

Лукьяненко В. М.

Харьковский  
национальный  
технический  
университет  
сельского хозяйства  
им. Петра Василенко

УДК 631. 362

## СПОСОБ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ОТРЫВНОГО ДВИЖЕНИЯ ИЗОЛИРОВАННОГО ТЕЛА ПО НАКЛОННОЙ ВИБРИРУЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

*В настоящей работе предложен способ численного решения систем кинематических уравнений для интегрирования траектории движения и поворота тела при его взаимодействии с наклонной вибрирующей поверхностью в режиме движения с отскоком и пространственным соударением с поверхностью.*

*This work contained the method to numeral decision of the systems kinematics equalizations for describing isolate motion of the object on a sloping vibrating surface in the mode of motion with a rebound and of the spatial hitting with a surface.*

При математическом моделировании рабочих процессов, происходящих в виброочистительных машинах имеет место два режима работы таких машин. Это режим безотрывного движения семян по наклонной вибрирующей поверхности, когда используются относительно небольшие амплитуды колебаний рабочей поверхности, и режим движения семян с отрывом, когда используют колебания рабочей поверхности с повышенной амплитудой.

Адекватные математические модели движения зёрен по наклонной вибрирующей поверхности в режимах безотрывного и отрывного движения, которые пригодны для исследования процессов виброочистки, предложены в ряде работ, проведенных ранее [1-6].

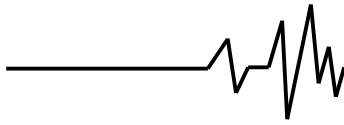
В упомянутых работах авторами рассматривается движение изолированного твёрдого тела эллипсоидной формы по наклонной шероховатой поверхности, либо с качением и проскальзыванием под действием сил гравитации и реакции опоры, либо с отскоком от поверхности с проскальзыванием и качением в точке соударения [4-6]. В предложенных моделях адекватно учитываются основные силы и моменты, действующие на тело, его инерционные, геометрические и кинематические характеристики, которые обуславливают

траекторию движения тела относительно поверхности. Однако, главным недостатком, который затрудняет реализацию данной модели движения зёрен относительно рабочей поверхности виброочистительных машин на современной вычислительной технике, является большая размерность вычислительной задачи и, в связи с этим, трудоёмкость вычислительного алгоритма при проведении численного эксперимента.

В [7] предложен способ линеаризации исходной математической модели безотрывного движения тела по наклонной вибрирующей поверхности, с помощью которого существенно упрощается алгоритм решения задачи. За счёт использования процедуры пошагового интегрирования методом Эйлера система уравнений, с помощью которой определяются кинематические параметры движения тела, сводится к линейной системе из пяти уравнений, решаемой методом Крамера.

Целью данной статьи является разработка метода решения систем уравнений при рассмотрении отрывного движения тела по наклонной вибрирующей поверхности.

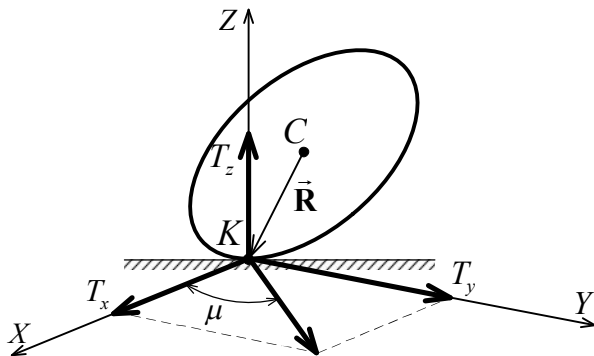
В качестве математической модели отрывного движения изолированного тела используется кинематическая модель упругого пространственного соударения твёрдого тела с рабочей поверхностью [8, 9]. Как и в случае



безотрывного движения, рабочая поверхность совершает гармонические колебания, сообщая, тем самым, необходимое количество движения рассматриваемой кинематической системе.

Тело, движение которого рассматривается, имеет форму эллипсоида с полуосями  $a, b, c$  и массу  $m$ . Для задания формы тела используется его разбивка на дискретные участки контакта, каждый из которых приводится к единственной контактной точке.

Кинематическая модель пространственного удара тела с рабочей поверхностью описывает изменение: ударного импульса в точке соударения, линейной скорости движения центра массы тела и угловой скорости вращения тела относительно его центра массы (Рис. 1).



**Рис. 1. Кинематическая модель пространственного удара тела с рабочей поверхностью**

Соударение тела с рабочей поверхностью происходит в точке контакта  $K$ . В данную точку из центра массы тела  $C$  опускается радиус-вектор  $\vec{R}$ . В точке контакта  $K$  относительно системы координат  $KXYZ$ , связанной с рабочей поверхностью, рассчитывается вектор ударного импульса  $\vec{T} = (T_x, T_y, T_z)$ .

