

Остапенко В.А.

Днепропетровский
национальный
университет»
имени О. Гончара

УДК 534.0

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СИНХРОННОГО И СИНФАЗНОГО ВРАЩЕНИЯ ВАЛКОВ И ВИБРАТОРОВ ВАЛКОВЫХ КЛАССИФИКАТОРОВ ВИБРАЦИОННОГО ТИПА

Одержані необхідні і достатні умови синхронного і синфазного обертання валків і вібраторів валкових класифікаторів вібраційного типу

It is obtained necessary and sufficient conditions for synchronous and in-phase rotation of rollers and vibrators of vibration classifiers.

Введение. Валковые классификаторы в последние годы находят все большее применение в горной, металлургической и строительной промышленности, так как они обеспечивают высокую эффективность классификации материалов [3-4].

С точки зрения обеспечения качественной работы валковых классификаторов вибрационного типа важно обеспечить постоянство зазора между соседними валками. Так как валки не имеют специальных приводов и вращаются исключительно под действием инерционных сил, это значит, что необходимо получить условия, при выполнении которых валки будут вращаться синхронно и синфазно. При нарушении этих условий в процессе вращения зазор между соседними валками будет изменяться. А это приведет к тому, что при различных взаимных расположениях соседних валков просеиваться между ними будут фракции различной крупности.

Постановка проблемы. Расчетная схема классификатора в процессе работы представлена на рис. 1.

На жесткой раме неподвижно закреплены оси валков. На эти оси с зазором надеты цилиндрические полые валки. Центрами осей валков на схеме являются точки O_s . Всего валков n , то есть $s = 1, 2, \dots, n$. По обоим концам рамы установлены два

дебалансных вибратора, приводимых во вращательное движение асинхронными двигателями. Двигатели вибраторов вращаются в одинаковом направлении против часовой стрелки. Предполагается, что парциальные угловые скорости вращения вибраторов близки к значению ω . Центры вращения вибраторов на схеме обозначены также O_s , $s = n+1, n+2$.

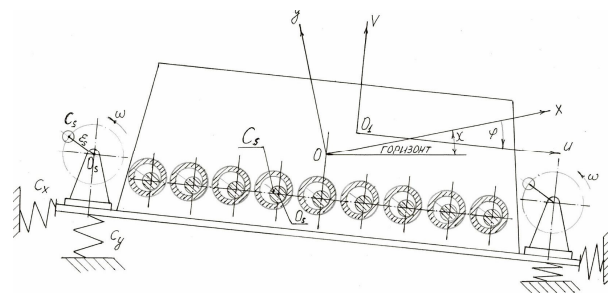
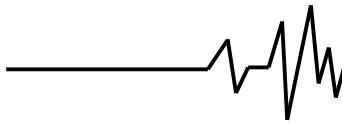


Рис. 1. Схема классификатора в процессе совершения колебаний.

Вводятся две системы координат: неподвижная, xOy , и подвижная, uO_1v , жестко связанная с рамой классификатора. Начало координат расположено в центре масс классификатора в целом в его статическом состоянии. В статическом состоянии обе системы координат совпадают. Начало координат подвижной системы – точка O_1 –



всегда расположена в центре масс классификатора в целом. Масса классификатора в целом обозначена через M . Центр масс жесткой части классификатора расположен в точке C , его координаты в статическом состоянии $x_c = a$; $y_c = b$. Массы валков и дебалансов вибраторов обозначены через m_s , $s = 1, 2, \dots, n+2$. Поэтому масса жесткой части классификатора

$$M_1 = M - \sum_{s=1}^{n+2} m_s. \quad (1)$$

Перемещение точки O_1 относительно неподвижной системы координат описывается функциями $x(t)$ и $y(t)$. Поворот подвижной системы uO_1v относительно неподвижной xOy описывается углом $\varphi(t)$, отсчитываемым от оси x по часовой стрелке. В статическом состоянии продольная ось рамы наклонена к горизонту под углом χ .

Уравнения движения системы.

Уравнения движения системы будем получать с помощью уравнений Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_s} - \frac{\partial L}{\partial z_s} = Q_{zs}, \quad (2)$$

где z_s – обобщенные координаты; $L = T - \Pi$ – функция Лагранжа системы, T , Π – кинетическая и потенциальная энергии системы соответственно; Q_{zs} – обобщенные силы (моменты), соответствующие обобщенной координате z_s .

Кинетическая энергия массы M_1 определяется по формуле

$$T_{M1} = \frac{M_1}{2} (\dot{x}_{oc}^2 + \dot{y}_{oc}^2) + \frac{1}{2} J_c \dot{\varphi}^2, \quad (3)$$

где $x_c(t)$, $y_c(t)$ – уравнения движения центра масс жесткой части классификатора – точки C ; J_c – момент инерции жесткой части классификатора относительно точки C ; φ – угол поворота рамы, отсчитываемый относительно оси x неподвижной системы координат xOy по часовой стрелке.

