Ольшанский В. П.

Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства им. П. Василенко

Ольшанский С. В.

Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»

Olshanskii V. P.

Kharkiv Petro Vasylenko National Technical University of Agriculture

Olshanskii S. V.

National Technical University “Kharkiv Polytechnic Institute”

УДК 534.1

СВОБОДНЫЕ ВЕРТИКАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОСЦИЛЛЯТОРА ЛИНЕЙНО-ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

Аннотация. *Показано, что свободные колебания осциллятора линейно-переменной массы являются нестационарными. Они происходят с переменными во времени характеристиками амплитудой и периодом. Кроме того, изменяется во времени положение равновесия, относительно которого происходят эти колебания. В результате чего исчезает знакопеременность перемещения осциллятора, чего нет при свободных вертикальных колебаниях линейного осциллятора постоянной массы.*

Ключевые слова: *колебания осциллятора, переменность массы, амплитуда, период, функции Бесселя.*

Введение. Одним из первых, кто рассмотрел колебания подвешенного тела переменной массы был И.В. Мещерский [1]. Он построил в функциях Бесселя положительного и отрицательного индексов решение уравнения малых колебаний математического маятника линейно-переменной массы и проанализировал особенности движения. Колебания математического маятника линейно-переменной длины, с учётом действия кориолисовой силы, описаны в [2]. Отмечено, что такие задачи возникают при математическом моделировании опускания или подъёма тяжёлых грузов, подвешенных на условно невесомых и нерастяжимых канатах. Решение уравнения малых колебаний осциллятора линейно-переменной массы опубликовано в [3], но оно построено без учёта изменения положения равновесия во времени. Автор публикации [3] не проводила вычислений и не анализировала особенностей движения, которые даёт решение уравнения колебаний. Движение осциллятора, у которого масса возрастает во времени по экспоненциальному закону рассмотрено в [4], но без учёта изменения положения равновесия, относительно которого происходят малые колебания. В отличие от указанных выше публикаций, где решали однородные дифференциальные уравнения, здесь строится решение неоднородного уравнения с переменными коэффициентами. Этим удаётся учесть изменение положения равновесия во времени, или так называемое “медленное движение”, на которое накладываются колебания.

Целью работы является исследование особенностей колебательного движения линейного осциллятора, вызванных изменением его массы.

Уравнение колебаний и его решение. Направим координатную ось ox вертикально вниз, как показано на рис. 1. Обозначим через l длину недеформированной пружины, а через

X_0 длину растянутой пружины начальным весом материальной точки. С этого положения введём отсчёт вниз координаты x.

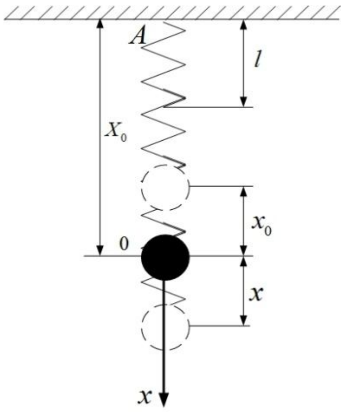

Рис. 1. Расчётная схема вертикальных колебаний осциллятора

По теореме об изменении количества движения:

$$\frac{d}{dt}\left(M\frac{dx}{dt}\right)=M\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dM}{dt}\cdot\frac{dx}{dt}=R. \qquad (1)$$

В (1) $M=M(t)$ – масса движущейся материальной точки, зависящая от времени t; R – равнодействующая сил, приложенных к точке.

Без учёта сопротивления среды на точку действует две силы: веса $P=mg$ и упругости пружины $F_y=cx$, где c – коэффициент жёсткости пружины; g – ускорение свободного падения.

Далее аналогично [3], принимаем, что:

$$M(t)=m_0(1+\gamma t). \qquad (2)$$

В (2) m_0 – начальная масса материальной точки; γ – характеризует скорость изменения массы во времени. При $\gamma>0$ масса возрастает, а при $\gamma<0$ она убывает.

В силу принятых обозначений:

$$X_0=l+\frac{m_0g}{c}.$$

С целью упрощения исследования, в уравнении (1) будем пренебрегать слагаемым $\frac{dM}{dt}\cdot\frac{dx}{dt}$, которое определяет реактивную силу. Так поступал И.В. Мещерский, рассматривая колебания математического маятника.