Значения проекций вектора ударного импульса  $\vec{T} = (T_x, T_y, T_z)$  на оси системы координат  $KXYZ$  могут быть рассчитаны путём решения уравнения о сохранении количества движения тела при его приведении в точку контакта  $K$

$$m(\vec{u}_K - \vec{u}_K(0)) = \mathbf{H} \cdot \vec{T}^T, \quad (1)$$

где  $\vec{u}_K = \vec{u}_C + \vec{\omega} \times \vec{R}$  - вектор приведенной к точке контакта скорости движения тела после удара;

$\vec{u}_C$  - вектор скорости движения центра массы тела после удара;

$\vec{u}_K(0)$  - вектор приведенной к точке контакта скорости движения тела до удара;

$\vec{\omega}$  - вектор угловой скорости вращения тела относительно его центра массы после удара;

$\mathbf{H}$  - тензор приведения движения тела в точку контакта.

Физическая суть операции приведения движения тела в точку контакта  $K$  может быть охарактеризована как представление тела в виде материальной точки  $K$ , в которую переводится масса и количество движения рассматриваемого тела.

Тензор приведения  $\mathbf{H}$ , записанный относительно системы координат, связанной с рабочей поверхностью и имеющей начало координат в точке контакта  $K$ , имеет вид симметричной относительно своей диагонали матрицы:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_{xx} & h_{xy} & h_{xz} \\ h_{yx} & h_{yy} & h_{yz} \\ h_{zx} & h_{zy} & h_{zz} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Составляющие тензора приведения вычисляются как

$$h_{xx} = 1 + (\zeta_z \zeta_z)_{yy} + (\zeta_y \zeta_y)_{zz} - 2(\zeta_y \zeta_z)_{yz}, \quad (3)$$

$$h_{yy} = 1 + (\zeta_x \zeta_x)_{zz} + (\zeta_z \zeta_z)_{xx} - 2(\zeta_z \zeta_x)_{zx}, \quad (4)$$

$$h_{zz} = 1 + (\zeta_y \zeta_y)_{xx} + (\zeta_x \zeta_x)_{yy} - 2(\zeta_x \zeta_y)_{xy}, \quad (5)$$

$$h_{xy} = -(\zeta_x \zeta_y)_{zz} - (\zeta_z \zeta_z)_{xy} + (\zeta_z \zeta_x)_{yz} + (\zeta_y \zeta_z)_{zx}, \quad (6)$$

$$h_{yz} = -(\zeta_y \zeta_z)_{xx} - (\zeta_x \zeta_x)_{yz} + (\zeta_x \zeta_y)_{zx} + (\zeta_z \zeta_x)_{xy}, \quad (7)$$

$$h_{zx} = -(\zeta_z \zeta_x)_{yy} - (\zeta_y \zeta_y)_{zx} + (\zeta_y \zeta_z)_{xy} + (\zeta_x \zeta_y)_{yz}, \quad (8)$$

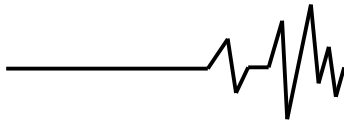
и в силу симметрии

$$h_{yx} = h_{xy}, h_{zy} = h_{yz}, h_{zx} = h_{xz}. \quad (9)$$

Для расчёта величины безразмерных коэффициентов, с помощью которых определяются значения составляющих тензора приведения  $\mathbf{H}$ , используется следующее общее выражение:

$$(\zeta_k \zeta_s)_{ij} = \frac{R_k R_s P_{ij}}{|\mathbf{P}|}, \quad (10)$$

где  $k, s, i, j = 1, 2, 3$  - индексы, обозначающие наименования осей принятой системы координат  $KXYZ$ . Значение 1 соответствует оси  $KX$ . Значение 2 - оси  $KY$ . Значение 3 - оси  $KZ$ ;



$R_k, R_s$  - проекции радиус-вектора  $\vec{R}$  на соответствующие оси координат;

$|P|$  - детерминант тензора инерции рассматриваемого тела;

$P_{ij}$  - алгебраическое дополнение тензора инерции относительно соответствующих осей установленной системы координат.

