

Войтенко А.Е.

Государственное  
высшее учебное  
заведение  
«Национальный  
горный  
университет»

УДК 621.81.061

## РЕЗУЛЬТАТЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ТИПА ФЕРМИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВИБРОСЛОЯ СЫПУЧЕЙ СРЕДЫ

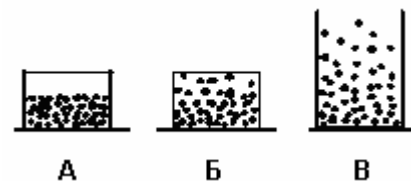
*Обговорюється можливість використання статистичних функцій розподілу типу Фермі для моделювання віброшару сипкого середовища*

*The possibility of statistic function of Fermi type usage, for modeling of vibrating loose layer, is discussed.*

**Постановка задачи.** Основной целью работы является обсуждение применимости модифицированного распределения Ферми для описания виброслоя сыпучей среды, включая достоинства и недостатки такого описания. Классическое статистическое распределение Ферми применяется в теоретической физике в основном для описания систем элементарных частиц, например, электронов. Предмет исследования представлен на рис.1, где схематически изображено распределение частиц виброслоя соответственно в виброкамере и над виброплоскостью. При вибрации слой сыпучей среды перемещается вверх-вниз и разрыхляется (псевдокипящий и псевдооживленный слой) [1]. Поставлена задача описать происходящие процессы, прежде всего зависимость плотности от высоты, с помощью модифицированных функций распределения типа распределения Ферми.

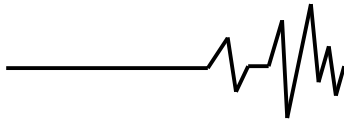
В тексте далее для краткости вместо полного термина «виброслой сыпучей среды» употребляется термин «виброслой». Вместо полного наименования «статистическая функция распределения Ферми» употребляется сокращение «распределение Ферми». В научной литературе кроме термина «распределение Ферми» употребляется также термин «статистика Ферми-Дирака».

Механическая система многих частиц виброслоя сыпучей среды является статистическим ансамблем Гиббса.



**Рис.1. Схематическое распределение частиц сыпучей среды: А – в камере вертикальной вибромельницы без вибрации, Б – в камере вертикальной вибромельницы при вибрации, В – случай распределения частиц в неограниченном полупространстве над виброплоскостью**

Для исследования такой сложной в геометрическом, кинематическом и динамическом смысле механической системы неизбежно применение статистических (вероятностных) методов математического моделирования. В простейшем случае это сводится к использованию средних значений. Наиболее полное описание сложных, состоящих из многих частиц механических систем, начиная от кристаллической решётки твёрдых тел до галактик, достигается при использовании статистических функций распределения [2].

**Классическое распределение Ферми.**

Подробное описание распределения Ферми приведено в монографиях [3,4]. Для наших целей существенно как физическое содержание этой теории, так и её математическое оформление.

Распределение Ферми представлено формулой (1) и описывает степень заполнения квантовых энергетических уровней, т. е. отношение числа частиц, фактически имеющих данную энергию, к максимально возможному (с учётом того или иного правила запрета)

$$W(E) = \frac{n(E)}{n_0} = \frac{1}{C \exp\left(\frac{E}{\theta}\right) + 1} \quad (1)$$

где  $W$  - плотность функции распределения,  $E$  - энергия частицы,  $n_0$  - максимально возможное число частиц на энергетическом уровне,  $n$  - фактическое среднее число частиц на данном энергетическом уровне. Пределы изменения плотности частиц  $0 < n < n_0$ .  $C$  и  $\theta$  - параметры распределения.

В общем виде распределение Ферми, таким образом, является двух параметрическим. Параметр  $C$  нормировочный, в конкретных задачах он определяется числом частиц описываемой системы. Параметр  $\theta$  описывает хаотическую энергию, определяемую температурой, при которой находится система частиц, и равен

$$\theta = kT \quad (2)$$

где  $k$  - постоянная Больцмана,  $T$  - температура.

Часто формулу (1) записывают в эквивалентном виде

$$W(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - \mu}{\theta}\right) + 1} \quad (3)$$

где введена новая постоянная

$$\mu = -\theta \ln C \quad (4)$$

По физическому смыслу  $\mu$  является химическим потенциалом описываемой системы частиц.

