№ 4 (64) 2011 Вібрації в техніці та технологіях

Жупиев А.Л.

Заболотный К.С.

Панченко Е.В.

Государственное высшее учебное заведение «Национальный горный университет»

УДК 534.1

ПРЯМОЛИНЕЙНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОДНОРОДНЫХ СИСТЕМ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Розглядаються нормальні коливання нелінійної ланцюгової системи з однорідним потенціалом, із двома ступенями вільності. Виведене рівняння для визначення числа прямолінійних нормальних коливань. Показано, що додаткові (у порівнянні з лінійною системою) форми коливань найбільше яскраво виражені в симетричних системах зі слабким зв'язком. Визначені області існування й стійкості нормальних коливань.

Normal vibration modes of nonlinear chain system with homogeneous potential, with two degrees of freedom are considered. The equation for definition of number of rectilinear normal vibration modes is deduced. It is shown, that additional (in comparison with linear system) normal vibration modes are most brightly expressed at symmetric systems with weak connection. Areas of existence and stability of normal vibration modes obtained.

Постановка задачи. Изучение нормальных колебаний нелинейных систем является необходимым этапом для построения резонансных режимов, исследования многочастотных режимов в консервативных системах и т. д. [1, 2]. Большинство реальных систем не допускает точного построения нормальных колебаний, что приводит к необходимости применения различных приближенных методов. Но при этом приходится использовать в той или иной форме нормальные колебания какой-то изученной системы. Системами, допускающими точное построение нормальных колебаний (по крайней мере прямолинейных), являются линейные и однородные системы. Однако свойства нормальных колебаний однородных систем, отличных от линейных, изучены слабо. Показано, например, что однородная система с двумя степенями свободы может иметь более двух нормальных форм. Поэтому актуальной задачей является решение вопросов о числе прямолинейных форм нормальных колебаний однородной системы и об устойчивости этих форм.

Целью статьи является построение прямолинейных нормальных форм колебаний нелинейной цепной системы с однородным потенциалом с двумя степенями свободы и исследование их устойчивости.

Основная часть.

Рассмотрим свободные колебания нелинейной системы с двумя степенями свободы, которая состоит из двух масс m_1 и m_2, связанных между собой и с неподвижными опорами нелинейными пружинами с жесткостями C_{12}, C_{11} и C_{22} соответственно.

Уравнения движения рассматриваемой системы имеют вид

$$\begin{aligned} & m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + C_{11} f(x_1) + C_{12} f(x_1 - x_2) = 0; \\ & m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + C_{22} f(x_2) + C_{12} f(x_1 - x_2) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь x_i — смещение i-й массы;

$$f(x) \equiv \operatorname{sign}(x) \cdot |x|^{\rho};$$

ρ — показатель однородности, рациональное число.

Введем безразмерные параметры

$$\chi = m_2 / m_1, \quad \varepsilon = C_{12} / C_{11}, \quad \alpha = C_{22} / C_{11}$$

и безразмерное время

$$\tau = \sqrt{C_{11}/m_1 \cdot t}\,.$$

Параметры χ и α характеризуют инерционную и жесткостную асимметрии соответственно, параметр ε является характеристикой связи.

Тогда уравнения движения примут вид

$$\frac{d^2x_1}{d\tau^2} + f(x_1) + \varepsilon \cdot f(x_1 - x_2) = 0;$$
$$\chi\,\frac{d^2x_2}{d\tau^2} + \alpha \cdot f(x_2) + \varepsilon \cdot f(x_1 - x_2) = 0. \qquad (2)$$

Будем разыскивать прямолинейные нормальные формы колебаний в виде

$$x_2 = \mu \cdot x_1\,, \qquad (3)$$

где μ — коэффициент формы колебаний.

Подстановка (3) в уравнение (2) дает следующее условие совместности

$$\varepsilon \cdot f(1-\mu)\cdot(1+\chi\cdot\mu) = \alpha \cdot f(\mu) - \chi \cdot \mu. \qquad (4)$$

Вопрос о числе прямолинейных нормальных колебаний системы (1) сводится к изучению числа корней уравнения (4) в зависимости от параметров α, χ, ε.

Рассмотрим симметричные системы ($\alpha = \chi = 1$) и выясним, при каких значениях ε возможны прямолинейные формы, не совпадающие с известными синфазной ($\mu = 1$) и антифазной ($\mu = -1$), которые существуют при любом значении параметра связи.

Условие (4) инвариантно относительно замены $\mu = 1/\mu$, поэтому ограничимся изучением интервала (–1, 1). Так как в линейных системах ($\rho = 1$) дополнительные формы ($\mu = 0$, $\mu = \infty$) существуют только при $\varepsilon = 0$, то естественно ожидать существенное отличие поведения кривой $\mu(\varepsilon)$ для $\rho > 1$ и $\rho < 1$.