Тензор инерции  $P$  является квадратной матрицей, элементы которой есть квадраты радиусов инерции тела относительно осей выбранной системы координат:

$$P = \begin{pmatrix} \rho_{xx}^2 & -\rho_{xy}^2 & -\rho_{xz}^2 \\ -\rho_{yx}^2 & \rho_{yy}^2 & -\rho_{yz}^2 \\ -\rho_{zx}^2 & -\rho_{zy}^2 & \rho_{zz}^2 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Радиусы инерции тела относительно рассматриваемых осей координат могут быть вычислены с помощью следующего общего выражения

$$\rho_{ij} = \sum_{r=1}^3 \rho_r \cos \alpha_{ir} \cos \alpha_{jr}, \quad (12)$$

где  $i, j = 1, 2, 3$  - индексы, обозначающие наименования осей принятой системы координат  $KXYZ$ ;

$r = 1, 2, 3$  - индекс, обозначающий наименование оси системы координат  $CXYZ'$ , связанной с телом и имеющей начало в точке, которая совпадает с центром массы тела. Значение 1 соответствует оси  $CX'$ . Значение 2 - оси  $CY'$ . Значение 3 - оси  $CZ'$ . Оси  $CX'$ ,  $CY'$  и  $CZ'$  являются главными центральными осями инерции рассматриваемого тела;

$\rho_r$  - радиус инерции тела относительно какой-либо одной из его главных центральных осей инерции;

$\alpha_{ir}, \alpha_{jr}$  - углы между рассматриваемой главной центральной осью инерции тела и рассматриваемыми осями системы координат, связанной с рабочей поверхностью.

Уравнение (1), записанное для проекций в системе координат  $KXYZ$ , связанной с рабочей поверхностью, примет вид:

$$\begin{cases} m(\dot{x}_k - \dot{x}_k(0)) = h_{xx}T_x + h_{xy}T_y + h_{xz}T_z, \\ m(\dot{y}_k - \dot{y}_k(0)) = h_{yx}T_x + h_{yy}T_y + h_{yz}T_z, \\ m(\dot{z}_k - \dot{z}_k(0)) = h_{zx}T_x + h_{zy}T_y + h_{zz}T_z, \end{cases} \quad (13)$$

где  $\dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{z}_k, T_x, T_y, T_z$  - неизвестные.

Для того, чтобы система уравнений (13) могла быть решена её следует дополнить ещё тремя уравнениями для доведения их числа до числа неизвестных.

В качестве дополнительных соотношений, позволяющих решить

рассматриваемую систему уравнений, рассматривается:

- соотношение, которое учитывает утрату части нормальной скорости движения материальной точки при её столкновении с другим телом (рабочей поверхностью), имеющим большую массу. Нормальная составляющая скорости движения тела, после его столкновения с рабочей поверхностью, меняет направление на противоположное направлению нормальной составляющей его скорости движения до удара. При этом, величина нормальной составляющей скорости после удара уменьшается по сравнению с нормальной скоростью движения тела до удара вследствие рассеивания части энергии на деформацию сталкивающихся тел. Рассмотрение тела в виде материальной точки правомерно, вследствие приведения массы и количества движения тела в точку соударения. То есть:

$$\dot{z}_k = -e \cdot \dot{z}_k(0), \quad (14)$$

- соотношение, которое учитывает уменьшение величины касательной составляющей скорости движения материальной точки относительно рабочей поверхности, с которой она сталкивается. Уменьшение касательной составляющей скорости движения материальной точки происходит вследствие рассеивания части кинетической энергии на работу преодоления сил трения при скольжении по шероховатой поверхности. То есть

$$\dot{x}_k = |V_k| \cos \mu, \quad (15)$$

$$\dot{y}_k = |V_k| \sin \mu, \quad (16)$$

$$|V_k| = (1 - \lambda) \cdot |V_k(0)|, \quad (17)$$

где  $e$  - коэффициент восстановления нормальной составляющей скорости тела в точке контакта после удара;

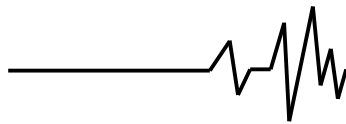
$\lambda$  - коэффициент уменьшения касательной составляющей скорости тела после удара;

$|V_k(0)|, |V_k|$  - величины касательной скорости тела в точке контакта до и после удара;

