



Ольшанский В. П.

Харьковский
национальный
технический
университет сельского
хозяйства
им. П.Василенко

Ольшанский С. В.

Национальный
технический
университет
«Харьковский
политехнический
институт»

УДК 539.3:534.1

СРАВНЕНИЕ ПРОГИБОВ КОНСОЛЬНОЙ БАЛКИ ПРИ УДАРЕ, ВЫЧИСЛЕННЫХ ПО ТЕОРИЯМ КОКСА И СЕН-ВЕНАНА

Показано, що при належному зведенні маси балки до перерізу удару, згадані теорії приводять до близьких значень коефіцієнта динамічності прогинів балки при непружному поперечному ударі по ній падаючим тілом.

It is shown that when properly activated, the mass of the beam to impact the section referred to the theory lead to a similar value of the coefficient of dynamic beam deflection in an inelastic collision cross on it falling over.

Постановка проблеми. Ударное нагружение вызывает повышенные динамические напряжения в элементах конструкций и может быть причиной их разрушения. Поэтому проверка существующих и разработка новых методов расчета твердых тел на удар относится к актуальным задачам.

Обзор последних публикаций. Несмотря на существование совершенных, но достаточно сложных теорий механического удара, в современной учебной литературе по сопротивлению материалов традиционно излагают простейшие методы расчета [1,2,3,4]. При этом не освещаются вопросы погрешностей, к которым приводят эти инженерные теории. Ответы на них может дать проведение натурных экспериментов с применением совершенной измерительной аппаратуры быстропротекающих процессов или сравнение результатов расчета по уточненной и традиционно излагаемой элементарной теории. Здесь выбран второй вариант определения погрешностей простейших энергетических теорий механического удара.

Целью работы является сопоставление результатов, по энергетической теории Кокса и более совершенной теории Сен-Венана, при расчете динамических прогибов консольной

балки с сосредоточенной (точечной) массой на ее незакрепленном крае, по которому производится удар подающим телом.

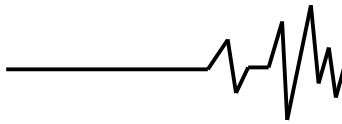
Основная часть работы. динамика консольной балки, подвергнутой поперечному удару, при отсутствии на ней сосредоточенной массы рассматривалась в [5]. Поэтому здесь обобщим результаты, полученные в указанной работе. Пусть горизонтальная балка изгибной жесткости EJ и погонной массы ρF имеет длину l . Ее левый край $x=0$ зашпелен, а правый $x=l$ – несет сосредоточенную массу M_* . По ней производится поперечный удар падающего тела массой M со скоростью v . Определим, как повлияет на динамический изгиб балки наличие сосредоточенной массы.

Аналогично [5], изображение прогибов балки при $x=l$ для изложенной постановки задачи, представляется выражением:

$$Y(l, p) = \frac{M(g + vp)G(l, p)}{1 + (M + M_*)p^2 G(l, p)}. \quad (1)$$

В нем:

$$G(l, p) = \frac{l^3}{EJ} \frac{ch\zeta \sin \zeta - sh\zeta \cos \zeta}{\zeta^3 (1 + ch\zeta \cos \zeta)}$$



функция влияния; $\zeta = l\sqrt{\beta\omega}$; $\beta = \frac{\sqrt{\rho F}}{\sqrt{EJ}}$;

$p = i\omega$; $i = \sqrt{-1}$; p – параметр интегрального преобразования Карсона; g – ускорение свободного падения.

Выражение (1) лишь слагаемым M_* отличается от выведенного в работе [5].

