}{A^{x_L} \omega^{y_L} \rho^{z_L}} = \frac{l_o}{A} = \Pi_1 \quad (6)$$

Выполняя аналогичные вычисления для второго комплекса в скобках (3), получим:

$$\frac{[M][T]^{-2}}{[L]^{x_\sigma} ([T]^{-1})^{y_\sigma} ([M][L]^{-3})^{z_\sigma}} = 1 \quad (7)$$

$$[M]^{1-z_\sigma} [L]^{-x_\sigma+3z_\sigma} [T]^{-2+y_\sigma} = 1$$

$$\left. \begin{aligned} 1-z_\sigma &= 0, \\ -x_\sigma+3z_\sigma &= 0, \\ -2+y_\sigma &= 0, \end{aligned} \right\}; x_\sigma = 3; y_\sigma = 2; z_\sigma = 1. \quad (8)$$

Откуда следует

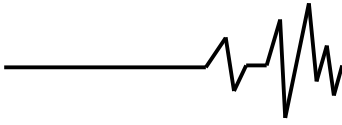
$$\frac{\sigma}{A^{x_\sigma} \omega^{y_\sigma} \rho^{z_\sigma}} = \frac{\sigma}{A^3 \omega^2 \rho} = \Pi_2 \quad (9)$$

Для третьего комплекса имеем

$$\frac{[M][L]^{-1}[T]^{-1}}{[L]^{x_\mu} ([T]^{-1})^{y_\mu} ([M][L]^{-3})^{z_\mu}} = 1; \quad (10)$$

$$[M]^{1-z_\mu} [L]^{-1-x_\mu+3z_\mu} [T]^{-1+y_\mu} = 1;$$

$$\left. \begin{aligned} 1-z_\mu &= 0, \\ -1-x_\mu+3z_\mu &= 0, \\ -1+y_\mu &= 0, \end{aligned} \right\}; x_\mu = 2; y_\mu = 1; z_\mu = 1; \quad (11)$$



$$\frac{\mu}{A^x \omega^y \rho^z} = \frac{\mu}{A^2 \omega \rho} = \Pi_3. \quad (12)$$

Умножив обратные значения Π_2 и Π_3 на Π_1 , получим критерии

$$\Pi_4 = \frac{A^3 \omega^2 \rho}{\sigma} \cdot \frac{l_o}{A} = \frac{l_o v^2 \rho}{\sigma}; \quad (13)$$

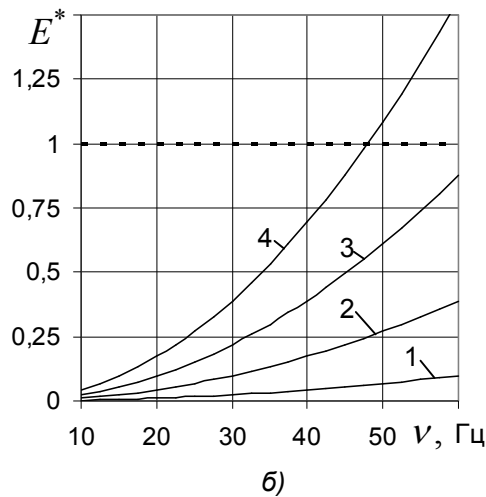
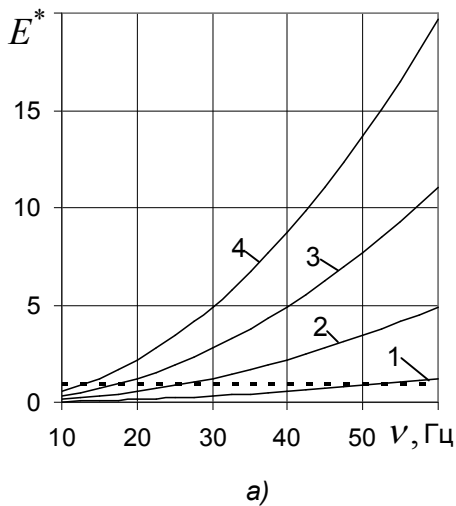
$$\Pi_5 = \frac{A^2 \omega \rho}{\mu} \cdot \frac{l_o}{A} = \frac{l_o v \rho}{\mu}, \quad (14)$$

где $v = A\omega$ – амплитуда виброскорости.

Критерий Π_4 характеризует отношение кинетической энергии объема жидкости с

характерным размером l_o к энергии образования новой межфазной поверхности, а критерий Π_5 – число Рейнольдса. Далее критерий Π_4 будем обозначать $E^*(l)$ и называть критерием отношения энергий (ОЭ). Здесь в скобках указано значение характерного размера, при котором вычисляется критерий.