$\mu$  - угол между касательной составляющей (составляющей, которая лежит в плоскости рабочей поверхности) вектора импульса удара  $\vec{T}$  и его проекцией на ось  $KX$  (Рис. 1). То есть

$$T_y = T_x \cdot \operatorname{tg} \mu. \quad (18)$$

С учётом (13) – (18) система уравнений для вычисления кинематических параметров движения тела после его удара о рабочую поверхность примет вид



$$\begin{cases} m((1-\lambda) \cdot |V_K(0)| \cos \mu - \dot{x}_K(0)) = (h_{xx} + h_{xy} \operatorname{tg} \mu) T_x + h_{xz} T_z, \\ m((1-\lambda) \cdot |V_K(0)| \sin \mu - \dot{y}_K(0)) = (h_{yx} + h_{yy} \operatorname{tg} \mu) T_x + h_{yz} T_z, \\ -m(1+e) \dot{z}_K(0) = (h_{zx} + h_{zy} \operatorname{tg} \mu) T_x + h_{zz} T_z, \end{cases} \quad (19)$$

$$|V_K(0)| = \sqrt{(\dot{x}_K(0))^2 + (\dot{y}_K(0))^2}. \quad (20)$$

Система уравнений (19) является нелинейной и может быть решена одним из известных численных методов решения систем нелинейных уравнений. Например, методом градиентного спуска:

$$\hat{P}[\hat{T}_x, \hat{T}_z, \hat{\mu}] \approx P_s[T_x(s), T_z(s), \mu(s)] = \arg\left(\min_{P_s} \Phi(P_s)\right), \quad (21)$$

$$P_s = P_{s-1} - \Delta_{s-1} \cdot \operatorname{grad} \Phi(P_{s-1}), \quad (22)$$

$$\operatorname{grad} \Phi(P_{s-1}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi(P_{s-1})}{\partial T_x} \\ \frac{\partial \Phi(P_{s-1})}{\partial T_z} \\ \frac{\partial \Phi(P_{s-1})}{\partial \mu} \end{pmatrix}, \quad (23)$$

где  $\hat{P}[\hat{T}_x, \hat{T}_z, \hat{\mu}]$  - точка на поверхности функционала  $\Phi$ , которая является точным решением системы уравнений (19). То есть  $\Phi(\hat{P}) \equiv 0$ ;

$P_s, P_{s-1}$  - последовательность точек, лежащих на поверхности  $\Phi$ , которые определяются путём последовательных спусков вдоль выбранных для соответствующих шагов направлений анти-градиентов;

$\Delta_{s-1}$  - длина рассматриваемого шага градиентного спуска;

$$\frac{\partial \Phi(P_{s-1})}{\partial T_x}, \frac{\partial \Phi(P_{s-1})}{\partial T_z}, \frac{\partial \Phi(P_{s-1})}{\partial \mu} \quad - \text{частные}$$

производные функционала  $\Phi$  по искомым переменным.

Функционал  $\Phi$ , с помощью которого отыскивается решение системы уравнений (19), имеет вид:

$$\begin{aligned} \Phi = & m((1-\lambda) \cdot \sqrt{(\dot{x}_K(0))^2 + (\dot{y}_K(0))^2} \cos \mu - \dot{x}_K(0)) - \\ & - (h_{xx} + h_{xy} \operatorname{tg} \mu) T_x - h_{xz} T_z + \\ & + m((1-\lambda) \cdot \sqrt{(\dot{x}_K(0))^2 + (\dot{y}_K(0))^2} \sin \mu - \dot{y}_K(0)) - \\ & - (h_{yx} + h_{yy} \operatorname{tg} \mu) T_x - h_{yz} T_z - \\ & - m(1+e) \dot{z}_K(0) - (h_{zx} + h_{zy} \operatorname{tg} \mu) T_x - h_{zz} T_z \end{aligned} \quad (24)$$

Частные производные функционала по искомым переменным имеют вид:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial T_x} = -(h_{xx} + h_{xy} \operatorname{tg} \mu) - (h_{yx} + h_{yy} \operatorname{tg} \mu) - (h_{zx} + h_{zy} \operatorname{tg} \mu), \quad (25)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial T_z} = -h_{xz} - h_{yz} - h_{zz}, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} = & -m \cdot (1-\lambda) \cdot \sqrt{(\dot{x}_K(0))^2 + (\dot{y}_K(0))^2} \sin \mu + \\ & + m \cdot (1-\lambda) \cdot \sqrt{(\dot{x}_K(0))^2 + (\dot{y}_K(0))^2} \cos \mu - \frac{(h_{yy} + h_{zy})}{\cos^2 \mu} T_x \end{aligned} \quad (27)$$

Длина шага при градиентном спуске определяется как результат решения следующей задачи:

$$\Xi(\Delta_s) = \Phi(P_s - \Delta_s \cdot \operatorname{grad} \Phi(P_s)) \rightarrow \min_{\Delta_s \in \Psi}, \quad (28)$$

$$\Psi: \forall s, s=1, 2, \dots, S, \Delta_{\max} \geq \Delta_s \geq 0. \quad (29)$$

Определение  $\Delta_s$ , при котором достигается  $\min H(\Delta_s)$ , осуществляется методом золотого сечения. При использовании данного метода на числовой оси, которой принадлежат  $\Delta_s, s=1, 2, \dots, S$ , где  $S$  - количество вычислительных шагов при отыскании  $\min \Phi$ , берутся такие значения  $\Delta_{\min}, \Delta_{\max}$ , для которых известно, что:  $\Delta_{\min} \leq \Delta_{\text{opt}} \leq \Delta_{\max}$ ,  $\Xi(\Delta_{\text{opt}}) = \min \Xi(\Delta)$ .