Переход в пространство оригиналов проводим с помощью второй теоремы разложения. Согласно этой теореме:

$$y(l, t) = y_* + y_{CT} - \frac{\chi}{\chi_*} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g \cos(\omega_k t) - v \omega_k \sin(\omega_k t)}{\omega_k^2 \cdot [1 + 0,25\chi_* S(\zeta_k)]}. \quad (2)$$

Здесь

$$S(\zeta_k) = 2\zeta_k^2 \frac{\sin \zeta_k \operatorname{sh} \zeta_k}{1 + ch \zeta_k \cos \zeta_k} + \frac{1}{\chi_*^2} - \frac{3}{\chi_*};$$

$$y_* = \frac{M_* g l^3}{3EJ}; \quad y_{CT} = \frac{M g l^3}{3EJ}; \quad \omega_k = \frac{\zeta_k^2}{\beta l^2}; \quad \zeta_k -$$

положительные корни уравнения:

$$\frac{sh \zeta \sin \zeta - sh \zeta \cos \zeta}{1 + ch \zeta \cos \zeta} = \frac{1}{\zeta \chi_*}; \quad (3)$$

t – время; $\chi_* = \chi + \alpha$; $\chi = M M_0^{-1}$;

$\alpha = M_* M_0^{-1}$; $M_0 = \rho F l$ – масса балки.

При $\alpha = 0$; $\chi_* = \chi$ и разложение (2) становится таким как в работе [5].

Корни уравнения (3) не сложно находить итерациями по формулам:

$$\zeta_k^{(n)} = a_k - \varepsilon_k^{(n)}, \quad a_k = \frac{(2k-1)\pi}{2}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4)$$

$$\varepsilon_k^{(n+1)} = \operatorname{arctg} \frac{\chi_* \zeta_k^{(n)} - (\sin a_k \cos \varepsilon_k^{(n)} ch \zeta_k^{(n)})^{-1}}{1 + \chi_* \zeta_k^{(n)} th \zeta_k^{(n)}},$$

$n = 0, 1, 2, \dots,$

задавая начальным приближением $\varepsilon_k^{(n)} = 0$.

В (4) k – номер корня; n – номер итерации.

Используя (2), на компьютере можно рассчитать изменение прогибов балки во времени при неупругом ударе.

Для оценки максимальных значений прогибов балки в сечении удара удобно применять обобщенную формулу Кокса:

$$y_g = \max y(l, t) = y_* + y_{CT} + \sqrt{y_{CT}^2 + \frac{v^2}{g} \frac{\chi \cdot y_{CT}}{K_0 + \chi_*}}. \quad (5)$$

Здесь K_0 – коэффициент приведения массы балки к сечению удара.

Существует несколько способов определения K_0 , которые дают разные значения этого коэффициента. Выясним, какой из них приводит к лучшему согласованию теорий удара по Коксу и Сен-Венану.

Известно, что значение K_0 можно определять из условий равенства кинетической энергии, равенства количества движения [6], а также из условия равенства частот основного тона колебаний балки и системы с одной степенью свободы, к которой она приводится [7].

Для консольной балки, по равенству кинетической энергии:

$$K_0 = K_{01} = \frac{1}{4} \int_0^1 [\xi^2 (3 - \xi)]^2 d\xi = \frac{33}{140} \approx 0,236.$$

Из условий равенства количества движения:

$$K_0 = K_{02} = \frac{1}{2} \int_0^1 \xi^2 (3 - \xi) d\xi = \frac{3}{8} \approx 0,375.$$

По равенству частот основного тона колебаний балки и системы с одной степенью свободы:

$$K_0 = K_{03} = \frac{3}{(1,875)^4} \approx 0,243.$$

Заметим, что значения K_{01} и K_{03} есть в [7].

Используя найденные K_0 , далее сравним результаты расчетов по формулам (2) и (5).

Для проведения расчетов принимаем: $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па; $\rho = 7810$ кг/м³; $l = 1$ м; $F = b \cdot h$; $J = bh^3 / 12$; $h = 0,06$ м; $b = 0,02$ м; $\chi = 0,4$; $v = 2$ м/с и варьируем величину α .

Полученные графики $y(l, t)$ представлены на рис. 1. Ряд (2) суммировали на компьютере до $k = 100$.