Распределение Ферми является математической моделью для статистических ансамблей частиц, обладающих двумя отличительными свойствами:

1) В одном и том же состоянии может находиться ограниченное число частиц, например, для электронов с учётом спина это две частицы (принцип Паули).

2) Описываемая система частиц находится в тепловом равновесии с окружающей средой, имея хаотическую составляющую в энергии частиц.

Формула (3) отражает оба эти существенные свойства описываемой системы частиц.

При малой температуре  $\theta \ll \mu$  правая часть формулы (3) зависит от  $E$  следующим образом. Если  $E < \mu$ , аргумент экспоненты большое отрицательное число и соответственно экспонентой можно пренебречь по сравнению с единицей, так что  $W(E)$  практически постоянно, т.е. все энергетические уровни полностью плотно заполнены. Ситуация резко меняется при условии  $E > \mu$ . Аргумент экспоненты изменяет знак с минуса на плюс, так что экспонента становится большим числом, а вся правая часть равенства (3) стремится к нулю, т.е. частиц в этой области энергии практически нет. При  $E \sim \mu$  вероятность заполнения энергетических уровней частицами испытывает резкий скачок от максимального значения почти до нуля.

При большой температуре  $\theta \rightarrow \infty$  частицы переходят с низших энергетических уровней на более высокие, скачок в заполнении уровней энергии размывается и функция  $W(E)$  становится более гладкой.

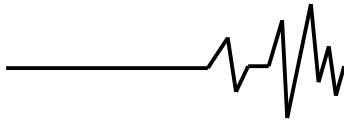
Отметим, что распределение Ферми не зависит от времени, т.е. относится к классу стационарных функций распределения.

**Применение распределения Ферми к виброслою макроскопических частиц.**

Имеются две статьи автора, в которых сделана (впервые, по-видимому) попытка применить статистическое распределение типа распределения Ферми в качестве математической модели виброслоя макроскопических частиц сыпучей среды [5,6]. Сыпучая среда предполагается идеальной, коэффициент внутреннего трения равен нулю, вязкость виброоживленного и виброкипящих слоёв отсутствует. Коэффициент восстановления при ударе частиц равен единице.

Расширить область применения распределения Ферми позволяют две его отмеченные выше особенности, свойственные как статистическим ансамблям электронов, так и частицам виброслоя сыпучей среды.

Во-первых, это наличие правила запрета, ограничивающего число частиц на одном и том же энергетическом уровне. Для электронов это



принцип Паули, разрешающий находится в одном и том же квантовом состоянии только двум электронам (с различными спинами). Для статистического ансамбля частиц сыпучей среды также имеется принцип запрета, который в этом случае имеет чисто геометрическую природу – в одном и том же месте пространства не может находиться одновременно две частицы.

Во-вторых, общим для электронов и частиц виброслоя является наличие случайного, стохастического разброса энергий частиц. Для электронов это следствие хаотичности теплового движения, для частиц виброслоя это следствие множественных столкновений, что подробнее обсуждается далее.

При наличии двух указанных базовых сходных качеств статистических ансамблей электронов и частиц виброслоя, у этих систем частиц имеются и существенные различия. Поэтому для моделирования виброслоя сыпучей среды необходима модификация и адаптация классического распределения Ферми.

Далее расчёты ведутся на единицу площади виброплоскости.

Безразмерное отношение заполнения квантового уровня заменяется на безразмерную относительную плотность сыпучей среды

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{n}{n_0} \quad (5)$$

где  $\rho_0$  - начальная (до вибрации) насыпная плотность сыпучей среды,

$\rho$  - средняя плотность, создаваемая частицами виброслоя на данной высоте при вибрации.

Потенциальная энергия частицы виброслоя в поле гравитации равна

$$E = mgx \quad (6)$$

где  $m$  – масса частицы,

$g = 9,8 \text{ м/с}^2$  – постоянная земного тяготения,

$x$  – вертикальная координата ( $x = 0$  на виброплоскости).

Подставив (5) и (6) в (3) получаем следующее распределение

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{e^{\frac{mgx}{\theta} + \frac{\mu}{\theta} + 1}} \quad (5)$$

Постоянную  $\mu$  определяем из условия нормировки по массе

$$\int_0^H \rho dx = \int_0^H \frac{\rho_0}{e^{\frac{mgx}{\theta} + \frac{\mu}{\theta} + 1}} dx = \rho_0 h \quad (6)$$

где  $h$  - начальная толщина слоя сыпучей среды (до вибрации),

$H$  – высота виброкамеры.