Для выбранного отрезка  $[\Delta_{\min}; \Delta_{\max}]$  вычисляются координаты двух симметричных точек, каждая из которых определяется на основании свойств золотого сечения отрезка:

$$l_1 = \Delta_{\min} + (3 - \sqrt{5}) \cdot \frac{(\Delta_{\max} - \Delta_{\min})}{2}, \quad (30)$$

$$l_2 = \Delta_{\min} + (\sqrt{5} - 1) \cdot \frac{(\Delta_{\max} - \Delta_{\min})}{2}. \quad (31)$$

В точках золотых сечений вычисляются значения функции  $\Xi$ :

$$\Xi_1^{(1)} = \Xi(l_1), \quad (32)$$

$$\Xi_2^{(1)} = \Xi(l_2). \quad (33)$$

Далее, если  $\Xi_1^{(1)} \leq \Xi_2^{(1)}$ , то отрезок, который содержит экстремальную точку  $\Delta_{\text{opt}}$ , задаётся следующим образом:

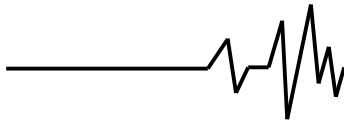
$$\Delta_{\min}^{(1)} = \Delta_{\min}, \quad (34)$$

$$\Delta_{\max}^{(1)} = l_2. \quad (35)$$

При этом, исходя из чудесного свойства золотого сечения:

$$l_2^{(1)} = l_1, \quad (36)$$

а координата левой точки золотого сечения для вновь заданного отрезка  $[\Delta_{\min}^{(1)}; \Delta_{\max}^{(1)}]$  будет вычисляться как:



$$l_1^{(i)} = \begin{cases} l' = \Delta_{\min}^{(i)} + (3 - \sqrt{5}) \cdot \frac{(\Delta_{\max}^{(i)} - \Delta_{\min}^{(i)})}{2}, & \text{если } |l_2^{(i)} - l'| \geq |l_2^{(i)} - l''|, \\ l'' = \Delta_{\min}^{(i)} + (\sqrt{5} - 1) \cdot \frac{(\Delta_{\max}^{(i)} - \Delta_{\min}^{(i)})}{2}, & \text{если } |l_2^{(i)} - l'| \leq |l_2^{(i)} - l''|. \end{cases} \quad (37)$$

То есть выбирается та точка, которая наиболее удалена от полученной на предыдущем шаге правой точки золотого сечения.

Если  $\Xi_1^{(i)} \geq \Xi_2^{(i)}$ , то соответственно:

$$\Delta_{\max}^{(i)} = \Delta_{\max}, \quad (38)$$

$$\Delta_{\min}^{(i)} = l_1, \quad (39)$$

$$l_1^{(i)} = l_2, \quad (40)$$

а  $l_2^{(i)}$  определяется с помощью формул, которые приведены выше для точки золотого сечения, которая наиболее удалена от левой точки золотого сечения вновь полученного отрезка.

Последовательно выполняя описанные вычислительные шаги, отрезок  $[\Delta_{\min}^{(r)}; \Delta_{\max}^{(r)}]$ ,  $r = 1, 2, \dots, R$  стягивается. Момент завершения расчётов по определению  $\Delta_{\text{opt}}^s$  определяется, либо когда  $r = R$ , где  $R$  - заданное количество вычислительных шагов, либо по достижении заданной точности  $\Delta_{\max}^{(r)} - \Delta_{\min}^{(r)} \leq \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  - заданная абсолютная точность вычислений.

Прекращение вычислений по решению системы уравнений (19) также осуществляется, либо по выполнении установленного количества вычислительных шагов  $S$ , либо по приближении рассматриваемого функционала к нулю с заданной точностью:  $\Phi(P_s) \leq \delta$ .