Если $\rho > 1$, то, как нетрудно заметить из уравнения (4), при $\varepsilon_* = (\rho - 1)\cdot 2^{-\rho}$ происходит бифуркация антифазной формы. Поскольку

$$\left.\frac{d_\varepsilon^2}{d\mu^2}\right|_{\mu=-1} = 0$$

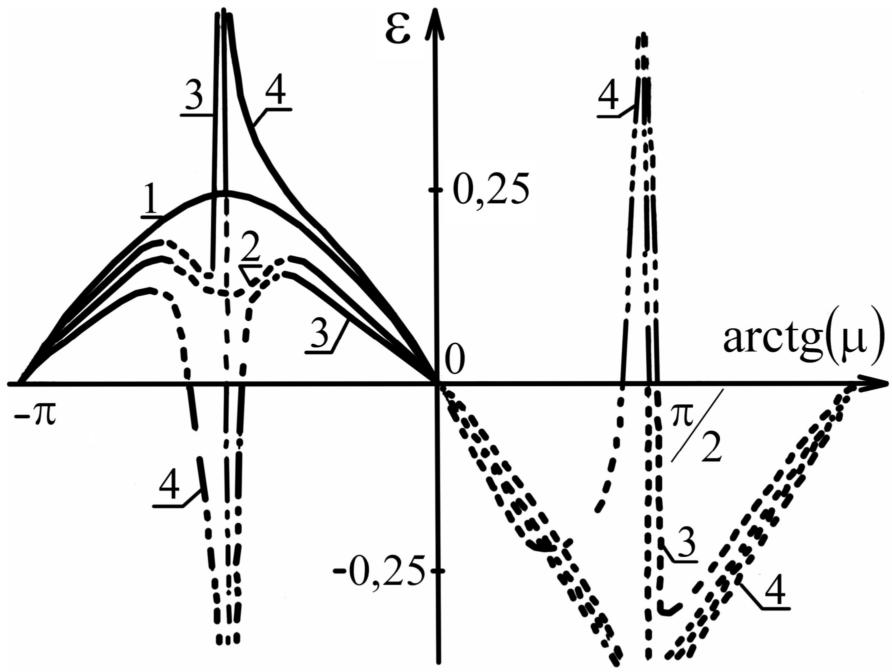
для $\rho = 5$, то при $\varepsilon > \varepsilon_*$ дополнительные формы возможны лишь для систем с показателем однородности $\rho > 5$.

На рис. 1 показаны области существования нормальных колебаний однородных систем, соответствующие действительным корням уравнения (4). Для заданного значения ε число этих корней определяется по числу корней уравнения

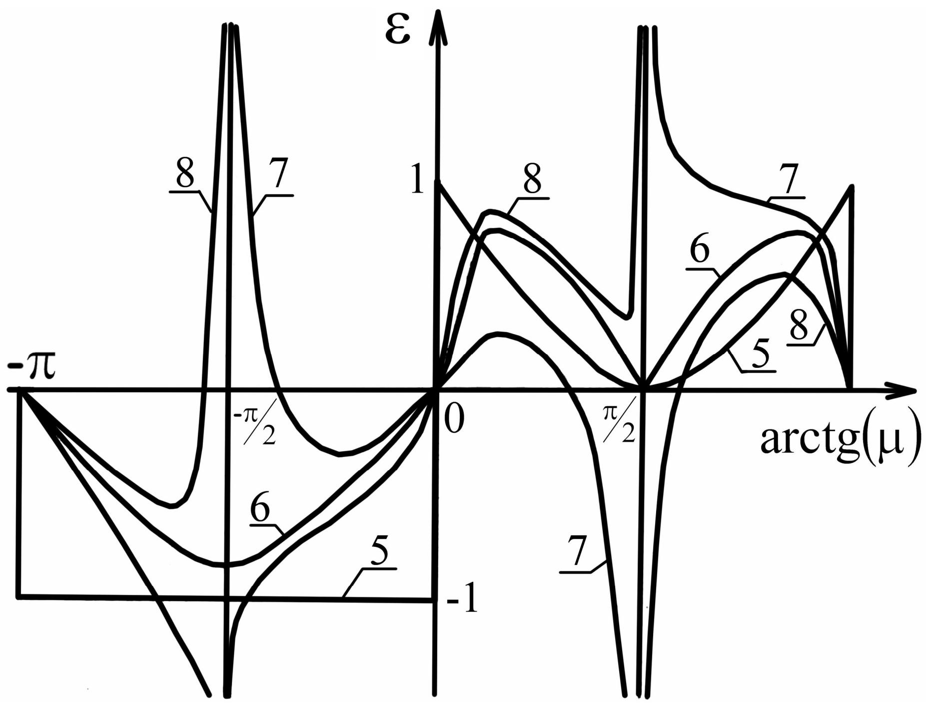
$$\frac{d\varepsilon}{d\mu} = 0\,.$$

Пунктиром на рис. 1, а изображены орбитально неустойчивые нормальные формы. Синфазная форма и антифазная (только при $\varepsilon = 0$) устойчивы по отношению к возмущению начальных смещений. Исследование устойчивости антифазной формы для $\varepsilon < 0$ дает чередующиеся полосы устойчивости и неустойчивости, с границами типа $\varepsilon = \varepsilon_*$ или $\varepsilon = 0$ (устойчивость соответственно по отношению к возмущению начальных смещений или начальных скоростей), что следует из анализа уравнения Хилла. Каждая такая точка является точкой бифуркации антифазной формы, причем в точках типа $\varepsilon = \varepsilon_*$ зарождаются криволинейные формы колебаний, исходящие из точек на граничной эквипотенциальной кривой, а в точках типа $\varepsilon = 0$ – формы, непроходящие через нее. Все эти колебания соответствуют внутренним комбинационным резонансам однородной системы с двумя степенями свободы.