Второй интеграл в (6) заменой

$$\frac{mgx}{\theta} + \frac{\mu}{\theta} = y \quad (7)$$

сводится к табличному

$$\int \frac{1}{e^y + 1} dy = y - \ln(e^y + 1) \quad (8)$$

Используя формулы (6)-(8), получаем

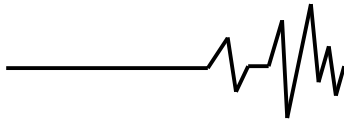
$$\frac{\mu}{\theta} = \ln \left( \frac{e^{\frac{mgH}{\theta}}}{e^{\frac{mgh}{\theta}} - 1} - 1 \right) - \frac{mgH}{\theta} \quad (9)$$

Подставив (9) в (3), получаем

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{\left[ \frac{1 - \exp\left(-\frac{mg(H-h)}{\theta}\right)}{\exp\left(\frac{mgh}{\theta}\right) - 1} \right] \exp\left(\frac{mgx}{\theta}\right) + 1} \quad (10)$$

Дальнейшая модификация стационарного классического распределения Ферми (3) состоит в получении нестационарного, т.е. зависящего от времени распределения. Для получения нестационарного распределения частиц вводим в рассмотрение движущуюся систему координат, жёстко связанную с виброкамерой (система координат виброкамеры), в которой проводится всё дальнейшее исследование..

Предполагаем, что в лабораторной системе координат вертикальное перемещение  $z$  виброкамеры зависит от времени  $t$  следующим образом



$$z = A \sin(\omega t) \quad (11)$$

где  $A$  – амплитуда вибрации,  
 $\omega$  – круговая частота вибрации.

Ускорение виброкамеры в лабораторной системе координат

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t) \quad (12)$$

При переходе в неинерциальную систему координат виброкамеры на частицы виброслоя начинают действовать так называемые силы инерции, которые соответствуют полю ускорений

$$g_1 = A\omega^2 \sin(\omega t) \quad (13)$$

В системе координат виброкамеры, естественно, продолжает действовать и ускорение земного притяжения, так что полное ускорение, действующее на частицы виброслоя в системе координат виброкамеры

$$g + g_1 = g + A\omega^2 \sin(\omega t) \quad (14)$$

Произведя замену в формуле (10) ускорения земного притяжения  $g$  на полное ускорение (14) в системе координат виброкамеры, получаем следующую функцию распределения плотности виброслоя в системе координат виброкамеры

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{\left[ \frac{\exp\left(\frac{mH(g + A\omega^2 \sin(\omega t))}{\theta}\right) - 1}{\exp\left(\frac{mh(g + A\omega^2 \sin(\omega t))}{\theta}\right) - 1} \right] \exp\left(\frac{m(x-H)(g + A\omega^2 \sin(\omega t))}{\theta}\right) + 1} \quad (15)$$

При переходе от формулы (10) к формуле (15) принято радикальное упрощающее предположение, что в каждый момент времени мгновенно устанавливается стационарное состояние, описываемое формулой (10), так что процесс изменения плотности виброслоя происходит квазистационарно.

В выражении (15) остаётся неопределённым параметр стохастичности  $\theta$ . Столкновения частиц приводят к стохатизации движения. Даже в простом случае нелобового столкновения шаров идеальной формы после удара вектор скорости изменяется по величине и появляются составляющие скорости, перпендикулярные к первоначальному направлению. Если до удара для описания движения шара была достаточна одна координата, то после удара движение становится трёхмерным, так что для описания ситуации после удара необходимо уже трёхмерное пространство координат и трёхмерное пространство скоростей. Эффект появления после удара перпендикулярных составляющих скорости к первоначальному её вектору наглядно проявляется в бильярдной игре.

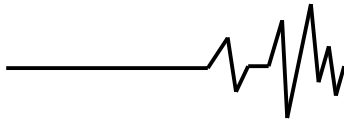
В случае многих последовательных соударений частиц сложной формы дальнейшее после удара движение

становится хаотическим, в том смысле, что более приемлемыми для его описания становятся статистические, а не динамические модели. У частиц сложной формы удар возбуждает, кроме поступательных, также вращательные степени свободы. Если плотный сгусток дроби после выстрела из ружья отражается от брони, то качественно представить картину после отражения легко (хаос!), но точно количественно описать движение дробинок практически нереально. При этом движение каждой частицы описывается динамическими уравнениями. Сходная ситуация при ударе виброслоя частиц о крышку виброкамеры или при ударе виброслоя дно виброкамеры.

