

Франчук В.П.

Государственное  
высшее учебное  
заведение  
«Национальный  
горный  
университет»

УДК 621.926.22.001:622.732

## ПРИНЦИПЫ ПРИВЕДЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ К СИСТЕМЕ С ДИСКРЕТНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

*Розглянуто рух великого шару технологічного навантаження як системи з розподіленими параметрами під дією направлених коливань. На прикладі кульового завантаження вертикального вібраційного млина показано розпушування шару в процесі відривного руху куль.*

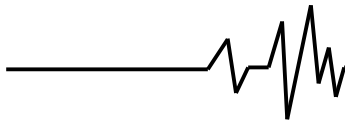
*The motion of large layer of technological load as system of distributed parameters, is considered under influence of directed vibration. The increasing of layer height in the process of balls free motion is shown on the example of vertical vibration will's ball load.*

Вибрационные технологические машины связаны с переработкой различных материалов. Ряд таких конструкций отличаются наличием большого слоя сыпного груза, причем масса технологической нагрузки бывает соизмерима с массой самого грузонесущего органа. Поэтому при динамических расчетах таких машин учет технологической нагрузки в виде присоединенной к исполнительному органу массы может привести к значительным ошибкам.

Исследование динамики вибрационных машин с учетом влияния технологической нагрузки в виде сыпучей среды приводит к рассмотрению взаимодействия системы с распределенными параметрами с системой, имеющей дискретные параметры [1]. Такое представление системы приводит к громоздким результатам даже для линейной системы. При учете нелинейности системы получить результаты в замкнутой форме обычно не удается.

Разрыхление материала эквивалентно такому показателю системы с распределенными параметрами как относительная деформация слоя. Применительно к сыпучему материалу относительная деформация сжатия имеет место при совместном движении

технологической нагрузки и исполнительного органа и деформация растяжения [2] (или разрыхление) материала при их раздельном движении. Графики амплитудных значений перемещения и деформации слоя материала при раздельном движении технологической нагрузки и исполнительного органа показывают [4], что с увеличением высоты слоя материала или частоты колебаний исполнительного органа рост амплитуды колебаний слоев материала с увеличением высоты их положения уменьшается и, соответственно, уменьшается амплитудное значение относительной деформации слоя. Деформация сжатия и разрыхления носит симметричный характер [4], а минимальное значение относительной деформации верхнего слоя материала имеет место при равенстве высоты слоя материала четверти длины волны его деформации (при линейной характеристике восстанавливающей силы технологической нагрузки). При нелинейной жесткой характеристике упругой восстанавливающей силы верхние слои материала имеют повышенную амплитуду колебаний. Таким образом, для нормальной работы вибрационной технологической машины необходимо обеспечить высоту слоя материала на ее исполнительном органе



(обеспечить частоту колебаний исполнительного органа), чтобы по высоте слоя укладывалось не более четверти длины волны его деформации. Из класса машин, подчинявшихся этому требованию выпадают только машины для вибробункеризации и вибровыпуска насыпных грузов [3], в которых высота слоя материала может превышать четверть длины волны деформации.

Изложенное выше, в сочетании с представлением о больших величинах неупругих сопротивлений в технологической нагрузке, позволяет значительно упростить задачу исследования динамики машины, поскольку является определенной и достаточно простой форма движения слоев технологической нагрузки. Это позволяет также с достаточной степенью достоверности приводить систему с распределенными параметрами к системе с дискретными параметрами. Приведению подвергаются такие параметры как масса, упругие и неупругие характеристики, амплитудное значение перемещений. При этом наиболее рационально использовать обычные энергетические методы приведения, поскольку они предусматривают интегрирование функции, что несколько повышает точность конечных результатов. На первом этапе неизменной принимается приведенная величина колеблющейся массы, равная массе всего слоя материала

$$m = \gamma \cdot F \cdot h,$$

где, как и ранее

$\gamma$  - плотность материала в насыпке;

$F$  - площадь слоя материала;

$h$  - высота слоя материала в статическом состоянии.