В работе [3] сделана попытка дать геометрическую интерпретацию точкам типа $\varepsilon = \varepsilon_*$ и $\varepsilon = 0$ антифазной формы (точки первой и второй смены устойчивости). Однако такие геометрические понятия как экстремальность кривизны, экстремальность диаметра связаны только с прямолинейными нормальными формами. В точке $\varepsilon = \varepsilon_*$ центр кривизны эквипотенциали совпадает с центром кривой, что соответствует появлению дополнительных прямолинейных форм. Все остальные критические точки связаны с рождением криволинейных форм.



а



б

Рис. 1. Области существования прямолинейных нормальных форм колебаний:

а) $\rho > 1$; б) $\rho < 1$

1 – $1 < \rho < 5$, $\chi = 1$, $\alpha = 1$; **2** – $\rho > 5$, $\chi = 1$, $\alpha = 1$;

3 – $\rho > 5$, $\chi > \alpha$, $\chi^{\rho} < \alpha$; **4** – $1 < \rho < 5$, $\chi < \alpha$, $\chi^{\rho} > \alpha$;

5 – $\rho = 0$, $\chi = 1$, $\alpha = 1$; **6** – $\rho = 1/3$, $\chi = 1$, $\alpha = 1$;

7 – $0 < \rho < 1$, $\chi > \alpha$, $\chi^{\rho} > \alpha$; **8** – $0 < \rho < 1$, $\chi < \alpha$, $\chi^{\rho} < \alpha$

Вот почему и соответствующую геометрическую интерпретацию можно дать только в криволинейной системе координат, связанной с этими новыми формами.

В областях значений параметров, где не существуют криволинейные формы колебаний и где граничная эквипотенциальная кривая остается выпуклой, критерием устойчивости прямолинейных форм является относительный минимум соответствующего им диаметра (как известно, критерием существования прямолинейных форм служит экстремальное значение длины диаметра). В симметричных, но неоднородных системах в точке $\varepsilon = \varepsilon_*$ центр кривизны уже не совпадает с центром эквипотенциали, но близок к нему. Это является геометрическим отражением факта слабой искривленности дополнительных форм, ответвляющихся от антифазной формы при $\varepsilon = \varepsilon_*$.

Аналогичный анализ систем с показателем однородности $0 \le \rho < 1$ показал, что основное отличие таких систем от рассмотренных ранее состоит в том, что при $\varepsilon > 0$ для любого ρ существует или две, или шесть прямолинейных форм.

Рассмотрим случаи очень сильной и очень слабой связи. Для больших ε возможны только две – синфазная ($\mu = 1$) и антифазная ($\mu = -1/\chi$) нормальные формы колебаний, а для малых ε – четыре формы: синфазная

$$\mu = \left(\frac{\chi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{(\rho-1)}},$$

антифазная

$$\mu = -\left(\frac{\chi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{(\rho-1)}}.$$

и две формы $\mu = 0$ и $\mu = \infty$, соответствующие перемещениям только одной из масс.

Поведение кривых $\mu(\varepsilon)$ зависит от соотношения между величинами

$$1/\chi \quad \text{и} \quad \left(\frac{\chi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{(\rho-1)}}$$

для отрицательных μ, и между величинами 1 и

$$\left(\frac{\chi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{(\rho-1)}}$$

для положительных μ, т. е. различным соотношениям между жесткостной и инерционной асимметриями. Таким образом, дополнительные формы (по сравнению с синфазной и антифазной, характерными для линейных систем) наиболее ярко выражены у симметричных систем со слабой связью.

Выводы.

1. Построены прямолинейные нормальные формы колебаний нелинейной цепной системы с однородным потенциалом с двумя степенями свободы и определены области их существования и устойчивости.
2. Показано, что дополнительные (по сравнению с линейной системой) формы колебаний наиболее ярко выражены у симметричных систем со слабой связью.

Литература

1 . Маневич Л.И. О нормальных колебаниях в нелинейных системах с двумя степенями свободы [Текст] / Л.И. Маневич, М.А. Пинский – «Прикладная механика». – 1972. – № 9, С. 83 – 90.

2 . Маневич Л.И. Вынужденные колебания в нелинейных системах с двумя степенями свободы [Текст] / Л.И. Маневич, Б.П. Черевацкий. –«Прикладная механика». – 1973. – № 11. – С. 74 – 90.

3 . Rosenberg R.M., Hsu C.S. On the geometrization of normal vibration of nonlinear systems [Текст] / R.M. Rosenberg, C.S. Hsu. – Труды международного симпозиума по нелинейным колебаниям. – К.: Изд-во АН УССР. – 1961. – С. 380 – 416.