В силу приведенных умозрительных соображений кроме доминирующего направленного движения виброслоя вверх-вниз следует ожидать также стохастическое движение частиц в перпендикулярном направлении и стохастическое же их вращение вокруг случайно направленных осей.

К выводу о перемешивании частиц приводят экспериментальные наблюдения движения частиц, находящихся в виброслое таких же, но окрашенных в другой цвет частиц [1].

Свойство стохатизации сложных динамических систем в механике известно и



довольно подробно изучено [7].

Определить теоретически точное численное значение параметра стохастичности  $\theta$  для нашей механической системы на данном этапе исследований не представляется возможным. Можно провести приближенную оценку этого параметра на основе физических соображений и теории размерности. Поскольку показатели экспонент в выражении (15) должны быть безразмерными, то  $\theta$  имеет размерность энергии. Из параметров вибрации и частицы (амплитуда, частота и масса) можно составить единственную комбинацию с размерностью энергии  $m A^2 \omega^2$ , это же выражение имеет порядок удвоенной максимальной кинетической энергии вертикального движения частицы.

Поскольку энергия хаотического движения частицы виброслоя меньше её упорядоченного движения вверх-вниз, то полагаем

$$\theta = \alpha m A^2 \omega^2 \quad (16)$$

где  $\alpha$  – безразмерный коэффициент, находящийся в пределах  $0 < \alpha < 1$ . По физическому смыслу  $\alpha$  – отношение средней хаотической кинетической энергии частицы к её максимальной кинетической энергии вертикального движения.

Подставив (16) в (15) и сократив на  $m$  числитель и знаменатель в аргументах экспонент, получаем функцию распределения плотности виброслоя в таком виде

$$\frac{\rho(x,t)}{\rho_0} = \frac{1}{\left[ \frac{\exp\left(\frac{H(g + A\omega^2 \sin(\omega t))}{\alpha A^2 \omega^2}\right) - 1}{\exp\left(\frac{h(g + A\omega^2 \sin(\omega t))}{\alpha A^2 \omega^2}\right) - 1} - 1 \right] \exp\left(\frac{(x-H)(g + A\omega^2 \sin(\omega t))}{\alpha A^2 \omega^2}\right) + 1} \quad (17)$$

Распределение частиц виброслоя интегрально характеризуется положением центра масс этой сыпучей среды. Используя общую формулу для вычисления координат

центра масс системы твёрдых тел и выражение (17), получаем координату центра масс виброслоя  $X(t)$

$$X(t) = \frac{1}{h} \int_0^H \frac{x dx}{\left[ \frac{\exp\left(\frac{H(g + A\omega^2 \sin(\omega t))}{\alpha A^2 \omega^2}\right) - 1}{\exp\left(\frac{h(g + A\omega^2 \sin(\omega t))}{\alpha A^2 \omega^2}\right) - 1} - 1 \right] \exp\left(\frac{(x-H)(g + A\omega^2 \sin(\omega t))}{\alpha A^2 \omega^2}\right) + 1} \quad (18)$$

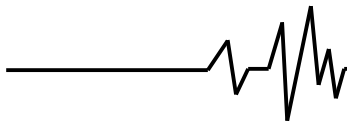
Распределение плотности  $\rho_1(x,t)$  над полуплоскостью получаем, устремляя в выражении (17) высоту виброкамеры в бесконечность  $H \rightarrow \infty$

Координата центра масс в случае полуплоскости определяется формулой

$$\frac{\rho_1(x,t)}{\rho_0} = \frac{1}{\left[ \frac{\exp\left(\frac{x(g + A\omega^2 \sin(\omega t))}{\alpha A^2 \omega^2}\right)}{\exp\left(\frac{h(g + A\omega^2 \sin(\omega t))}{\alpha A^2 \omega^2}\right) - 1} + 1 \right]} \quad (19)$$

$$X_1(t) = \frac{1}{h} \int_0^\infty \frac{x dx}{\left[ \frac{\exp\left(\frac{x(g + A\omega^2 \sin(\omega t))}{\alpha A^2 \omega^2}\right)}{\exp\left(\frac{h(g + A\omega^2 \sin(\omega t))}{\alpha A^2 \omega^2}\right) - 1} + 1 \right]} \quad (20)$$