Учитывая физический смысл критерия ОЭ, имеем, что жидкость пройдет через отверстие при $E^* > 1$. На рис. 1 приведены значения $E^*(l_o)$ при различных амплитудах и частотах вибровозбуждения (штриховой линией отмечено значение $E^*(l_o) = 1$).



а) – при $l_o = 0,63$ мм; б) – при $l_o = 0,05$ мм;

1, 2, 3 и 4 – амплитуда вибровозбуждения 1, 2, 3 и 4 мм

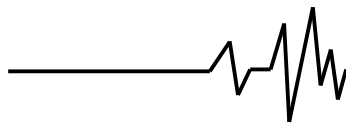
Рис. 1. Значения критерия ОЭ при различных амплитудах и частотах вибровозбуждения

Из графиков видно, что для сетки с отверстием 0,05 мм для удаления воды необходимы практически не реализуемые режимы. Однако из экспериментов следует [1,2], что прохождение воды происходит даже при $E^*(l_o) < 1$. Это свидетельствует о том, что процесс характеризуется масштабом длины, отличающимся от l_o . Видеозапись движения воды показала, что под ситом мениск в пределах отверстия выпучивается и сливается с соседним мениском, образуя каплю под ситом. К этому следует добавить, что капли стекают в нижние участки неровностей сетки, где происходит их дальнейшее увеличение.

Основание капли в зависимости от режима вибровозбуждения имеет размер l_k в пределах от 3 до 10 мм. В этом случае $E^*(l_k) > 1$.

Математически описать это явление в настоящий момент не представляется возможным, поэтому для анализа и обобщения экспериментальных данных был применен регрессионный анализ. Для построения регрессионных уравнений использовалась программа Excel.

При записи регрессионного уравнения в скобках будем указывать следующие обозначения, характеризующие



конструктивные особенности просеивающей поверхности и включающие четыре позиции, разделенные дефисом. В них соответственно указываются начальная буква материала, из которого изготовлена сетка, размер стороны квадратного отверстия в миллиметрах, при наличии поддерживающей сетки указывается буква П, когда установлены ленты-струны, записывается буква С. В позиции после размера ячейки будем писать Ст и Уд (сокращения от слов стержни и ударник). Например, запись П-0,05-Ст-Уд означает полиамидная сетка с квадратными отверстиями 0,05 мм, под которой установлены стержни и ударник. При гармоническом возбуждении сетки, когда отсутствуют стержни и ударник, в обозначении будем указывать только материал сетки и размер отверстия. А в случае, когда уравнение описывает остаток воды на просеивающих поверхностях С-0,05, С-0,05-С и С-0,05-П-С будем использовать обозначение С-0,05-Об, где последние буквы – сокращение от слова «обобщенная». Более того, поскольку тип просеивающей поверхности (С-0,05, С-0,05-С и С-0,05-П-С) по своей сути – категоризированная переменная, то при построении модели будем их обозначать целочисленной переменной tip , которая соответственно принимает значения 1, 2 и 3. Подобные обозначения приняты и для других просеивающих поверхностей.

При построении множественного регрессионного уравнения использовались модели: линейные, в виде полиномов, экспонент и др. Далее приведены окончательные результаты.

Параметры регрессионного уравнения для просеивающей поверхности С-0,05-Об приведены в табл. 2.

Таблица 2
Параметры регрессионного уравнения для просеивающей поверхности С-0,05-Об

Переменные	Коэффициенты регрессии	Стандартные ошибки коэффициентов	Критерии Стьюдента
Свободный член	183,0312	6,159999	29,7129
v	-3,0499	0,230743	13,2179
A	-8,4766	0,651033	13,0203
tip	-50,6683	5,624194	9,0090
v^2	0,0235	0,003574	6,5732
tip^2	14,3207	1,395464	10,2623

Значимость коэффициентов регрессионного уравнения определялась с

помощью критерия Стьюдента (t). В таблице приведены значения, которые вычислялись как отношение взятого по модулю коэффициента регрессии к его стандартной ошибке. Эти критерии сравнивались с критическим значением t_k , определенным по распределению Стьюдента при числе степеней свободы $n = N - m$, где N – число наблюдений, m – число оцениваемых параметров. Получено $t_k(172)=1,974$ при уровне значимости 0,05. Для всех коэффициентов $t > t_k$. Таким образом, коэффициенты регрессионного уравнения статистически значимы.

Коэффициент множественной детерминации $R^2 = 0,8611$. Он оценивает долю вариации результата за счет представленных в уравнении факторов в общей вариации результата. Имеем достаточно высокую степень обусловленности вариации результата вариацией факторных признаков.