Так как центры вращения вибраторов и центры осей валков – точки O_s – жестко связаны с рамой классификатора, уравнения их движения при малых значениях угла φ будут иметь вид

$$x_{O_s} = x_s + u_{O_s} + v_{O_s} \varphi; \quad y_{O_s} = y_s + v_{O_s} - u_{O_s} \varphi, \quad (4)$$

где (x_s, y_s) (u_{O_s}, v_{O_s}) – координаты точки O_s относительно систем xOy и uO_1v соответственно, $s = 1, 2, \dots, n+2$.

Так как координаты точки C относительно подвижной системы координат uO_1v постоянны и суть (a, b) , из (4) следует, что

$$x_{oc} = x_c + a + b\varphi; \quad y_{oc} = y_c + b - a\varphi, \quad (5)$$

и, следовательно,

$$T_{M1} = \frac{M_1}{2} [(\dot{x}_c + b\dot{\varphi})^2 + (\dot{y}_c - a\dot{\varphi})^2] + \frac{1}{2} J_c \dot{\varphi}^2. \quad (6)$$

Уравнения движения центра масс дебаланса – точки C_s – с учетом (4) будут иметь вид

$$x_{C_s} = x_s + u_{O_s} + v_{O_s} \varphi + \epsilon_s \cos \varphi_s; \\ y_{C_s} = y_s + v_{O_s} - u_{O_s} \varphi + \epsilon_s \sin \varphi_s, \quad s = n+1, n+2, \quad (7)$$

где ϵ_s – радиус вращения центра масс дебаланса, φ_s – угол поворота валка относительно оси x .

Кинетическая энергия каждого из двух дебалансов вибраторов будет равна

$$T_{ds} = \frac{1}{2} [m_s (\dot{x}_{cs}^2 + \dot{y}_{cs}^2) + J_{cs} \dot{\varphi}_s^2], \quad s = n+1, n+2, \quad (8)$$

где m_s – масса дебаланса; J_{cs} – момент инерции дебаланса относительно точки C_s .

Как показано в [1,2], движение любой точки жесткой части вибратора, в том числе и центра оси валка – точки O_s – происходит по окружности или эллипсу с центром в некоторой точке Ω . Здесь рассматривается вариант движения точки O_s по окружности с центром в точке Ω и радиуса R , изображенный на рис. 2. При таком движении под действием центробежных и кориолисовых сил валок прижимается к оси и осуществляет перекачивание по ней с некоторой угловой скоростью ω_1 [2]. При этом, как показано в [1,2], для преодоления момента, создаваемого весом валка и лежащего на валке материала, относительно точки контакта K валка с его осью, необходимо происходит отставание в перекачивании валка на некоторый угол $\alpha_s(t)$. Поэтому угловая скорость перекачивания валка относительно точки O_s будет равна

$$\omega_{1s} = \dot{\psi}_s - \dot{\alpha}_s, \quad s = 1, n. \quad (9)$$

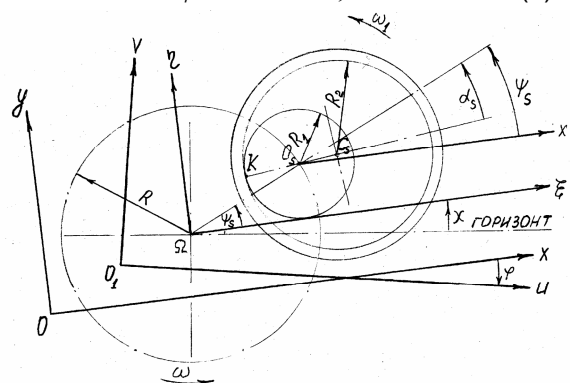
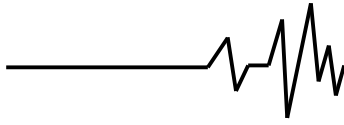


Рис. 2. Схема перекачивания валка.

При этом угол поворота ψ_s всех точек рамы одинаков и в стационарном режиме равен $\psi_s(t) = \psi(t) = \omega t$. Таким образом, кинетическая энергия каждого из n валков будет равна



$$T_{Bs} = \frac{1}{2} [m_s (\dot{x}_{Cs}^2 + \dot{y}_{Cs}^2) + J_{Cs} (\omega - \dot{\alpha}_s)^2], \quad s = \overline{1, n}, \quad (10)$$

где m_s – масса валка; J_{Cs} – момент инерции валка относительно точки C_s ; x_{Cs} , y_{Cs} – координаты точки C_s относительно системы координат xOy , определяемые из равенств

$$x_{Cs} = x_{Os} + X_s; \quad y_{Cs} = y_{Os} + Y_s, \quad (11)$$

причем x_{Os} и y_{Os} определяются из формул (4), а перемещения точки C_s относительно точки O_s равны

$$x_s = \varepsilon_s \cos(\psi - \alpha_s); \quad y_s = \varepsilon_s \sin(\psi - \alpha_s), \quad (12)$$