### Составление и приведение уравнений движения технологической нагрузки к системе с дискретными параметрами

Как уже указывалось, наиболее полно поведение технологической нагрузки можно описать, если представить ее в виде системы с распределенными параметрами. Расчетная схема для определения параметров технологической нагрузки в вертикальной

вибрационной мельнице представлена на рис. 1.

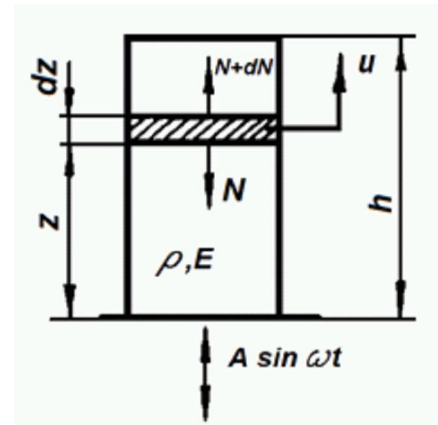


Рис. 1. Расчетная схема для определения параметров движения технологической нагрузки под действием вертикальных колебаний

Как следует из рис. 1, кинетическая энергия элементарного слоя материала толщиной  $dz$ , находящегося на расстоянии  $z$  от начала отсчета

$$dE_1 = \frac{dm}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \gamma F \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dz.$$

Кинетическая энергия всего слоя материала

$$E_1 = \frac{1}{2} \gamma F \int_0^h \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dz. \quad (1)$$

Выражение (2.55) получено в предположении, что  $\frac{\partial u}{\partial z} \ll 1$  поэтому  $\gamma = \text{const}$ .

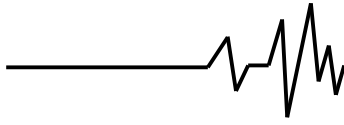
Кинетическая энергия приведенной массы материала

$$E_2 = \frac{1}{2} m \dot{u}_0^2 = \frac{1}{2} \gamma F h \dot{u}_0^2, \quad (2)$$

где  $\dot{u}_0$  - скорость слоя приведения.

Приравнявая выражения (1) и (2), будем иметь, что приведенная скорость

$$\dot{u}_0 = \left[ \frac{1}{h} \int_0^h \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dz \right]^{0.5}. \quad (3)$$



Поскольку рассматривается режим, расположенный далеко до первой формы колебаний слоя материала, а вид исследования является больше качественным, чем количественным, можно принять, что колебания слоя материала происходят при отсутствии неупругих сопротивлений.

Естественно, при определении  $\dot{u}_0$  равно, как и в задаче исследования слоя материала необходимо рассматривать движение по двум этапам отдельно.

На этапе совместного движения материала

$$\dot{u}_0 = \left\{ \frac{1}{h} \int_0^h \left( \frac{A\omega}{\cos \chi_1 h} \cos(h-z) \cos \psi \right)^2 dz \right\}^{0,5},$$

или, после интегрирования и некоторых преобразований

$$\dot{u}_0 = \frac{A\omega}{\cos \chi_1 h} \left( \frac{1}{2} + \frac{\sin 2\chi_1 h}{4\chi_1 h} \right)^{0,5} \cos \psi.$$

Положение слоя материала, скорость перемещения которого равно эквивалентной скорости всей технологической нагрузки определится из условия

$$\dot{u}_z = \dot{u}_0,$$

где  $u_z$  определяется из рассмотрения движения материала как системы с распределенными параметрами [3].

Тогда

$$\frac{z_c}{h} = 1 - \frac{1}{\chi_1 h} \arccos \left( \frac{1}{2} + \frac{\sin 2\chi_1 h}{4\chi_1 h} \right)^{0,5}.$$

Как следует из графика рис. 2, на этапе совместного движения слоя материала и исполнительного органа величина  $z_c/h$  изменяется от 0,5 (при  $\chi_1 h = 0,5\pi$ ) до 0,43 (при средних значениях  $\chi_1 h$ ) При

$$\chi_1 h \rightarrow 0, \quad z_c/h \rightarrow 0.$$

Для большинства практических расчетов можно вполне принять  $z_c/h = 0,5$ , поскольку при этом ошибка в определении кинетической энергии системы не будет превышать 6,5 %.