Адекватность регрессионного уравнения оценивалась с помощью критерия Фишера F , который проверяет нулевую гипотезу о статистической незначимости параметров построенного регрессионного уравнения. Поскольку расчетное значение $F(5,175) = 213,298$ превышает критическое значение $F_k(5,175) = 2,267$ (при уровне значимости 0,05), то с вероятностью более 95 % принимается альтернативная гипотеза. Таким образом, поскольку

$$t_i > t_k; F_i > F_k, \quad (15)$$

то признается адекватность регрессионного уравнения

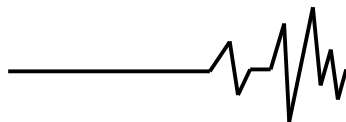
$$W_c(C-0,05-Об) = 183,0312 - 3,0499v - 8,4766A - 50,6683tip + 0,0235v^2 + 14,3207tip^2. \quad (16)$$

Параметры регрессионного уравнения для просеивающей поверхности С-0,63-Об приведены в табл. 3.

Таблица 3
Параметры регрессионного уравнения для просеивающей поверхности С-0,63-Об

Переменные	Коэффициенты регрессии	Стандартные ошибки коэффициентов	Критерии Стьюдента
Свободный член	132,9601	4,535980	29,3123
v	-2,1468	0,076325	28,1266
A	-8,8886	0,872040	10,1928
tip	-0,7975	1,831874	0,4354

Получены следующие характеристики для оценки адекватности модели:



– критическое значение критерия Стьюдента $t_k(117) = 1,9804$ при уровне значимости 0,05;

- коэффициент детерминации 0,8712;
- критерий Фишера $F(3,117) = 263,80$;
- критическое значение критерия Фишера $F_k(3,117) = 2,6821$.

Критерии Стьюдента для свободного члена, v и A больше $t_k(117) = 1,9804$, а для переменной tip меньше критического значения $t_k(117) = 1,9804$. Отсюда вывод: свободный член и коэффициенты перед v и A значимы, а коэффициент перед tip незначим, поэтому исключим из модели переменную tip . Параметры для этого случая приведены в табл. 4.

Таблица 4
Параметры регрессионного скорректированного уравнения для поверхности С-0,63-Об

Переменные	Коэффициенты регрессии	Стандартные ошибки коэффициентов	Критерии Стьюдента
Свободный член	131,7240	3,525359	37,3647
v	-2,1456	0,076019	28,2250
A	-8,8807	0,868856	10,2212

Характеристики для оценки адекватности модели:

- критическое значение критерия Стьюдента $t_k(118) = 1,9803$ при уровне значимости 0,05;
- коэффициент детерминации 0,871;
- критическое значение критерия критерий Фишера $F(2,118) = 398,35$;
- $F_k(2,118) = 3,0731$.

Таким образом, поскольку справедливо условие (15), то адекватная модель имеет вид

$$W_c(C-0,63-Об) = 131,7240 - 2,1456v - 8,8807A. (17)$$

Такой результат обусловлен большим разбросом значений при изменении v и A , по сравнению с разбросом вызванным при изменением переменной tip . В этой связи были построены регрессионные уравнения отдельно для просеивающей поверхности С-0,63 и С-0,63-С.

В табл. 5 приведены параметры регрессионного уравнения для просеивающей поверхности С-0,63.

Таблица 5
Параметры регрессионного уравнения для просеивающей поверхности С-0,63

Переменные	Коэффициенты регрессии	Стандартные ошибки коэффициентов	Критерии Стьюдента
Свободный член	231,5299	7,187026	32,2150
v	2,2678	0,273346	8,2965
A	-7,9030	0,402868	19,6168
\sqrt{v}	-43,7670	2,872941	15,2342

Характеристики для оценки адекватности модели:

- критическое значение критерия Стьюдента $t_k(58) = 2,002$ при уровне значимости 0,05;
- коэффициент детерминации 0,9824;
- критерий Фишера $F(3,58) = 1078,5$;
- критическое значение критерия $F_k(3,58) = 2,764$.

Поскольку справедливо условие (15), то адекватная модель имеет вид

$$W_c(C-0,63) = 231,5299 + 2,2678v - 7,9030A - 43,7670\sqrt{v}. (18)$$

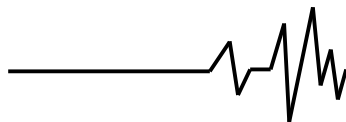
В табл. 6 приведены параметры регрессионного уравнения для просеивающей поверхности С-0,63-С.