На основании решения системы уравнений (19), с учётом (20), вычисляются значения величин  $T_x$ ,  $T_z$  и угла  $\mu$ . После чего, с учётом (14) – (18), определяются значения проекций скорости тела в точке контакта после удара  $\dot{x}_k$ ,  $\dot{y}_k$ ,  $\dot{z}_k$  и проекция импульса удара на ось  $KY$  -  $T_y$ . Для известных величин проекций импульса удара проекции скорости движения центра массы тела определяются как

$$\begin{cases} \dot{x}_c = \frac{T_x}{m} + \dot{x}_c(0), \\ \dot{y}_c = \frac{T_y}{m} + \dot{y}_c(0), \\ \dot{z}_c = \frac{T_z}{m} + \dot{z}_c(0), \end{cases} \quad (41)$$

где  $\dot{x}_c(0)$ ,  $\dot{y}_c(0)$ ,  $\dot{z}_c(0)$  - проекции скорости движения центра массы тела до удара.

Проекции угловой скорости вращения тела относительно центра масс, при известной скорости движения центра массы и кинематических параметрах движения тела в точке контакта, определяются путём решения уравнения:

$$\bar{\mathbf{H}} - \bar{\mathbf{H}}(0) = \bar{\mathbf{R}} \times \bar{\mathbf{T}}, \quad (42)$$

где  $\bar{\mathbf{H}}$ ,  $\bar{\mathbf{H}}(0)$  - векторы моментов количества движения тела после и до соударения, соответственно.

После преобразований (42) может быть записано в виде системы из трёх линейных уравнений относительно скоростей изменения углов Эйлера после удара, если заданы значения этих углов до удара [8, 9] и известен импульс удара

$$\begin{cases} a_{11}\dot{\theta} + a_{12}\dot{\psi} + a_{13}\dot{\phi} = b_1, \\ a_{21}\dot{\theta} + a_{22}\dot{\psi} + a_{23}\dot{\phi} = b_2, \\ a_{31}\dot{\theta} + a_{32}\dot{\psi} + a_{33}\dot{\phi} = b_3, \end{cases} \quad (43)$$

где  $\{a_{ij}\}$ ,  $\{b_i\}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$  - постоянные коэффициенты. Значения данных коэффициентов определяются на каждом шаге вычислений с помощью следующих выражений

$$a_{11} = J'_x \cos \varphi(0), \quad (44)$$

$$a_{12} = J'_x \sin \theta(0) \sin \varphi(0), \quad (45)$$

$$a_{13} = 0, \quad (46)$$

$$a_{21} = -J'_y \sin \varphi(0), \quad (47)$$

$$a_{22} = J'_y \sin \theta(0) \cos \varphi(0), \quad (48)$$

$$a_{23} = 0, \quad (49)$$

$$a_{31} = 0, \quad (50)$$

$$a_{32} = J'_z \cos \varphi(0), \quad (51)$$

$$a_{33} = J'_z, \quad (52)$$

$$b_1 = R'_y T'_z - R'_z T'_y + J'_x \left[ \dot{\psi}(0) \sin \theta(0) \sin \varphi(0) + \dot{\theta}(0) \cos \varphi(0) \right], \quad (53)$$

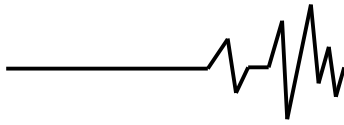
$$b_2 = R'_z T'_x - R'_x T'_z + J'_y \left[ \dot{\psi}(0) \sin \theta(0) \cos \varphi(0) - \dot{\theta}(0) \sin \varphi(0) \right], \quad (54)$$

$$b_3 = R'_x T'_y - R'_y T'_x + J'_z \left[ \dot{\phi}(0) + \dot{\theta}(0) \cos \theta(0) \right], \quad (55)$$

где  $J'_x$ ,  $J'_y$ ,  $J'_z$  - моменты инерции тела относительно его главных центральных осей инерции;

$R'_x$ ,  $R'_y$ ,  $R'_z$  - проекции радиус-вектора  $\bar{\mathbf{R}}$  на оси собственной системы координат тела (центральные оси инерции);

$T'_x$ ,  $T'_y$ ,  $T'_z$  - проекции вектора импульса удара на центральные оси инерции тела.



Величины проекций радиус-вектора  $\vec{R}$  и вектора импульса  $\vec{T}$  на оси собственной системы координат тела рассчитываются с помощью соотношений для учёта поворота осей

$$\begin{cases} R'_x = R_x \cdot l_1 + R_y \cdot m_1 + R_z \cdot n_1, \\ R'_y = R_x \cdot l_2 + R_y \cdot m_2 + R_z \cdot n_2, \\ R'_z = R_x \cdot l_3 + R_y \cdot m_3 + R_z \cdot n_3, \end{cases} \quad (56)$$

$$\begin{cases} T'_x = T_x \cdot l_1 + T_y \cdot m_1 + T_z \cdot n_1, \\ T'_y = T_x \cdot l_2 + T_y \cdot m_2 + T_z \cdot n_2, \\ T'_z = T_x \cdot l_3 + T_y \cdot m_3 + T_z \cdot n_3, \end{cases} \quad (57)$$

где  $l_i, m_i, n_i, i = 1, 2, 3$  - направляющие косинусы, задающие поворот осей собственной системы координат тела относительно осей системы координат, связанной с рабочей поверхностью.