Для этапа раздельного движения материала и исполнительного органа из выражения (3) с учетом параметров движения

материала как системы с распределенными параметрами [3], найдем

$$\dot{u}_{02} = A\omega \left\{ \frac{1}{h} \int_0^h \left[ \varphi(z) \cos \psi_0 - \frac{\psi - \psi_0}{\Gamma} \right] dz \right\}^{0,5}$$

Здесь  $\psi_0$  – фазный угол, соответствующий отрыву слоя материала;  $\Gamma = A\omega^2/g$  – отношение амплитуды ускорения рабочего органа к ускорению земного притяжения;  $\psi$  – фазный угол движения исполнительного органа.

Учитывая, что скорость движения слоя материала на этапе полета

$$\dot{u}_2 = A\omega \left( \varphi(z) \cos \psi_0 - \frac{\psi - \psi_0}{\Gamma} \right),$$

получим выражение для определения величины координаты эквивалентного слоя материала на этапе полета в виде:

$$\frac{z_c}{h} = 1 - \frac{1}{\chi_1 h} \arccos \left( \frac{1}{2\Gamma} (\psi + \Gamma\beta(\psi, h)) \right) \pm \left( (\psi + \Gamma\beta(\psi, h))^2 - 2(2\cos \chi_1 h - \cos^2 \chi_1 h)^{0,5} \right),$$

где

$$\beta(\psi, h) = \left( \frac{1}{h} \int_0^h \left( \frac{\cos \chi_1 (h-z)}{\cos \chi_1 h} \cos \psi_0 - \frac{\psi - \psi_0}{\Gamma} \right)^2 dz \right)^{0,5}.$$

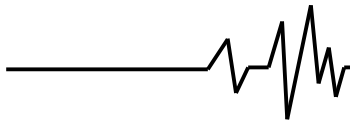
Как видим, величина  $z_c/h$  зависит от координаты слоя материала, т.е. является функцией времени ( фазного угла  $\psi$  ). Фазный угол движения рабочего органа  $\psi$  - координата независимая, а  $\psi_0$  является функцией положения слоя  $z$ , т.е.

$$\psi_0 = \arcsin \frac{\cos \chi_1 h}{\Gamma \cos \chi_1 (h-z)}$$

При интенсивных режимах работы машины (при  $\Gamma > 2,6$ ) можно вполне принять

$$\psi_0 = \frac{\cos \chi_1 h}{\Gamma \cos \chi_1 (h-z)};$$

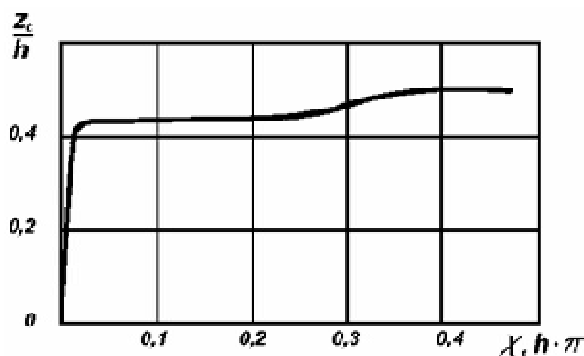
$$\left[ 1 - \frac{\cos^2 \chi_1 h}{\Gamma^2 \cos^2 \chi_1 (h-z)} \right]^{0,5} = 1 - \frac{\cos^2 \chi_1 h}{2\Gamma^2 \cos^2 \chi_1 (h-z)}$$