Таблица 6
Параметры регрессионного уравнения для просеивающей поверхности С-0,63-С

Переменные	Коэффициенты регрессии	Стандартные ошибки коэффициентов	Критерии Стьюдента
Свободный член	230,4400	23,95428	9,61999
v	-0,8571	0,42526	2,01547
A	-7,5899	1,26602	5,99509
$\ln v$	-42,8183	11,02472	3,88385

Характеристики для оценки адекватности модели:

- критическое значение критерия Стьюдента $t_k(55) = 2,004$ при уровне значимости 0,05;
- коэффициент детерминации 0,9048;
- критерий Фишера $F(3,55) = 174,36$;
- критическое значение критерия $F_k(3,55) = 2,7725$.



Условие (15) выполняется, поэтому адекватная модель имеет вид

$$W_c(C-0,63-C) = 230,44 - 0,8571v - 7,5899A - 42,8183 \ln v. \quad (19)$$

В табл. 7 представлены параметры регрессионного уравнения для просеивающей поверхности П-0,05-П-С.

Таблица 7

Параметры регрессионного уравнения для просеивающей поверхности П-0,05-П-С

Переменные	Коэффициенты регрессии	Стандартные ошибки коэффициентов	Критерии Стьюдента
Свободный член	119,6722	2,888798	41,4263
v	-0,8817	0,087653	10,0595
vA	-0,4131	0,037879	10,9064

Характеристики для оценки адекватности модели:

- критическое значение критерия Стьюдента $t_k(56) = 2,003$ при уровне значимости 0,05;
- коэффициент детерминации 0,8576;
- критерий Фишера $F(2,56) = 168,65$;
- критическое значение критерия $F_k(2,56) = 3,1619$

Так как выполняется условие (15), то адекватная модель имеет вид

$$W_c(П-0,05-П-С) = 119,6722 - 0,8817v - 0,4131vA. \quad (20)$$

Для экспериментов, полученных при импульсном воздействии на сетку [2], разработана регрессионная модель, параметры которой приведены в табл. 8. В этой модели переменная tip принимает значения 1 и 2, которые присвоены, соответственно, для стальной и полиамидной сеток.

Характеристики для оценки адекватности модели:

- критическое значение критерия Стьюдента $t_k(110) = 1,9812$ при уровне значимости 0,05;
- коэффициент детерминации 0,9072;
- критерий Фишера $F(5,110) = 215,10$;
- критическое значение критерия $F_k(5,110) = 2,2969$.

Поскольку справедливо условие (15), то адекватная модель имеет вид

$$W_c(Об-0,05-Ст-Уд) = 63,12977 - 2,91871v + 54,73479tip - 0,70727v \cdot tip - 6,25279A \cdot tip + 0,03600v^2. \quad (21)$$

Таблица 8

Параметры регрессионного уравнения для просеивающей поверхности Об-0,05-Ст-Уд

Переменные	Коэффициенты регрессии	Стандартные ошибки коэффициентов	Критерии Стьюдента
Свободный член	63,12977	6,608218	9,5532
v	-2,91871	0,314918	9,2682
tip	54,73479	3,883368	14,0947
$v \cdot tip$	-0,70727	0,116251	6,0840
$A \cdot tip$	-6,25279	0,481886	12,9757
v^2	0,03600	0,004035	8,9206

Таким образом, получены регрессионные уравнения (16)–(21), устанавливающие зависимость количества оставшейся на просеивающей поверхности воды от амплитуды и частоты вибровозбуждения. Эти результаты позволяют рассчитывать параметры вибровозбуждения для различных просеивающих поверхностей, а также для классификации и обезвоживания материалов различной крупности.

Приведенные данные будут использованы при математическом моделировании для определения рациональных конструктивных и динамических параметров процесса обезвоживания горной массы.

Литература

1. Лапшин Е.С. Экспериментальные исследования вибрационного воздействия на прохождение жидкости через просеивающую поверхность / Лапшин Е.С., Шевченко А.И., Прокопишин Л.Н., Буров А.В. // *Металлургическая и горнорудная промышленность: Научно-технический и производственный журнал*. - 2011. - № 3. - С. 71-74.
2. Надутый В.П. Повышение эффективности удаления влаги при тонком грохочении горной массы за счет импульсного воздействия / Надутый В.П., Лапшин Е.С., Шевченко А.И., Буров А.В. // VI Наукотехнічна конференція "Потураєвські читання", до 89 річниці з дня народження академіка НАН України В.М. Потураєва. - Науковий вісник: Наук.-техн. журнал / Національний гірничий університет України. - Дніпропетровськ, 2011. - Вип. 2(122). - С. 95-99.
3. Теория подобия и размерностей. Моделирование / Алабужев П.Н., Геронимус В.Б., Мицкевич Л.М. [и др.]. - М.: Высшая школа, 1968. - 208 с.
4. Бриджмен П. Анализ размерностей / П. Бриджмен. - Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. - 148 с.