где ε_s – расстояние между точками C_s и O_s . Учтя, что моменты масс системы относительно точки O_1 равны нулю, так как начало координат подвижной системы uO_1v – точка O_1 – в любом положении системы всегда находится в центре масс этой системы, и обозначив постоянную величину

$$M_1(a^2 + b^2) + J_C + \sum_{s=1}^{n+2} m_s(uos^2 + vos^2) = I, \quad (13)$$

получим, что выражение для полной кинетической энергии системы может быть записано в следующем виде:

$$\begin{aligned} T = & \frac{M}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{I}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n+2} (m_s \varepsilon_s^2 (\dot{\psi} - \dot{\alpha}_s)^2 + J_{Cs} \dot{\alpha}_s^2) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{s=n+1}^{n+2} (m_s \varepsilon_s^2 \dot{\varphi}_s^2 + J_{Cs} \dot{\varphi}_s^2) - \dot{x} \left[\sum_{s=1}^n m_s \varepsilon_s (\dot{\psi} - \dot{\alpha}_s) \sin(\psi - \alpha_s) + \right. \\ & + \sum_{s=n+1}^{n+2} m_s \varepsilon_s \dot{\varphi}_s \sin \varphi_s \left. \right] + \dot{y} \left[\sum_{s=1}^n m_s \varepsilon_s (\dot{\psi} - \dot{\alpha}_s) \cos(\psi - \alpha_s) + \right. \\ & + \sum_{s=n+1}^{n+2} m_s \varepsilon_s \dot{\varphi}_s \cos \varphi_s \left. \right] - \\ & - \dot{\varphi} \left[\sum_{s=1}^n m_s \varepsilon_s (\dot{\psi} - \dot{\alpha}_s) (uos \cos(\psi - \alpha_s) + vos \sin(\psi - \alpha_s)) + \right. \\ & + \sum_{s=n+1}^{n+2} m_s \varepsilon_s \dot{\varphi}_s (uos \cos \varphi_s + vos \sin \varphi_s) \left. \right] + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n J_{Cs} (\omega^2 - 2\omega \dot{\alpha}_s). \end{aligned}$$

Потенциальная энергия упругих элементов подвески классификатора определяется выражением

$$P_e = \frac{1}{2} (c_x x^2 + c_y y^2 + c_\varphi \varphi^2) + c_{xy} xy + c_{x\varphi} x\varphi + c_{y\varphi} y\varphi,$$

где с с индексами – соответствующие жесткости упругих элементов подвески.

Самая низкая по значению потенциальная энергия валка будет достигнута в таком положении, в котором центр тяжести валка – точка C_s – опустится вниз и разместится на вертикальной прямой $O_s C_s$. Поэтому относительно этого наименьшего состояния потенциальная энергия валка будет равна

$$P_{Bs} = m_s g \varepsilon_s (1 + \sin(\psi - \alpha_s + \chi)), \quad (14)$$

где $s = 1, 2, \dots, n$, g – ускорение силы тяжести.

Аналогично заключаем, что потенциальная энергия дебаланса относительно самого низкого его положения будет равна ($s = n+1, n+2$)

$$P_{ds} = m_s g \varepsilon_s (1 + \sin(\varphi_s + \chi)), \quad (15)$$

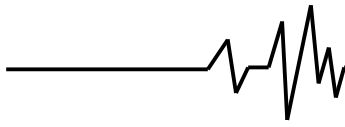
Таким образом, полная потенциальная энергия системы будет равна

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} (c_x x^2 + c_y y^2 + c_\varphi \varphi^2) + c_{xy} xy + c_{x\varphi} x\varphi + \\ & + c_{y\varphi} y\varphi + \sum_{s=1}^n m_s g \varepsilon_s (1 + \sin(\psi - \alpha_s + \chi)) + \\ & + \sum_{s=n+1}^{n+2} m_s g \varepsilon_s (1 + \sin(\varphi_s + \chi)). \end{aligned} \quad (16)$$

Учитывая полученные выражения для кинетической и потенциальной энергий, за обобщенные координаты естественно принять координаты $x(t)$, $y(t)$ координаты начала координат подвижной системы – точки O_1 ; угол $\varphi(t)$ поворота подвижной системы координат относительно неподвижной системы; углы $\alpha_s(t)$, $s = 1, 2, \dots, n$, отставания вращения валков от вращения рамы; углы $\varphi_s(t)$, $s = n+1, n+2$, поворота дебалансов вибраторов. Поэтому на основании уравнений Лагранжа 2-го рода (2) и проделанных вычислений получаем следующие уравнения движения системы:

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + \sum_{s=1}^n m_s \varepsilon_s [\ddot{\alpha}_s \sin(\psi - \alpha_s) - (\dot{\psi} - \dot{\alpha}_s)^2 \cos(\psi - \alpha_s)] - \\ - \sum_{s=n+1}^{n+2} m_s \varepsilon_s (\ddot{\varphi}_s \sin \varphi_s + \dot{\varphi}_s^2 \cos \varphi_s) + c_x x + c_{xy} y + c_{x\varphi} \varphi = Q_x; \\ M\ddot{y} - \sum_{s=1}^n m_s \varepsilon_s [\ddot{\alpha}_s \cos(\psi - \alpha_s) + (\dot{\psi} - \dot{\alpha}_s)^2 \sin(\psi - \alpha_s)] + \\ + \sum_{s=n+1}^{n+2} m_s \varepsilon_s (\ddot{\varphi}_s \cos \varphi_s - \dot{\varphi}_s^2 \sin \varphi_s) + c_y y + c_{xy} x + c_{y\varphi} \varphi = Q_y; \\ I\ddot{\varphi} + \sum_{s=1}^n m_s \varepsilon_s r_s^2 [\ddot{\alpha}_s \cos(\psi - \alpha_s - \delta_s) + (\dot{\psi} - \dot{\alpha}_s)^2 \times \\ \times \sin(\psi - \alpha_s - \delta_s)] - \sum_{s=n+1}^{n+2} m_s \varepsilon_s r_s^2 (\ddot{\varphi}_s \cos(\varphi_s - \delta_s) - \\ - \dot{\varphi}_s^2 \sin(\varphi_s - \delta_s)) + c_\varphi \varphi + c_{x\varphi} x + c_{y\varphi} y = Q_\varphi; \\ (m_s \varepsilon_s^2 + J_{Cs}) \ddot{\alpha}_s + \ddot{x} m_s \varepsilon_s \sin(\psi - \alpha_s) - \dot{y} m_s \varepsilon_s \times \\ \times \cos(\psi - \alpha_s) + \ddot{\varphi}_s m_s \varepsilon_s r_s \sin(\psi - \alpha_s - \delta_s) - \\ - m_s g \varepsilon_s \cos(\psi - \alpha_s + \chi) = Q_{\alpha_s}, \quad s = 1, 2, \dots, n; \\ (m_s \varepsilon_s^2 + J_{Cs}) \ddot{\varphi}_s - \ddot{x} m_s \varepsilon_s \sin \varphi_s + \dot{y} m_s \varepsilon_s \cos \varphi_s - \\ - \ddot{\varphi}_s m_s \varepsilon_s r_s \cos(\varphi_s - \delta_s) + m_s g \varepsilon_s \cos(\varphi_s + \chi) = Q_{\varphi_s}, \quad (17) \\ s = n+1, n+2. \end{aligned}$$

Обобщенные силы Q_x и Q_y принимаются вязкими, то есть



$$Q_x = -k_x \dot{x}; \quad Q_y = -k_y \dot{y}, \quad (18)$$

где k_x и k_y – коэффициенты вязкого сопротивления упругой подвески классификатора в направлениях x и y соответственно.

Обобщенные силы соответствуют вращательным обобщенным координатам и поэтому представляются в виде моментов:

$$Q_{\varphi_s} = L_s - R_s. \quad (19)$$

Здесь L_s и R_s – приведенные к координатам φ_s вращающие моменты двигателей вибраторов и моменты сил сопротивления вращению вибраторов соответственно. Для электродвигателей асинхронного типа на основании их статической характеристики и с учетом того факта, что двигатели установлены на колеблющейся раме, принимается

$$L_s(\dot{\varphi}_s, \dot{\varphi}) = L_s(\dot{\varphi}_s - \dot{\varphi}), \quad s=n+1, n+2. \quad (20)$$

Момент сопротивления вращению ротора вибратора можно представить в виде суммы двух величин [3]:

$$R_s = R_{sA} + R_{sB}. \quad (21)$$

Здесь момент R_{sA} учитывает сопротивления, связанные с присоединением к ротору двигателя дополнительных элементов, таких как крыльчатка вентилятора, масляный насос и другие. Обычно принимают $R_{sA} = R_{sA}(\dot{\varphi}_s)$. R_{sB} – момент сопротивления вращению собственно двигателя и вибратора. Обычно принимают [3]

$$R_{sB}(\dot{\varphi}_s) = \frac{1}{2} f_s m_s d_s \dot{\varphi}_s^2 \text{sign} \dot{\varphi}_s, \quad (22)$$

где d_s – диаметр внутреннего кольца подшипника качения; f_s – условный коэффициент трения в подшипнике.

Валки классификатора не имеют двигателей, поэтому для них $L_s = 0$ и $R_s = 0$. Отличным от нуля для валков оказывается только момент сопротивления их перекачиванию по осям, который определяется из соотношения

$$R_{sB} = \frac{1}{2} f'_s d_s N_s \text{sign}(\dot{\psi} - \dot{\alpha}_s) \quad (23)$$

Здесь N_s – модуль радиальной составляющей реакции взаимодействия валка и его оси. Для рассматриваемых вибрационных классификаторов величина N_s вычислена в работе [1] и равна

$$N_s = m_s [g \sin(\psi - \alpha_s) +$$

$$+ R \omega^2 \cos \alpha - 2 \omega \dot{\alpha}_s R_2 - R_2 \dot{\alpha}_s^2], \quad (24)$$