Функция распределения плотности (17)



позволяет определить поле скоростей  $u(x,t)$  сыпучей среды, движущейся внутри виброкамеры, используя закон сохранения массы в дифференциальной форме

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial [\rho(x,t)u(x,t)]}{\partial x} = 0 \quad (21)$$

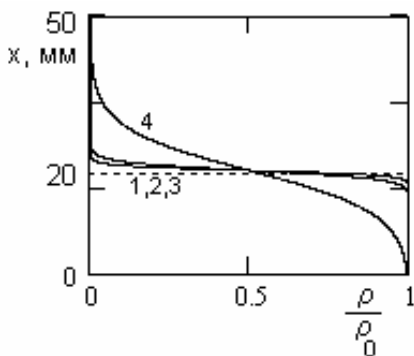
Рассматривая выражение (21) как уравнение в частных производных для  $u(x,t)$ , можно определить эту функцию, поскольку  $\rho(x,t)$  известно и задано формулой (17).

Уравнение (21) позволяет определить также удельный поток массы  $\rho(x,t)u(x,t)$  в зависимости от вертикальной координаты и времени.

**Иллюстративный пример расчёта.**

На нижеследующих графиках приведены результаты расчётов по приведенным выше формулам.

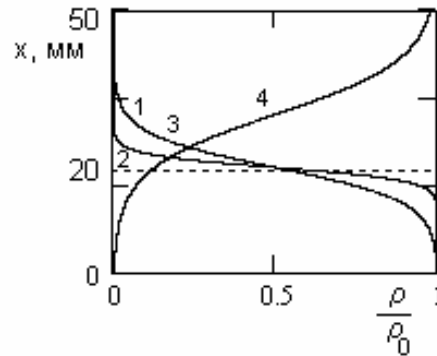
На рис.2 и 3 приведены зависимости относительной плотности (горизонтальная ось) от вертикальной координаты (вертикальная ось) для различных фаз колебаний  $\psi = \omega t$ , т.е. для различных моментов времени. Условия расчёта: высота виброкамеры  $H = 50$  мм, начальная высота слоя сыпучей среды (без вибрации)  $h = 20$  мм, частота вибрации  $f = 10$  Гц ( $\omega = 2\pi f$ ).



**Рис. 2. По горизонтальной оси отложена относительная плотность, по вертикальной оси – расстояние от дна виброкамеры. Интенсивность вибрации  $\Gamma = 0,81$ . Кривые 1,2,3,4 соответствуют фазам колебаний  $\psi = 0^\circ; 90^\circ; 180^\circ; 270^\circ$ . Две кривые визуально совпали**

Рис. 2 и 3 отличаются амплитудой вибрации  $A_1 = 2$  мм и  $A_2 = 4$  мм и соответственно интенсивностью вибрации  $\Gamma_1 = A_1 \omega^2 / g = 0,81$ ;  $\Gamma_2 = A_2 \omega^2 / g = 1,62$ . Толщина слоя сыпучей среды до вибрации отмечена на рисунках горизонтальным

пунктиром.



**Рис. 3. По горизонтальной оси отложена относительная плотность, по вертикальной оси – расстояние от дна виброкамеры. Интенсивность вибрации  $\Gamma = 0,81$ . Кривые 1,2,3,4 соответствуют фазам колебаний  $\psi = 0^\circ; 90^\circ; 180^\circ; 270^\circ$ . Две кривые визуально совпали.**

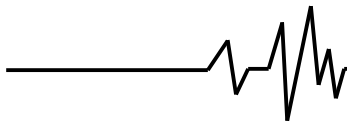
На рис. 2 представлены результаты расчёта для случая, когда амплитуда сил инерции меньше силы земного притяжения ( $\Gamma < 1$ ). Так как силы инерции с течением времени меняют знак, то суммарная сила пульсирует, но всегда направлена вниз. В соответствии с этим виброшлак всё время прижат ко дну виброкамеры, хотя и с различной силой. Поскольку имеется хаотическая составляющая движения частиц, то виброшлак постоянно разрыхлён, но степень разрыхления меняется, достигая максимума в момент, когда сила минимальна.

На рис.3 представлены результаты расчёта для случая, когда амплитуда сил инерции больше силы земного притяжения ( $\Gamma > 1$ ). В этих условиях суммарная сила не просто пульсирует, но временами меняет знак, т.е. направлена вверх. В эти моменты виброшлак отрывается от дна виброкамеры и прижимается в её крышке, как это показано на рис.3 (кривая 4).