Система уравнений (58) является линейной относительно неизвестных и поэтому может быть решена одним из известных методов решения систем линейных уравнений. Например, методом Крамера, в соответствии с которым:

$$\dot{\theta} = \frac{b_1(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - b_2(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + b_3(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})}{a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})}, \quad (58)$$

$$\dot{\psi} = \frac{-b_1(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + b_2(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - b_3(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})}{a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})}, \quad (59)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{b_1(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) - b_2(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) + b_3(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}{a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})}, \quad (60)$$

где  $\{a_{ij}\}, \{b_i\}, i, j = 1, 2, 3$  - коэффициенты системы уравнений (43).

При рассмотрении движения тела, совершающего полёт после отрыва от рабочей поверхности, его движение представляется как движение материальной точки (центра массы тела  $C$ ) и вращательное движение относительно этой точки. Интегрирование движения тела осуществляется по координатам местоположения центра массы тела относительно рабочей поверхности  $x_c(s), y_c(s), z_c(s)$  и углам Эйлера (углам поворота собственных осей координат относительно осей координат, связанных с рабочей поверхностью)  $\theta(s), \psi(s), \varphi(s)$ , где  $s = 1, 2, \dots, S$  - номер шага, определяющего рассматриваемый момент времени  $t_s = t_0 + s \cdot \Delta t$  при пошаговом продвижении по оси времени,

$\Delta t$  - выбранный шаг продвижения по оси времени.

Значения координат местоположения центра массы и углов Эйлера для  $s$ -го момента времени (шага вычислений) определяются с помощью следующих выражений

$$\begin{cases} \dot{x}_c(s) = \dot{x}_c + \sum_{k=1}^s (\ddot{x}_{вб.}(t_k) - g \sin \beta) \Delta t, \\ \dot{y}_c(s) = \dot{y}_c + \sum_{k=1}^s (\ddot{y}_{вб.}(t_k) - g \operatorname{tg} \alpha \cos \beta \cos \delta) \Delta t, \\ \dot{z}_c(s) = \dot{z}_c + \sum_{k=1}^s (\ddot{z}_{вб.}(t_k) - g \cos \delta) \Delta t, \\ x_c(s) = x_c(0) + \sum_{k=1}^s \dot{x}_c(k) \Delta t, \\ y_c(s) = y_c(0) + \sum_{k=1}^s \dot{y}_c(k) \Delta t, \\ z_c(s) = z_c(0) + \sum_{k=1}^s \dot{z}_c(k) \Delta t, \end{cases} \quad (61)$$

$$\begin{cases} \theta(s) = \theta(0) + \dot{\theta} \cdot s \cdot \Delta t, \\ \psi(s) = \psi(0) + \dot{\psi} \cdot s \cdot \Delta t, \\ \varphi(s) = \varphi(0) + \dot{\varphi} \cdot s \cdot \Delta t, \end{cases} \quad (62)$$

где  $\delta$  - угол наибольшего наклона рабочей поверхности;

$\alpha, \beta$  - углы наклона рабочей поверхности по отношению к горизонтальной плоскости. Угол  $\alpha$  характеризует наклон продольной оси рабочей поверхности к плоскости горизонта. Угол  $\beta$  характеризует наклон поперечной оси рабочей поверхности к плоскости горизонта;

$g$  - ускорение свободного падения;

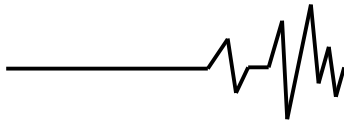
$x_c(0), y_c(0), z_c(0), \theta(0), \psi(0), \varphi(0)$  -

координаты местоположения центра массы и углы Эйлера, которые соответствуют моменту отрыва тела от рабочей поверхности после удара;

$\ddot{x}_{вб.}(t_k), \ddot{y}_{вб.}(t_k), \ddot{z}_{вб.}(t_k)$  - значения проекций ускорения рабочей поверхности на оси системы координат, связанной с рабочей поверхностью;

$\dot{\theta}, \dot{\psi}, \dot{\varphi}$  - угловые скорости вращения тела относительно осей собственной системы координат, которые получены телом в момент удара. Величины скоростей изменения углов Эйлера рассчитываются с помощью (43).