где R_1 – радиус оси валка; R_2 – внутренний радиус валка. Поэтому для валков

$$R_{sB}(\alpha_s, \dot{\alpha}_s) = \frac{1}{2} f'_s d_s m_s [g \sin(\psi - \alpha_s) + \\ + R \omega^2 \cos \alpha - 2 \omega \dot{\alpha}_s R_2 -$$

$$- R_2 \dot{\alpha}_s^2] \text{sign}(\dot{\psi} - \dot{\alpha}_s). \quad (25)$$

Вращательная обобщенная сила Q_φ также принимается вязкой, однако, учитывая, что все подвижные элементы системы установлены на раме, требуется принять во внимание также реактивные моменты от сил сопротивления движению подвижных элементов с помощью функции $Q_{1\varphi}$, то есть

$$Q_\varphi = -k_\varphi \dot{\varphi} + Q_{1\varphi}. \quad (26)$$

Коэффициенты вязких сопротивлений достаточно малы и поэтому принимаются порядка $O(\mu)$ от некоторого малого параметра μ , то есть в виде

$$k_x = \mu k_{1x}; \quad k_y = \mu k_{1y}; \quad k_\varphi = \mu k_{1\varphi}. \quad (27)$$

Функция $Q_{1\varphi}$ также рассматривается как малая порядка $O(\mu)$ и представляется в виде

$$Q_{1\varphi} = \mu H_\varphi. \quad (28)$$

Далее, так как парциальные угловые скорости вращения вибраторов предполагаются близкими по значению, решение уравнений для углов поворота вибраторов $\varphi_s(t)$ ищется в окрестности функции $\varphi_{s0}(t) = \omega t$. Угол поворота рамы классификатора $\varphi(t)$ также предполагается малым. Более того, малой предполагается скорость изменения угла $\dot{\varphi}(t)$. Эти соображения позволяют в разложениях моментов L_s , R_{sA} и R_{sB} по формуле Тейлора с достаточной степенью точности ограничиться сохранением только линейных членов.

В связи с тем, что активные моменты приложены только к дебалансам, обобщенный момент для дебалансов будет иметь порядок $O(1)$ и эта часть обобщенных моментов будет представлена в виде

$$Q_{\varphi_s} = k_s(\dot{\varphi}_s - \omega) + O(\mu).$$

Учитем, что оси xOy выбраны таким образом, что $c_{xy} = 0$. Таким образом, система уравнений (17) может быть представлена в виде возмущенной системы с малым параметром μ :

$$M\ddot{x} + c_x \dot{x} + c_{x\varphi} \dot{\varphi} = P_x(t, \alpha_s, \dot{\alpha}_s, \ddot{\alpha}_s, \varphi_s, \dot{\varphi}_s, \ddot{\varphi}_s) - \mu k_{1x} \dot{x};$$

$$M\ddot{y} + c_y \dot{y} + c_{y\varphi} \dot{\varphi} = P_y(t, \alpha_s, \dot{\alpha}_s, \ddot{\alpha}_s, \varphi_s, \dot{\varphi}_s, \ddot{\varphi}_s) - \mu k_{1y} \dot{y};$$

$$I\ddot{\varphi} + c_\varphi \dot{\varphi} + c_{x\varphi} \dot{x} + c_{y\varphi} \dot{y} = P_\varphi(t, \alpha_s, \dot{\alpha}_s, \ddot{\alpha}_s, \varphi_s, \dot{\varphi}_s, \ddot{\varphi}_s) + \\ + \mu(-k_{1\varphi} \dot{\varphi} + H_\varphi);$$

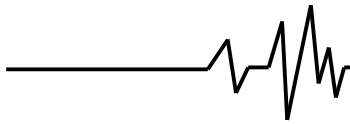
$$J_o s \ddot{\alpha}_s + R \omega^2 m_s \varepsilon_s \sin \alpha_s - m_s g \varepsilon_s \cos(\psi - \alpha_s + \chi) = \\ = \mu \Phi_s(t, \alpha_s, \dot{\alpha}_s, \ddot{\alpha}_s, \dot{\varphi}_s, \ddot{\varphi}_s), \quad s = \overline{1, n};$$

$$J_o s \dot{\varphi}_s + k_s(\dot{\varphi}_s - \omega) = \mu \Phi_s(\varphi_s, \dot{\varphi}_s, \ddot{\varphi}_s, \dot{\varphi}_s, \ddot{\varphi}_s), \quad (29)$$

$$s = n + 1, n + 2.$$

Здесь слагаемые под знаками сумм в первых трех уравнениях обозначены соответственно – P_x , $-P_y$, $-P_\varphi$. Кроме того

$$J_o s = J_{Cs} + m_s \varepsilon_s^2;$$



$$\ddot{x}_p m_s \varepsilon_s \sin(\psi - \alpha_s) - \ddot{y}_p m_s \varepsilon_s \cos(\psi - \alpha_s) = \\ = R m_s \varepsilon_s \omega^2 \sin \alpha_s.$$

Исследование возмущенной системы.