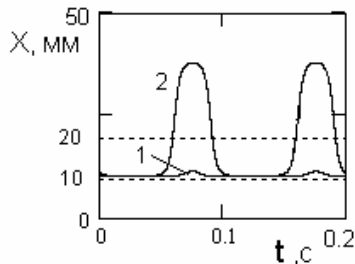
В любой фазе движения границы виброшлак размываются вследствие наличия хаотической части движения его частиц.

На рис. 4. приведены результаты расчета движения центра масс виброшлак для тех же двух условий вибрации, для которых было рассчитано распределение плотности, представленное на рис.2 и 3.

Центр масс приподнимается вверх, когда сила инерции направлена вверх. Подъем



незначителен (кривая 1), если амплитуда сил инерции не превышает силы земного тяготения. Смещение центра тяжести вверх в этом случае происходит за счёт хаотической энергии частиц. Кривая 1 на рис.4 соответствует кривой 4 на рис.2. Подъём центра масс максимален (кривая 2), если сила инерции направлена вверх и превышает силу земного тяготения. Кривая 2 на рис.4 соответствует кривой 4 на рис.3.



**Рис. 4. Зависимость координаты центра масс виброслоя от времени. Кривые 1 и 2 – соответствуют  $\Gamma = 0,81$  и  $\Gamma = 1,62$ . Две пунктирные линии – уровень верхней поверхности и координата центра масс сыпучей среды до вибрации.**

### Выводы

1. Основные достоинства модифицированных статистических функций распределения Ферми, применяемых для моделирования виброслоя:

1.1 Определяется плотность виброслоя в зависимости от высоты, времени и параметров вибрации.

1.2 При любых движениях сыпучей среды виброслоя сохраняется общая масса сыпучей среды и число частиц.

1.3 Данная модель описывает кроме одинакового для всех частиц движения вверх-вниз также стохастическое движение частиц (случайный разброс векторов скоростей вокруг среднего значения).

1.4 В условиях вибрации плотность виброслоя плавно изменяется от максимальной до минимальной.

1.5 При использовании распределений типа распределения Ферми появляется возможность определить поле скоростей и поток массы в зависимости от времени.

2 Основные недостатки обсуждаемой математической модели виброслоя:

2.1. Не точное численное определение параметра стохастичности ни расчётного, ни экспериментального. Оценены только границы области его возможных значений. При дальнейших исследованиях необходимо исследовать возможную зависимость параметра стохастичности от плотности виброслоя в данной точке и от параметров вибрации.

2.2 Предполагается мгновенное установление стационарного распределения при изменении сил инерции. Это предположение приводит к появлению в расчётах при интенсивных режимах вибрации ( $\Gamma = A\omega^2/g > 1$ ) неоправданно больших скоростей вертикального движения частиц виброслоя, что делает теорию непригодной в этих режимах для расчёта в высоких виброкамерах и в полупространстве.

2.3 Не учтены внутреннее трение сыпучей среды, вязкость виброслоя, неидеальность ударного взаимодействия частиц.

3 Изложенные результаты применения функций распределения типа распределения Ферми иллюстрируют новые возможности описания виброслоев с применением функций такого типа. Получены, однако, только первые результаты на этом пути. Требуется дальнейшее совершенствование теории и сравнение её результатов с результатами экспериментов.

### Литература

1. Членов В.А., Михайлов Н.В. Виброкипящий слой. – М, Наука, 1972. – 341 с.
2. Власов А.А. Статистические функции распределения. – М., Наука, 1966, - 356 с.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. М., Наука, 1964. - 567 с.
4. Терлецкий Я.П. Статистическая физика. М. Высшая школа. 1966. - 235с.
5. Войтенко А.Е. Распределение плотности по высоте в виброслое сыпучей среды и статистика Ферми-Дирака. – Вібрації в техніці та технологіях. – 2007. – № 2 (47). – С 70-73.
6. Войтенко А.Е., Статистическая модель движения сыпучей среды в вертикальной вибромельнице. – Форум гірників - 2011. Матеріали міжнародної конференції 12-15 жовтня 2011 р. Дніпропетровськ. С. 229-233.
7. Заславский Г. М., Стохастичность динамических систем. М., Наука, 1984. - 271 с.