С учетом этого значение выражения для  $\beta(\psi, h)$  определится как

$$\beta(\psi, h) = \frac{1}{\cos \chi_1 h} \left[ \frac{1}{2} - (2\Gamma^2 - 4\Gamma^2 + 2\Gamma - 2) \frac{\sin 2\chi_1 h}{4\Gamma^2 \chi_1 h} + \frac{2\Gamma + \psi^2 - 1}{\Gamma^2} \cos^2 \chi_1 h + \psi \frac{1 - 2\Gamma}{\Gamma^2 \chi_1 h} \cos^2 \chi_1 h \ln \frac{\cos \chi_1 h}{1 - \sin \chi_1 h} \right]^{-0.5}$$

График зависимости положения эквивалентного слоя материала от упругих характеристик и высоты всего слоя на этапе отрывного движения материала имеет такой же вид, как и для этапа совместного движения, т.е. и в этом случае с ошибкой не более 6,5% можно принимать  $z_{cp} = h/2$ .



**Рис. 2** График изменения  $z_c/h$  на этапе совместного движения технологической нагрузки и исполнительного органа

Зная координаты эквивалентного слоя приведения, можно перейти к определению эквивалентной функции упругой восстанавливающей силы слоя материала. Вид функции и величины ее составных элементов определяются из равенства потенциальных энергий действительной и эквивалентной систем. Принимая во внимание, что система, содержащая технологическую нагрузку в виде сыпного материала является сильно нелинейной именно из-за отрывного движения этой нагрузки, считаем, что внутри каждого этапа система обладает слабой нелинейностью. Это влияет на количественную и не оказывает влияния на качественную картину движения слоя по сравнению с линейной системой, что позволяет, используя принципы, заложенные в основе метода Рэлея или Граммеля [5], производить приведение системы на каждом этапе отдельно.

Поскольку для частного случая исследуемых систем форма движения (форма

упругой деформации) слоя определена, а его высота не больше четверти длины волны деформации, то с достаточной степенью точности конечных результатов можно воспользоваться методом Рэлея и использовать прием, предложенный в [6]. Точка приведенная в этом случае, как следует из изложенного ранее, лежит в центре тяжести слоя ( $z_c = h/2$ ).

Потенциальная энергия системы с дискретными параметрами

$$\Pi = \frac{c_{np} u_c^2}{2}$$

где  $c_{np}$  – приведенная жесткость системы;  $u_c$  – перемещения эквивалентного слоя материала относительно нижней границы:

$$u_c = u|_{z=z_c} - u|_{z=0}$$

Как следует из [4], частота первой формы колебаний слоя материала в период его совместного движения

$$p^2 = 2\pi / \int_0^h m u_1^2 dz,$$

откуда после подстановки  $\Pi$  с учетом того, что

$$p_0^2 = \frac{c_{np}}{m_{np}}$$

получим

$$m_{np} = \int_0^h \bar{m} \left( \frac{u_1}{u_c} \right) dz.$$

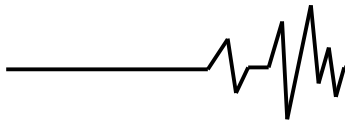
Подставляя значения  $u_1$  и  $u_c$  (при  $z = h/2$ ) [4], пренебрегая первым членом выражения ввиду его малости, будем иметь

$$m_{np} = k_m \gamma F h$$

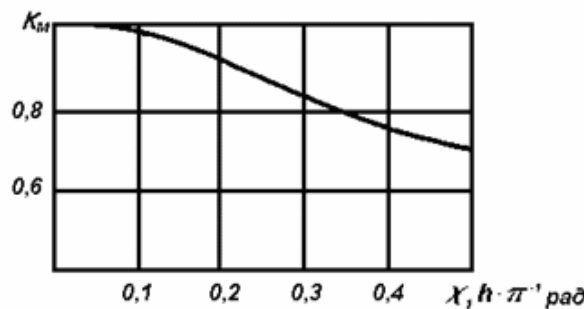
где коэффициент приведения массы материала

$$k_m = \frac{2\chi_1 h + \sin 2\chi_1 h}{4\chi_1 h \cos(\chi_1 h/2)}. \quad (5)$$