Учитывая указанное упрощение и действие сил веса и упругости пружины, вместо (1), получаем:

$$m_0(1+\gamma t)\frac{d^2x}{dt^2}+cx=m_0g\gamma t. \qquad (3)$$

Введением вспомогательной переменной $\xi=1+\gamma t$, уравнение (3) преобразуем к компактной форме:

$$\frac{d^2x}{d\xi^2}+\frac{c_1}{m_0\xi}x=g_1\frac{\xi-1}{\xi} \qquad (4)$$

где $c_1=c\gamma^{-2};g_1=g\gamma^{-2}$.

Уравнения (3), (4) дополняем начальными условиями:

$$x\big|_{t=0}=x_0;\quad \frac{dx}{dt}\bigg|_{t=0}=\dot{x}_0. \qquad (5)$$

Решение уравнения (4) ищем в виде

$$x=y+\frac{gm_0}{c}(\xi-1). \qquad (6)$$

Подставляя (6) в (4), получаем:

$$\frac{d^2y}{d\xi^2}+\frac{c_1}{m_0\xi}y=0. \qquad (7)$$

Общим решением уравнения (7) является:

$$y=\eta\left[c_1J_1(\eta)+c_2Y_1(\eta)\right]. \qquad (8)$$

Здесь $\eta=\eta_0\sqrt{\xi}$; $\eta_0=\frac{2}{|\gamma|}\sqrt{\frac{c}{m_0}}$;

$J_1(\eta),Y_1(\eta)$ – функции Бесселя и Неймана индекса единица; c_1,c_2 – произвольные постоянные.

Учитывая (6) и (8), получаем:

$$x=\eta\left[c_1J_1(\eta)+c_2Y_1(\eta)\right]+\frac{4g_1}{\eta_0^4}\left(\eta^2-\eta_0^2\right). \qquad (9)$$

При дифференцировании (9) по t учтём, что [5]:

$$\frac{d}{d\eta}\left[\eta J_1(\eta)\right]=\eta J_0(\eta);$$

$$\frac{d}{d\eta}\left[\eta Y_1(\eta)\right]=\eta Y_0(\eta);$$

$$\frac{d}{dt}=\frac{d}{d\eta}\cdot\frac{d\eta}{dt}=\frac{\gamma\eta_0^2}{2\eta}\frac{d}{d\eta}.$$

Здесь $J_0(\eta),Y_0(\eta)$ – функции Бесселя и Неймана нулевого индекса.

Тогда:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\gamma\eta_0^2}{2}\left[c_1J_0(\eta)+c_2Y_0(\eta)+\frac{8g_1}{\eta_0^4}\right]. \quad (10)$$

Подставив (9) и (10) в (5), приходим к системе двух уравнений:

$$c_1J_1(\eta_0)+c_2Y_1(\eta_0)=b_1$$
$$c_1J_0(\eta_0)+c_2Y_0(\eta_0)=b_2, \quad (11)$$

с неизвестными c_1 и c_2.

В (11): $b_1=\frac{x_0}{\eta_0};\ b_2=\frac{2\dot{x}_0}{\gamma\eta_0^2}-\frac{8g_1}{\eta_0^4}.$

Решив систему (11), находим:

$$c_1=\frac{\pi\eta_0}{2}\left[b_1Y_0(\eta_0)-b_2Y_1(\eta_0)\right];$$
$$c_2=\frac{\pi\eta_0}{2}\left[b_2J_1(\eta_0)-b_1J_0(\eta_0)\right]. \quad (12)$$

При этом учтено, что [5]:

$$J_1(\eta_0)Y_0(\eta_0)-J_0(\eta_0)Y_1(\eta_0)=\frac{2}{\pi\eta_0}.$$

Таким образом, движение осциллятора описывается выражениями (9), (12).

Рассмотрим асимптотику поведения решения (9). При возрастании массы осциллятора $\gamma>0$. Тогда, при $t\to\infty:\eta\to\infty$;

$$J_1(\eta)\sim\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi\eta}}\cos\left(\eta-\frac{3\pi}{4}\right);$$
$$Y_1(\eta)\sim\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi\eta}}\sin\left(\eta-\frac{3\pi}{4}\right).$$

Поэтому, согласно (9), $x(t)\to\infty$, т.е. при $t\to\infty$ стремится к бесконечности амплитуды колебаний и смещение положения равновесия осциллятора. Исходная теория малых перемещений осциллятора выходит за рамки её применимости.