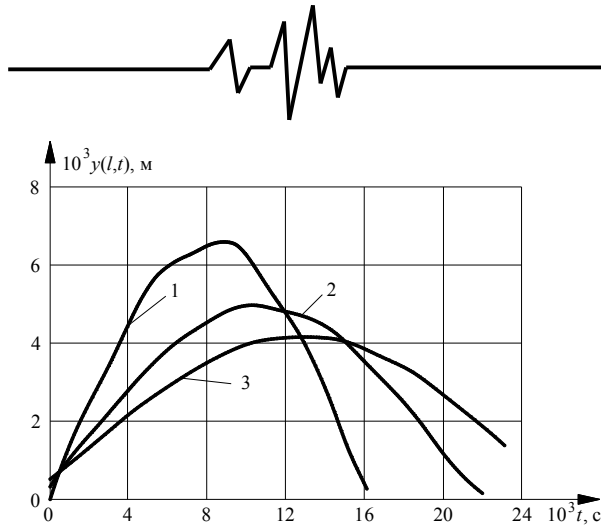


Рис. 1. Графики $y(l,t)$ при разных α :
1, 2, 3 – $\alpha = 0; 0,5; 1$

Расчеты показывают, что с увеличением α (сосредоточенной массы в сечении удара), уменьшаются динамические прогибы балки. Вычисленные их максимумы по формуле (5) при $\alpha = 0; 0,5; 1$ составляют соответственно: $(6,58; 5,18; 4,58) \cdot 10^{-3}$ м, что незначительно отличается от максимумов: $(6,71; 5,20; 4,60) \cdot 10^{-3}$ м, которые получены по формуле (2), т.е. можно говорить об удовлетворительном соответствии двух теорий.

На рис. 2 показаны графики, к которым приводит решение (2) при $\alpha = 1$, разных v и прежних остальных исходных данных.

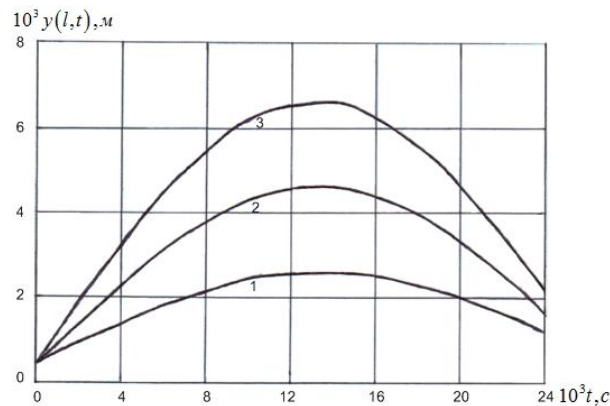


Рис. 2. Графики $y(l,t)$ при разных v :
1, 2, 3 – $v = 1; 2; 3$ м/с

Увеличение скорости удара, как и следовало ожидать, сопровождается увеличением динамических прогибов балки.

В табл. 1 указаны значения y_g , вычисленные по формуле (2) и формуле (5) при разных значениях K_0 . Варьировали величину χ , положив $\alpha = 0, v = 1$ м/с.

Таблица 1
Максимальные значения $10^3 y(l,t)$ в м ($\alpha = 0$)

| χ | Теория Сен-Венана | Формула Кокса при: | | | | |
|--------|-------------------|--------------------|-------------|-------------|-------------|---------|
| | | $K_0=0$ | $K_0=0,236$ | $K_0=0,243$ | $K_0=0,375$ | $K_0=1$ |
| 0,05 | 0,63 | 1,46 | 0,62 | 0,61 | 0,51 | 0,33 |
| 0,1 | 1,16 | 2,96 | 1,15 | 1,14 | 0,97 | 0,65 |
| 0,5 | 4,02 | 4,75 | 3,96 | 3,94 | 3,65 | 2,83 |
| 1,0 | 6,14 | 6,85 | 6,20 | 6,19 | 5,90 | 4,97 |
| 2,0 | 9,42 | 9,94 | 9,45 | 9,43 | 9,19 | 8,28 |

В табл. 2 представлены результаты аналогичных расчетов при $\alpha = 1, v = 1$ м/с.