Как следует из графика (рис. 3), величина коэффициента приведения массы, при изменении угла  $\chi_1 h$  (высоты слоя материала по отношению к длине волны деформации) от 0



до  $\pi/2$ . , коэффициент приведения массы изменяется от 1 до 0,7. К примеру, для вибрационных мельниц, где толщина слоя стальных шаров в помольных камерах не превышает 0,4 м, а скорость пробега волны деформации при обычных режимах работы ( $A=0,007$  м,  $\omega=100$  с<sup>-1</sup>) находится в пределах  $v=650$  м/с, фазный угол слоя  $\chi_1 h$  не превышает  $0,2\pi$ . Как следует из графика рис. 3 при расчетах этих машин можно вполне принимать  $K_m=1$ .



**Рис. 3** График зависимости коэффициента приведения массы материала от высоты слоя технологической нагрузки (параметра  $\chi_1 h$ )

Большие трудности возникают при определении приведенной жесткости слоя технологической нагрузки. Исследование энергетических показателей движения и деформации слоя как стержня постоянного сечения приводит к сравнению частот собственных колебаний действительной и эквивалентной системы. Однако, при определении низшей частоты  $p_0^2$  системы почти все методы [7] предусматривают, что в стержне полностью укладывается волна деформации, по принятым же нами условиям, высота слоя материала не превышает четверти длины волны деформации.

Согласно общей методике приведения динамических параметров системы [6], они определяются из равенства частот собственных колебаний. Так, частота собственных колебаний приведенной системы

$$p_0^2 = \frac{c_{np}}{m_{np}}, \quad (6)$$

основная же частота собственных колебаний слоя технологической нагрузки может быть определена одним из приближенных методов [5]. Предпочтение отдадим трем из них, которые в наибольшей мере приемлемы для

наших условий. Представим приведенную жесткость в виде

$$c_{np} = \frac{EF}{h} K_c \quad (7)$$

Из выражения (6)  $c_{np} = m_{np} p_0^2$ , и эквивалентный коэффициент приведенной жесткости слоя материала

$$K_c = \frac{h}{EF} m_{np} p_0^2 \quad (8)$$

Квадрат частоты первой формы собственных колебаний системы согласно метода Рэлея [7]

$$p_0^2 = \left[ \int_0^h EF \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} \right)^2 dz \right] / \int_0^h \bar{m} u_1^2 dz,$$

откуда, подставляя  $u_1$ , пренебрегая первым слагаемым в правой части получим

$$p_0^2 = \frac{E}{\gamma h^2} (\chi_1 h)^2 \frac{2\chi_1 h - \sin \chi_1 h}{2\chi_1 h + \sin \chi_1 h} \quad (9)$$

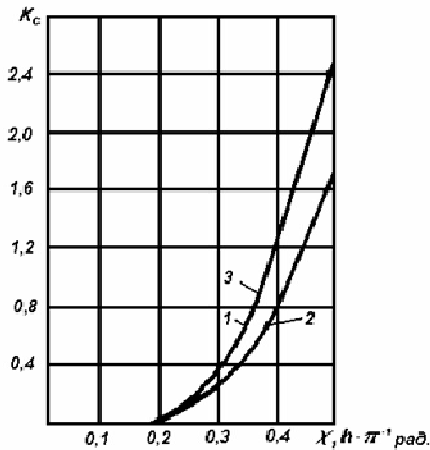
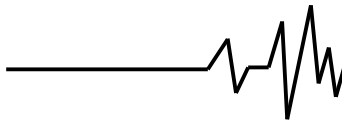
На рис. 4 представлен график зависимости коэффициента жесткости  $K_c$  от фазного угла высоты слоя материала  $\chi_1 h$ , полученный из выражения (8) с учетом (9). Как следует из этих графиков, как для случая  $K_m = 1$  (кривая 1) так и для случая  $K_m$ , определяемого выражением (5) (кривая 2), с ростом  $\chi_1 h$  от 0 до  $\pi/2$  величина  $K_c$  резко увеличивается от нуля до значения 1,74.