В случае убывающей массы $\gamma<0$. Решение (9) имеет физический смысл лишь при $m>0$ или $t\in\left[0;1/|\gamma|\right)$. Если $t\to|\gamma|^{-1}$, то $\eta\to0$ и

$$J_1(\eta)\sim\frac{\eta}{2};\quad Y_1(\eta)\sim-\frac{2}{\pi\eta}.$$

Тогда, согласно (9), при $t\to|\gamma|^{-1}$ уменьшаются амплитуды колебаний и $x\to-\frac{2}{\pi}c_2-\frac{m_0g}{c}$, т.е. происходит некоторое зависание осциллятора, относительно положения $x=-m_0g/c.$

Итак, независимо от знака γ, решение (9) по сути описывает колебания осциллятора на ограниченном интервале времени t.

Численные результаты и их анализ. Рассмотрим модельную задачу, когда масса осциллятора возрастает. Для этого примем следующие исходные данные: $m_0=100$ кг; $\gamma=0{,}1$ с$^{-1}$; $c=4\cdot10^4$ Н/м; $\dot{x}_0=0$ и два значения x_0. На рис.2 и рис.3 представлены зависимости скорости и перемещения от времени. Сплошными линиями нанесены графики, полученные при $x_0=0{,}002$ м, а точками – при $x_0=0{,}005$ м.

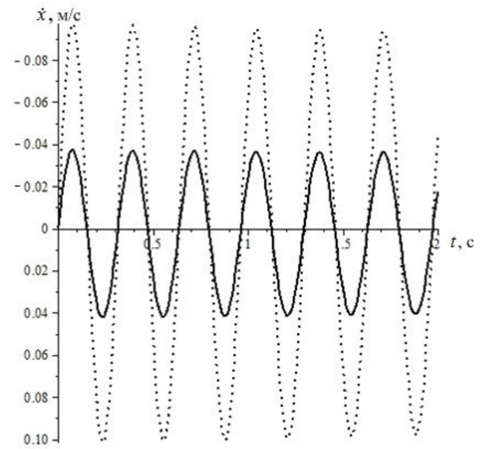

Рис. 2. Зависимость скорости $\dot{x}$ от времени t при возрастании массы

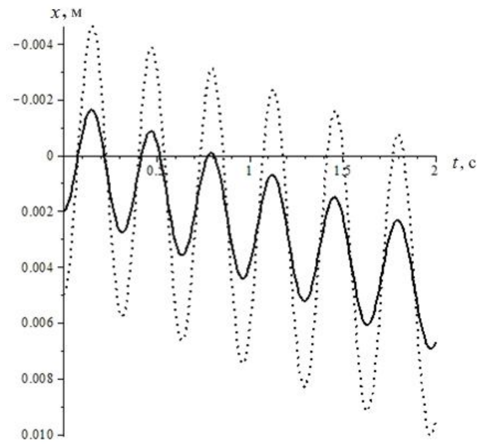

Рис. 3. Зависимость перемещения x от времени t при возрастании массы

Расчёты показывают, что на начальном этапе движения амплитуда и частота свободных колебаний могут меняться незначительно, но происходит существенное смещение положения, относительно которого происходят колебания осциллятора возрастающей массы. В выбранной неподвижной системе отсчёта, с некоторого момента времени, перемещения $x(t)$ принимают только положительные значения, что исключено при свободных вертикальных колебаниях осциллятора постоянной массы.

В дополнение к выше изложенному, проведём числовой расчёт, колебаний осциллятора с убывающей массой. Для этого примем прежние исходные данные и поменяем знак у параметра γ. Результаты таких расчётов представлены на рис. 4 и рис. 5.