Таблица 2
Максимальные значения $10^3 y(l,t)$ в м ($\alpha = 1$)

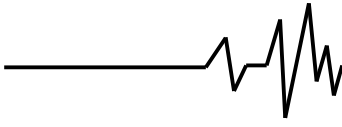
| χ | Теория Сен-Венана | Формула Кокса при: | | | | |
|--------|-------------------|--------------------|-------------|-------------|-------------|---------|
| | | $K_0=0$ | $K_0=0,236$ | $K_0=0,243$ | $K_0=0,375$ | $K_0=1$ |
| 0,05 | 0,71 | 0,74 | 0,71 | 0,71 | 0,70 | 0,65 |
| 0,1 | 1,00 | 1,06 | 1,00 | 1,00 | 0,98 | 0,89 |
| 0,5 | 3,07 | 3,24 | 3,06 | 3,05 | 2,96 | 2,65 |
| 1,0 | 5,12 | 5,37 | 5,13 | 5,12 | 5,00 | 4,54 |
| 2,0 | 8,42 | 8,68 | 8,41 | 8,40 | 8,26 | 7,70 |

Расчеты показали, что в рассмотренном интервале изменения χ первый способ определения K_0 приводит к лучшему соответствию двух теорий. Действительно, по сумме квадратов отклонений соответствующих чисел в таблицах лучшее согласование теорий получается, когда K_0 определять из условия равенства кинетической энергии, а худшее – при $K_0 = 0, uK_0 = 1$. Видно, что при $K_0 = 0$ формула (5) дает большие, а при $K_0 = 1$ – меньшее y_g , чем сумма ряда (2). Это приводит к выводу, что y_g , вычисленное по теории Сен-Венана, удовлетворяет неравенству:

$$y_1 < y_g < y_2, \quad (6)$$

где

$$y_j < y_0 + y_* + y_{CT} + \sqrt{y_{CT}^2 + \frac{v^2}{g} \frac{\chi y_{CT}}{\chi_* + 2 - j}}; j = \overline{1, 2};$$



y_0 – статический прогиб балки под действием ее собственного веса. Им выше пренебрегали в расчетах. Для края консольной балки [8]

$$y_0 = \frac{M_0 g l^3}{8 E J}.$$

Выводы

Теория Сен-Венана позволяет учитывать наличие сосредоточенной массы в сечении удара. Максимальное значение прогиба балки, которое она дает, удовлетворяет неравенству (6). При рассмотренных χ наблюдается хорошее соответствие результатов расчета по теориям Кокса и Сен-Венана.

Литература

1. Писаренко Г.С. Опір матеріалів / Г.С. Писаренко, О.Л. Квітка, Е.С. Уманський. – К.: Вища школа, 2004. – 655 с.

2. Писаренко Г.С. Справочник по сопротивлению материалов / Г.С. Писаренко, А.П. Яковлев, В.В. Матвеев. – К.: Наукова думка, 1988. – 736 с.

3. Корнілов О.А. Опір матеріалів / О.А. Корнілов. – К.: Погос, 2003. – 552 с.

4. Шкельов Л.Т. Опір матеріалів / Л.Т. Шкельов, А.М. Станкевич, Д.В. Пошивач. – К.: ЗАТ «Віпол», 2011. – 456 с.

5. Ольшанский В.П. Динамика консольной балки при неупругом поперечном ударе / В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский // Вісник ХНТУСГ: Проблеми надійності машин та засобів сільськогосподарського виробництва. – Харків: ХНТУСГ, 2012. – Вип. 128. – С. 283-290.

6. Кильчевский Н.А. Теория соударений твердых тел / Н.А. Кильчевский. – К.: Наукова думка, 1969. – 247 с.

7. Снитко Н.К. Строительная механика / Н.К. Снитко. – М.: Высшая школа, 1980. – 431 с.

8. Фесик С.П. Справочник по сопротивлению материалов / С.П. Фесик. – К.: Будівельник, 1982. – 280 с.