На этом же графике кривой 3 представлена зависимость коэффициента жесткости  $K_c$  от фазного угла слоя материала  $\chi_1 h$ , полученная из равенства потенциальных энергий заменяемой и эквивалентной дискретной системы, т.е.

$$\frac{1}{2} c_{np} u_0^2 = \frac{1}{2} \int_0^h EF \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} \right)^2 dz,$$

откуда

$$K_c = \chi_1 h \frac{2\chi_1 h - \sin 2\chi_1 h}{4 \cos(\chi_1 h/2)} \quad (10)$$



**Рис. 4** График зависимости коэффициента приведенной жесткости материала от высоты его слоя найденного по методу Рэлея:  
 1 – при  $K_m = 1$ ;  
 2 – при  $K_m$ , определяемом выражением (5);  
 3 – при  $K_m$ , определяемом по равенству потенциальных энергий

Кривая  $K_c$ , определяемая выражением (5) совпадает с кривой 1, определяемой из уравнения Рэлея при предположении, что  $K_m=1$ .

На рис. 5 представлены графики зависимости коэффициента жесткости  $K_c$  от фазного угла  $\chi_1 h$  высоты слоя материала для случая, когда частота собственных колебаний слоя материала определяется формулой Граммеля [7], т.е.

$$p_0^2 = \left( \int_0^h \bar{m} u_1^2 dz \right) / \int_0^h \frac{N}{EF} dz \quad (11)$$

где

$$\frac{\partial N}{\partial z} = \bar{m} u_1 \text{ или } N = \int_0^h \bar{m} u_1 dz$$

Подставляя значения  $N$ ,  $u_1$  в выражение (11) после преобразований будем иметь зависимость

$$p_0^2 = \frac{E}{\gamma h^2} \chi_1 h \frac{2 \chi_1 h + \sin 2 \chi_1 h}{2 \chi_1 h - \sin 2 \chi_1 h}$$

после подстановки которой в (8) получим:  
 – для случая  $K_m = 1$ :

$$K_c = \chi_1 h \frac{2 \chi_1 h + \sin 2 \chi_1 h}{2 \chi_1 h - \sin 2 \chi_1 h} \quad (12)$$

– для случая, когда  $K_m$  определяется выражением (5)

$$K_c = \frac{\chi_1 h}{4 \cos(\chi_1 h / 2)} \frac{(2 \chi_1 h + \sin 2 \chi_1 h)^2}{2 \chi_1 h - \sin 2 \chi_1 h} \quad (13)$$

Как следует из рис. 5, зависимость  $K_c(\chi_1 h)$  как для случая  $K_m = 1$  (кривая 1) так и для случая, когда величина  $K_m$  определяется выражением (5) (кривая 2), обладает большей стабильностью, чем при использовании формулы Рэлея. Наибольшую стабильность величины  $K_c$  дает формула для определения квадрата частоты собственных колебаний стержня при предположении, что форма его деформации определяется статической нагрузкой под действием силы тяжести, т.е.

$$p_0^2 = g \left[ \left( \int_0^h \bar{m} u dz \right) / \int_0^h \bar{m} u^2 dz \right] \quad (14)$$

где

$$u = \frac{g z}{2 p^2} (2h - z) = \frac{\gamma g z}{2 E} (2h - z). \quad (15)$$

Из выражения (8) с учетом (14) и (15) следует, что в случае  $K_m=1$ ,  $K_c=5/2$ , т.е.  $K_c$  не зависит от  $\chi_1 h$ .