Решение системы (29) отыскивается в виде

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t) \mu; y(t) = y_0(t) + y_1(t) \mu; \\ \varphi(t) = \varphi_0(t) + \varphi_1(t) \mu; \\ \alpha_s(t) = \alpha_{s0}(t) + \alpha_{s1}(t) \mu, s = 1, 2, \dots, n; \\ \varphi_s(t) = \varphi_{s0}(t) + \varphi_{s1}(t) \mu, s = n+1, n+2. \quad (30)$$

Порождающая система для системы (29) будет иметь вид

$$M\ddot{x}_0 + c_x x_0 + c_{x\varphi} \varphi_0 = P_x(t, \alpha_{s0}, \dot{\alpha}_{s0}, \ddot{\alpha}_{s0}, \varphi_{s0}, \dot{\varphi}_{s0}, \ddot{\varphi}_{s0});$$

$$M\ddot{y}_0 + c_y y_0 + c_{y\varphi} \varphi_0 = P_y(t, \alpha_{s0}, \dot{\alpha}_{s0}, \ddot{\alpha}_{s0}, \varphi_{s0}, \dot{\varphi}_{s0}, \ddot{\varphi}_{s0});$$

$$I\ddot{\varphi}_0 + c_\varphi \varphi_0 + c_{x\varphi} x_0 + c_{y\varphi} y_0 =$$

$$= P_\varphi(t, \alpha_{s0}, \dot{\alpha}_{s0}, \ddot{\alpha}_{s0}, \varphi_{s0}, \dot{\varphi}_{s0}, \ddot{\varphi}_{s0});$$

$$J_0 s \ddot{\alpha}_{s0} + R \omega^2 m_s \varepsilon_s \sin \alpha_{s0} -$$

$$- m_s g \varepsilon_s \cos(\psi - \alpha_{s0} + \chi) = 0, \quad s = \overline{1, n};$$

$$J_0 s \ddot{\varphi}_{s0} + k_s (\dot{\varphi}_{s0} - \omega) = 0, \quad s = n+1, n+2. \quad (31)$$

Решением двух последних уравнений (31), обеспечивающим вращение дебалансов с одинаковой угловой скоростью ω , будут функции

$$\varphi_{s0} = \omega t + A_s, \quad s = n+1, n+2 \quad (32)$$

с произвольными постоянными A_s . При $A_{n+1} = A_{n+2}$ вращение дебалансов будет также синфазным, по крайней мере, в первом приближении.

Уравнения (31) для α_{s0} исследованы автором ранее [4]. Установлено, что каждое из этих уравнений может быть представлено в виде системы, близкой к системам Ляпунова.

Показано, что существуют $\frac{2\pi}{\omega}$ периодические

решения этих уравнений в случаях близких к резонансу, при простом и главном резонансах, причем эти решения могут быть построены так, чтобы в предельном случае обращаться в тривиальное или нетривиальное решения. Исследованы также линеаризованные варианты этих уравнений [5,6]. В этом случае данные уравнения преобразуются к уравнениям типа Хилла или Матье и также допускают периодические решения. Это

позволяет утверждать, что $\frac{2\pi}{\omega}$ периодические

решения уравнений для α_{s0} существуют и в дальнейшем под α_{s0} понимаются именно такие решения.

Подставляя теперь в правые части первых трех уравнений (31) значения φ_s из (32)

и $\frac{2\pi}{\omega}$ периодические решения уравнений для

α_{s0} , получим, что первые три уравнения (31)

имеют $\frac{2\pi}{\omega}$ периодические правые части, то

есть будут представлять собой систему линейных уравнений с постоянными

коэффициентами и $\frac{2\pi}{\omega}$ периодическими

правыми частями. Поэтому общее решение первых трех уравнений (31) будет представлять собой сумму общего решения соответствующей однородной системы и частного решения неоднородной системы.

Соответствующая однородная система имеет решение вида

$$x_0 = h_x e^{i\lambda t}; y_0 = h_y e^{i\lambda t}; \varphi_0 = h_\varphi e^{i\lambda t}. \quad (33)$$

Это решение будет нетривиальным, если выполняется равенство

$$\begin{vmatrix} c_x - M\lambda^2 & 0 & c_{x\varphi} \\ 0 & c_y - M\lambda^2 & c_{y\varphi} \\ c_{x\varphi} & c_{y\varphi} & c_\varphi - I\lambda^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (34)$$

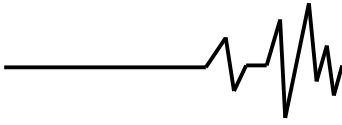
Уравнение (34) является кубическим относительно λ^2 и имеет три корня λ^2 . Если при этом все три корня λ^2 вещественны и положительны, то следует учесть, что значения квадратного корня из λ^2 , взятые со знаком плюс или минус приводят к одинаковым периодическим решениям однородной системы (54). Поэтому в таком случае мы получаем три положительных корня уравнения (34) λ_1, λ_2 и λ_3 . В этом случае важно знать, имеет ли хотя бы один из этих корней значение $m\omega + q\mu$, так как этот случай является случаем, близким к резонансному [7], для которого неоднородная система из первых трех уравнений (31) имеет периодическое частное решение лишь при выполнении определенных условий. Эти условия состоят в том, что значения коэффициентов Фурье для всех m -х гармоник при разложении правых частей первых трех уравнений (31) в ряд Фурье должны быть равны нулю, то есть должны выполняться условия

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} P_z \sin mot dt = 0; \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} P_z \cos mot dt = 0 \quad (35)$$

для всех трех значений индекса $z = x, y, \varphi$. В нерезонансном случае система из первых трех уравнений (31) всегда допускает единственное

$\frac{2\pi}{\omega}$ периодическое решение.