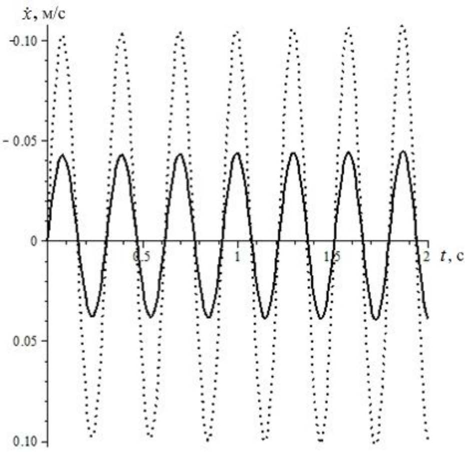

Рис. 4. Зависимость скорости $\dot{x}$ от времени t при убывании массы

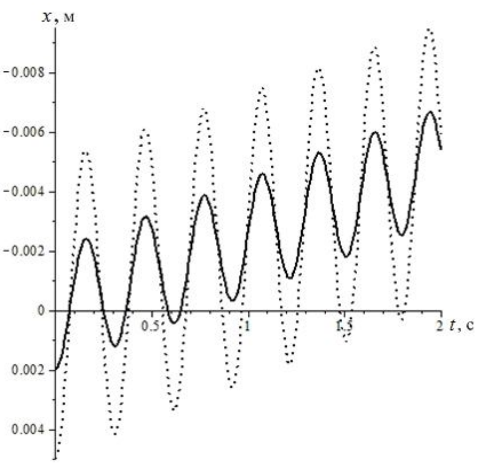

Рис. 5. Зависимость перемещения x от времени t при убывании массы

При отрицательных γ изменение положения центра колебаний также превалирует над изменением амплитуды свободных колебаний. Поэтому наступает момент времени, когда перемещения $x(t)$ принимают только отрицательные значения.

Выводы. Вследствие изменения веса осциллятора переменной массы, происходит непрерывное смещение центра его свободных вертикальных колебаний. В результате этого смещения, с течением времени, в неподвижной системе координат, исчезает знакопеременность перемещения $x(t)$, что исключено при свободных вертикальных колебаниях классического линейного осциллятора.

Список використаних джерел

1. Мещерский И.В. Работы по механике тел переменной массы / И.В. Мещерский. – М. : ГИТТЛ, 1952. – 276 с.
2. Светлицкий В.А. Сборник задач по теории колебаний / В.А. Светлицкий, И.В. Стасенко – М. : Высшая школа, 1973. – 456 с.
3. Cveticanin L. Dynamics of Machines with Variable Mass. / L. Cveticanin. Taylor & Francis Ltd, – 1998. – 300 p.
4. Ольшанський В.П. Вільні коливання осцилятора змінної маси / В.П. Ольшанський, С.В. Ольшанський // Вібрації в техніці та технологіях: Всеукр. наук.-техн. журнал. – Вінниця. Вип.2(70). – 2013. – С. 57-59.
5. Абрамовиц А. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами) / А. Абрамовиц, И. Стиган. – М. : Наука, 1979. – 832 с.

Список джерел в транслітерації

1. Meshherskij I.V. Raboty po mehanike tel peremennoj massy / I.V. Meshherskij. – M. : GITTL, 1952. – 276 s.
2. Svetlickij V.A. Sbornik zadach po teorii kolebanij / V.A. Svetlickij, I.V. Stasenko – M. : Vysshaja shkola, 1973. – 456 s.
3. Cveticanin L. Dynamics of Machines with Variable Mass. / L. Cveticanin. Taylor & Francis Ltd, – 1998. – 300 p.
4. Ol'shans'kii V.P. Vil'ni kolivannja osciljatora zminnoï masi / V.P. Ol'shans'kii, S.V. Ol'shans'kii // Vibraciï v tehnici ta tehnologijah: Vseukr. nauk.-tehn. zhurnal. – Vinnicja. Vip.2(70). – 2013. – S. 57-59.

5. Abramovic A. Spravochnik po special'nym funkcijam (s formulami, grafikami i matematicheskimi tablicami) / A. Abramovic, I. Stigan. – M.: Nauka, 1979. – 832 s.

ВІЛЬНІ ВЕРТИКАЛЬНІ КОЛИВАННЯ ОСЦИЛЯТОРА ЛІНІЙНО-ЗМІННОЇ МАСИ

Анотація. *Показано, що вільні коливання осцилятора лінійно-змінної маси є нестаціонарними. Вони відбуваються зі змінними в часі характеристиками: амплітудою та періодом. Крім того, змінюється в часі положення рівноваги, відносно якого відбуваються ці коливання. В результаті зникає знакозмінність переміщення осцилятора, чого немає при вільних вертикальних коливаннях лінійного осцилятора сталої маси.*

Ключові слова: *коливання осцилятора, змінність маси, амплітуда, період, функції Бесселя.*

FRE VERTICAL VIBRATION OF OSCILATOR WITH LINEAR VARIABLE MASS

Annotation. *An oscillator’s free vibrations of an linearly variable mass non-stationary are shown. They occur with variable time parameters: amplitude and period. In addition, the time-varying equilibrium position against which these fluctuations occur. As a result of sign of disappearing moving oscillator, which is not in the free vertical oscillations of a linear oscillator constant mass.*

Key words: *vibration of oscillator, variable mass, amplitude, period, Bessel functions.*