В случае, когда  $K_m$  определяется зависимостью (5)

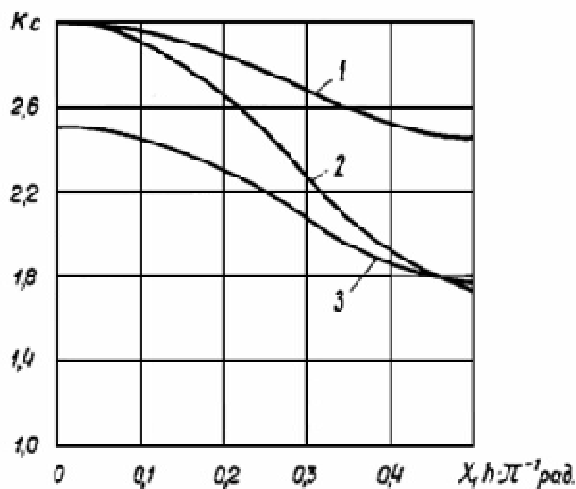
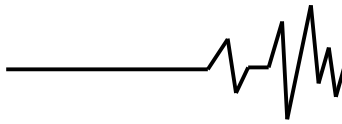
$$K_c = \frac{5}{2} \frac{2 \chi_1 h + \sin 2 \chi_1 h}{4 \chi_1 h \cos(\chi_1 h / 2)}$$

т.е. величина коэффициента жесткости меняется в пределах  $K_c = 2,5-1,77$  по закону, изображенному на рис. 5.

Из изложенного следует, что с ошибкой не более + 25 - 23% можно принять, что

$$c_{np} = \frac{2EF}{h},$$

т.е. приведенная жесткость технологической нагрузки находится из условия, что вся ее масса сосредоточена в центре тяжести, а упругие характеристики определяются высотой слоя, равной половине высоты технологической нагрузки.



**Рис. 5** График зависимости коэффициента приведенной жесткости материала от высоты его слоя:

- 1 – по методу Граммеля при предположении  $K_m = 1$ ;
- 2 – по методу Граммеля при  $K_m$ , определяемом выражением (5);
- 3 – по методу Рэлея при предположении о линейной характеристике деформации слоя

#### Выводы

1. Вибрационные машины технологического назначения с существенным влиянием технологической нагрузки по общности и специфике подхода к решению задач их динамики могут быть объединены в класс вибрационных технологических машин тяжелого типа.

2. Если высота слоя материала меньше четверти длины волны деформации, то технологическую нагрузку из полученных выражений можно привести к системе с дискретными параметрами, обладающей приведенной массой, функцией упругой восстанавливающей силы и неупругих сопротивлений.

3. При проведении инженерных расчетов с ошибкой до 6,5 % коэффициент приведения массы технологической нагрузки можно принимать равным  $K_m = 1$ , а коэффициент приведения эквивалентной жесткости слоя, с ошибкой не более + 25 % - 23 %,  $K_c = 2$ .

#### Литература

1. Потураев В.Н. Проблемы динамики некоторых вибрационных машин тяжелого типа. / В.Н. Потураев, А.Г. Червоненко, В.П. Франчук, А.Ф. Миронюк. – В кн. Динамика машин. - М.: Наука, 1974. – С. 141-150.

2. Овчинников П.Ф. Определение предельных напряжений на разрыв в слое сыпучего материала. / П.Ф. Овчинников, Т.Т. Грибник – В кн.: Вибрационные машины производственного назначения. - М.: Московский дом научно-технической пропаганды. – Т. 2. –1971. – С. 185-188.

3. Потураев В.Н. Вибрационная техника и технологии в энергоемких производствах / В.Н. Потураев, В.П. Франчук, В.П. Надутый. – Днепропетровск: НГА Украины, 2002. – 190 с.

4. Франчук В.П. Учет большого слоя материала вибрационных машин технологического назначения. – Вібрації в техніці та технологіях. Всеукраїнський науково-технічний журнал. – 2011. – №. 2 (62). – С. 48-53.

5. Вибрации в технике: Справочник т.2 (под ред. И.И. Блехмана). Колебания нелинейных механических систем. М.: Машиностроение, 1979. 351 с.

6. Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний. – М.: Высшая школа, 1972. – 416 с.

7. Прочность, устойчивость, колебания. / Под общ. ред. Биргера И.А., Пановко Я.Г. – М.: Машиностроение, 1968. – Т. 3. – 567 с.