Так как при конструировании вибрационных классификаторов всегда можно добиться выполнения условий (35), можно полагать, что система из первых трех уравнений (31) допускает периодические



периода $\frac{2\pi}{\omega}$ решение. В то же время, будучи периодическим, это решение будет устойчивым.

Далее обращаемся к анализу уравнений для α_s и φ_s в системе (29). С этой целью, прежде всего, разлагаем нелинейные члены, а также правые части этих уравнений по формуле Тейлора в окрестности порождающего решения. Для сокращения записей введем следующие обозначения. Выражение (Φ_s) будет означать, что в качестве аргументов этих функций подставлены порождающие решения, то есть

$$(\Phi_s) = \Phi_s(t, \alpha_{s0}, \dot{\alpha}_{s0}, \ddot{\alpha}_{s0}, \dot{\varphi}_0, \ddot{\varphi}_0), \quad s = \overline{1, n};$$

$$(\Phi_s) = \Phi_s(\varphi_{s0}, \dot{\varphi}_0, \ddot{\varphi}_0, \dot{\varphi}_0, \ddot{\varphi}_0), \quad s = n+1, n+2. \quad (36)$$

Такие обозначения распространяются также на производные функций Φ_s .

Подставляя эти разложения и форму решения (30) в уравнения системы (29) для α_s и φ_s и приравнявая в левых и правых частях получившихся равенств коэффициенты при μ , получим следующие уравнения для определения α_{s1} и φ_{s1} :

$$J_{0s}\ddot{\alpha}_{s1} + [R\omega^2 m_s \varepsilon_s \cos \alpha_{s0} - m_s g \varepsilon_s \sin(\psi - \alpha_{s0} + \chi)]\alpha_{s1} = (\Phi_s), \quad s = \overline{1, n}; \quad (37)$$

$$J_{0s}\ddot{\varphi}_{s1} + k_s \dot{\varphi}_{s1} = (\Phi_s), \quad s = n+1, n+2. \quad (38)$$

Каждое из двух уравнений (38) представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и $\frac{2\pi}{\omega}$ периодической правой частью. Такое

уравнение всегда допускает $\frac{2\pi}{\omega}$

периодическое частное решение при условии, что разложение его правой части в ряд Фурье не содержит постоянного слагаемого, то есть выполняется условие

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} (\Phi_s) dt = 0, \quad s = n+1, n+2.$$

Действительно, решением уравнения $J_{0s}\ddot{\varphi}_{s1} + k_s \dot{\varphi}_{s1} = C$, где $C = \text{const}$, является

непериодическая функция $\varphi_{s1} = \frac{Ct}{k_s}$. Поэтому

необходимыми и достаточными условиями существования $\frac{2\pi}{\omega}$ периодических решений в системе (38) будут равенства

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} (\Phi_{n+1}) dt = 0; \quad \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} (\Phi_{n+2}) dt = 0. \quad (39)$$

Так как здесь подинтегральные функции зависят от φ_{s0} , представленных в форме (32), из этих уравнений определяются значения постоянных A_{n+1} и A_{n+2} , обеспечивающие $\frac{2\pi}{\omega}$

периодичность функций φ_{s1} . А это и является условием периодического вращения вибраторов с одинаковой угловой скоростью ω , иными словами, их синхронного вращения. Условие синфазного вращения вибраторов состоит в справедливости равенства

$$A_{n+1} = A_{n+2}, \quad (40)$$

выполнение которого можно обеспечить подбором соответствующих параметров классификатора.

Каждое из уравнений системы (37) является линейным дифференциальным

уравнением второго порядка с $\frac{2\pi}{\omega}$

периодическими коэффициентами и с $\frac{2\pi}{\omega}$

периодической правой частью. А это значит, что каждое из уравнений системы (37) представляет собой неоднородное уравнение Хилла [8,9]. Эти уравнения исследованы в [11], где показано, что при определенном подборе параметров системы можно получить периодическое общее решение каждого из уравнений системы (37). А это значит, что вращение всех валков будет осуществляться синхронно с одинаковой частотой.