Интегрирование уравнений движения тела в полёте (61), (62) выполняется до момента наступления условия соударения тела с рабочей поверхностью. Условие соударения



тела, совершающего полёт, с рабочей поверхностью имеет вид

$$z_c(s) \leq |KC(s)|, \quad (63)$$

где  $|KC(s)|$  - расстояние от центра массы тела до точки  $K$ , являющейся одним из дискретных узлов, с помощью которых задаётся поверхность тела, для которого координата  $z_k(s)$  является наименьшей из всех. Расчёт значений  $z_k(s)$  осуществляется для заданных углов  $\theta(s)$ ,  $\psi(s)$ ,  $\varphi(s)$ .

Последующий этап интегрирования движения тела осуществляется при условии, что рассчитанной величины импульса удара тела достаточно для его отрыва от рабочей поверхности. Данное условие, условие достаточности импульса удара, записывается как

$$\dot{z}_c > 0, \quad (64)$$

где  $\dot{z}_c$  - проекция на ось  $Z$  системы координат, связанной с рабочей поверхностью, скорости движения центра массы тела после его удара о рабочую поверхность.

Если вертикальная составляющая скорости движения тела относительно рабочей поверхности меньше либо равна нулю  $\dot{z}_c \leq 0$ , тогда интегрирование движения тела осуществляется по выражениям, записанным для безотрывного режима движения тела.

Таким образом, в данной статье предложен метод численного решения систем кинематических уравнений, описывающих движение тела с отрывом от рабочей поверхности. Предлагаемый метод использует процедуру градиентного спуска при решении системы нелинейных уравнений пространственного удара тела с рабочей поверхностью.

Результаты, представленные в данной статье, целесообразно использовать при разработке алгоритмов программ, реализующих на современных ЭВМ математические модели движения зёрен по рабочим поверхностям виброочистительных машин.

### Литература

1. Движение тел круглой формы по вибрирующей ребристой плоскости в безотрывном режиме [Текст] / П.М. Заика, В.Я. Ильин, В.А. Сметанкин // Применение

новейших математических методов и вычислительной техники в решении инженерных задач: сб. науч. тр. МИИСП. Т. 13, Вып. 10.- М.: МИИСП, 1976.- С. 51-55.

2. Движение семян круглой формы по вибрирующей ребристой плоскости в одноударном периодическом режиме [Текст] / П.М. Заика, В.А. Гудым, П.М. Юдицкий // Совершенствование конструкций, улучшение ремонта и эксплуатации с.-х. техники: сб. науч. тр. ХСХИ.— Харьков: ХСХИ, 1985.— С. 31-42.

3. Жмай Л.Г. Обоснование параметров технологического процесса очистки и сортирования семян овощных культур на вибрационной семяочистительной машине [Текст]: Авторефер. дис. канд. техн. наук / Харьков. ин-т мех. и электр. с. х.— Харьков, 1990.- 20 с.

4. Лук'яненко В.М. Визначення параметрів ребристої робочої поверхні вібраційної машини при сепарації насіння еліптичної форми [Текст] / В.М. Лук'яненко, О.О. Жилина, О.В. Лук'яненко // Журн. «Вібрації в техніці і технологіях».- 2006.-№ 1. – С. 62-67.

5. Тищенко Л.Н. Движение семян рапса по вибрирующей ребристой поверхности в гипотезе вязкого трения [Текст] / Л.Н. Тищенко, В.М. Лукьяненко, Е.А. Жилина, В.Н. Кись, А.В. Лукьяненко // Журн. «Вібрації в техніці і технологіях».- 2011.-№ 1 (61). – С. 172-176.

6. Движение семян эллиптической формы по вибрирующей ребристой поверхности в гипотезе сухого трения [Текст] / Л.Н. Тищенко, В.М. Лукьяненко, Е.А. Жилина, И.В. Галич, А.А. Никифоров // Якість технологій та освіти: зб. наук. праць УІПА. -№2. – Харків: ФОРМ Тимченко А.М., 2011.- С. 52-56.

7. Лукьяненко В.М. Способ численного решения системы уравнений безотрывного движения изолированного тела по наклонной вибрирующей поверхности [Текст] / В.М. Лукьяненко, // Журн. «Вібрації в техніці і технологіях».- 2012.-№ 3(67). – С. 48-53.

8. Манчинський Ю.О. Обґрунтування параметрів розділення насінневих сумішей на віброуючій поверхні [Текст]: Авторефер. дис. докт. техн. наук / Нац. агр. ун-т.— К: НАУ, 2000. - 36 с.

9. Манчинський Ю.О. Обґрунтування параметрів робочого органу вібраційної машини для розділення насінневих сумішей [Текст] / Ю.О. Манчинський. – Харків: Око, 1997.— 127 с.