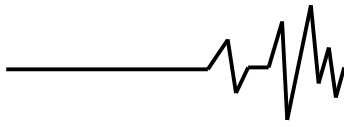
Следует обратить внимание на то, что, если в уравнениях (31) для α_{s0} величины J_{0s} , m_s , ε_s одинаковы, то есть не зависят от s , то и решение этих уравнений α_{s0} от s не будет зависеть. При этих условиях уравнения (37) для α_{s1} будут отличаться друг от друга только величиной (Φ_s) . Величины (Φ_s) являются функциями аргументов $t, \alpha_{s0}, \dot{\alpha}_{s0}, \ddot{\alpha}_{s0}, \dot{\varphi}_0, \ddot{\varphi}_0, r_s, \delta_s$. Все эти аргументы, кроме двух последних, не зависят в рассматриваемом случае от s . Функции Φ_s в явном виде выглядят следующим образом:

$$-(\ddot{x} - \ddot{x}_p) m_s \varepsilon_s \sin(\psi - \alpha_s) + (\dot{y} - \dot{y}_p) m_s \varepsilon_s \cos(\psi - \alpha_s) - \ddot{\varphi} m_s \varepsilon_s r_s \cos(\psi - \alpha_s - \delta_s) - R_{sB}(\alpha_s, \dot{\alpha}_s) =$$

$$= \mu \Phi_s(t, \alpha_s, \dot{\alpha}_s, \ddot{\alpha}_s, \dot{y}, \ddot{y}), \quad s = \overline{1, n},$$

где r_s – расстояние между точками O_1 и O_s .

В этих формулах следует обратить внимание на то, что зависимость (Φ_s) от r_s и δ_s является весьма слабой, однако и эту зависимость можно устранить следующим



образом. Параметры r_s и δ_s входят только в одно слагаемое в формуле, определяющей функцию Φ_s . Это слагаемое содержит множитель $\ddot{\varphi}$. В функцию (Φ_s) вместо $\ddot{\varphi}$ нужно подставлять значение $\ddot{\varphi}_0$. Если $\ddot{\varphi}_0$ будет равно нулю или, по крайней мере, будет иметь порядок $O(\mu)$, то это единственное слагаемое в функции (Φ_s) обратится в нуль, то есть функция (Φ_s) тогда не будет зависеть от r_s и δ_s . В свою очередь, функция $\ddot{\varphi}_0$ может быть равна нулю, если только ее первая производная постоянна. Но, учитывая, что функция φ должна быть периодической, вид этой функции должен быть следующим:

$$\varphi_0 = h + \mu\beta(t), \quad (41)$$

где $h = const$, а $\beta(t)$ – произвольная периодическая функция.

Таким образом оказывается, что для того чтобы все уравнения (37) для α_{s1} были одинаковы необходимо (и достаточно), чтобы порождающая система (54) допускала для φ решение вида (41). В этом случае вращения всех валков классификатора будут не только синхронными, но и синфазными.

Заключение. В заключение можно отметить, что получены необходимые и достаточные условия синхронного и синфазного вращения вибраторов и валков вибрационных классификаторов. Условия синхронного вращения вибраторов в нерезонансном случае состоят в выполнении условий (39). В случае, близком к резонансу, дополнительно требуется удовлетворение условий (35). При выполнении условий (40) вращение вибраторов будет также синфазным. Для синхронного вращения валков требуется равенство соответствующих величин J_{Os} , m_s , ε_s . В случае выполнения условия (41) вращение валков будет еще и синфазным. Показано также, что эти вращения будут периодическими, а потому устойчивыми.

Литература

1. Остапенко В.А. Математическая модель свободного качения валков вибрационных классификаторов. // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2006. – №2 (25). – С. 372–376.
2. Остапенко В.А. Математическая модель движения валков валковых классификаторов вибрационного типа. /В.А. Остапенко, В.П. Надутый, В.Ф. Ягнюков // Вибрации в технике и технологиях. №1 (43) 2006. – С. 97-99.
3. Блехман И.И. Синхронизация динамических систем. /И.И. Блехман// Наука, М., 1971. – 894 с.
4. Остапенко В.А. Асимптотическое разложение периодического решения порождающего уравнения вращения валков вибрационных классификаторов. /В.А. Остапенко// Вибрации в технике и технологиях №4 (42) 2005, сс. 90–94.
5. Надутый В.П. Синтез параметров валковых классификаторов вибрационного типа. /В.П. Надутый, В.А. Остапенко, В.Ф. Ягнюков// К., Наукова думка, 2006, с. 256.
6. Naduty V.P. Dynamics of periodic rotations of rollers of the vibrating classifiers. /V.P. Naduty, V.A. Ostapenko, V.F. Yagnukov// Proceedings of 8th International Conference on Dynamical Systems Theory and Applications. Lodz, Poland, 2005, pp. 316-323.
7. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. /Н.Н. Моисеев// Наука, М., 1969 – 379 с.
8. Смирнов В.И. Курс высшей математики. /В.И. Смирнов// Т. III, часть вторая, Наука, М., 1969, сс. 672.
9. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах. /Т. Хаяси// Мир, М., 1968. – 432. с.
10. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. // ГИТТЛ, М., 1952. – 468 с.
11. Остапенко В.А. Периодическое общее решение неоднородного уравнения Хилла. /В.А. Остапенко// Вестник Днепропетровского университета, серия Моделирование, вып. 2, №8, т.18, 2010. – С. 103–113.