

Мартыненко Г. Ю.

Национальный  
технический  
университет  
«Харьковский  
политехнический  
институт»

Martynenko G. Y.

National Technical  
University "Kharkiv  
Polytechnic Institute"

УДК 531.382:621.822.527

## ПРИМЕНИМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ДИНАМИКИ РОТОРОВ В МАГНИТНЫХ ПОДШИПНИКАХ

*Предложена аналитическая модель для описания динамики жестких роторов в магнитных подшипниках. Она учитывает нелинейную взаимосвязь механических и электромагнитных процессов в системе. Достоверность модели подтверждена сопоставлением расчетных и экспериментальных данных. Проведены численные исследования для одного из возможных вариантов комбинированного магнитного подвеса роторов турбодетандеров. Оценка результатов позволила выявить недостатки линеаризованных и сделать вывод о целесообразности применения нелинейных моделей для адекватного описания динамики таких систем.*

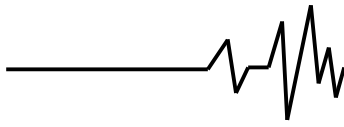
**Ключевые слова:** динамика ротора, магнитный подшипник, аналитическая модель.

**Введение.** В современных роторных машинах (турбогенераторах, центрифугах, центробежных компрессорах и насосах, турбодетандерах, детандер-компрессорных агрегатах т.д.) все чаще вместо подшипников скольжения и качения применяются магнитные подшипники (МП) [1-4]. Этот тип опор роторов обладает целым рядом преимуществ: отсутствие смазочных систем, а значит упрощение и удешевление конструкции турбомашин и снижение ее пожароопасности; сокращение потерь на трение из-за отсутствия механического контакта между ротором и статором; уменьшение эксплуатационных затрат, так как мощность, потребляемая электромагнитами, в 2-3 раза меньше мощности трения в подшипниках скольжения; увеличение ресурса опорного узла, так как ресурс МП соизмерим с ресурсом машины в целом [5].

На практике для обеспечения устойчивого подвешивания роторов в основном применяется два типа магнитных подшипников – активные магнитные подшипники (АМП) [6-10] и пассивные магнитные подшипники на постоянных магнитах (МППМ) [11]. Первый тип используется гораздо чаще, так как он позволяет гибко варьировать характеристики опор за счет подбора вида и параметров

закона управления токами в обмотках электромагнитов [10]. Это дает возможность обеспечить требуемые силовые и жесткостные характеристики подшипников, а также позволяет изменять их в процессе работы, тем самым обеспечивая отстройку от резонансов в процессе разгона ротора [12]. В отличие от АМП, являющихся управляемыми электромеханическими устройствами, в которых стабилизация положения ротора реализуется силами магнитного притяжения, МППМ не нуждаются в источниках электроэнергии, им не нужна система автоматического регулирования, которая составляет основную часть стоимости АМП, но они имеют относительно низкую жесткость, которая не может изменяться. Конструктивно МППМ выполняются с использованием двух или более магнитных колец с осевой или радиальной намагниченностью, а стабилизация положения ротора осуществляется силами магнитного притяжения или отталкивания.

**Постановка задачи.** Анализ существующих монографий [3-4, 6-10], а также большого количества статей и материалов конференций различных авторов, посвященных проблеме анализа и синтеза роторных систем с магнитными подшипниками, позволяет сделать



вывод о преобладающем упрощенном подходе к математическому моделированию динамики их роторов. Эти упрощения сводятся к следующему: дифференциальные уравнения движения ротора линеаризуются; магнитные силы описываются упрощенными формулами, не учитывающими неравномерность зазора и магнитное сопротивление магнитопроводов АМП; не учитывается влияние смещений в одном направлении на величину магнитной силы в другом, что приводит к фактическому разделению системы уравнений на отдельные не связанные уравнения и др.

В работе ставится задача по проверке адекватности предложенного в [13] способа аналитического описания динамики роторов в магнитных подшипниках различных типов (АМП и МППМ) с учетом нелинейного характера связей между электрическими, магнитными и механическими процессами, происходящими в системе, и с возможностью включения в математическую модель закона управления системы регулирования АМП, конфигурации магнитопроводов статорных и роторных частей АМП, силовых характеристик МППМ и др. Доказательству того факта, что только при таком подходе могут быть корректно описаны все процессы и посвящена данная работа. При этом особое внимание при постановке задачи уделено доказательству необходимости учета нелинейностей различного характера и анализу влияния их неучета в математической модели на близость численно полученных с ее использованием результатов моделирования различных явления роторной динамики к экспериментальным данным.

Таким образом, математическая модель динамики ротора в магнитных подшипниках должна иметь возможность описания колебаний, вызванных неуровненностью, анизотропией и нелинейностью магнитных опор, а также учитывать запаздывание в электрических цепях АМП, закон управления в системе автоматического регулирования АМП, неравномерность воздушного зазора между цапфой на роторе и полюсами статора АМП или подвижным и неподвижными постоянными кольцевыми магнитами в МППМ и др.

При сравнительном качественном анализе расчетных и экспериментальных результатов главным является тот факт, что неуровненный ротор всегда совершает колебания с основной частотой, т.е. с частотой вращения ротора  $\omega$ . Причем возникающие центробежные силы могут вызывать не только вертикальные и горизонтальные вибрации, но и при определенных условиях – осевые [14 с. 58]. Однако возможно проявление и характерных

особенностей колебаний, определяемых неподвижной анизотропией опор, которая заключается в различии их жесткости в двух перпендикулярных направлениях [15 с. 165]. Такая анизотропия зачастую характерна магнитным подшипникам, что приводит к раздвоению резонансов и наличию прямой и обратной прецессий ротора.

Необходимо также учитывать, что на собственные частоты и критические скорости ротора могут оказывать влияние двойная жесткость вала, растягивающая сила в осевом направлении, вызванная действием в разных направлениях на рабочие колеса газодинамической нагрузки, зависящей от частоты вращения, а также малая изгибная жесткость консолей с рабочими колесами. Однако все эти факторы могут быть учтены только в модели гибкого ротора.

Исследования вибраций, источниками которых являются другие причины, такие как, конструктивные особенности роторных систем, газодинамические факторы, электромагнитные взаимодействия [14-18], представляют собой отдельные задачи и здесь не решаются.

Резюмируя сказанное, следует особо отметить, что для описания возможных в системе колебательных явлений при установке ротора в МП применение нелинейных моделей является предпочтительным, как и для других роторных систем с различными особенностями [19], хотя в большинстве работ используются линейные (линеаризованные) модели [3, 6-9]. Иллюстрации именно этого факта на примере рассмотрения одного из видов полного магнитного подвеса ротора и посвящена данная работа.

**Объект и цель исследований.** Анализ динамического поведения ротора в МП выполнялся для лабораторной установки ротора в полном комбинированном пассивно-активном магнитном подвесе, являющемся прототипом магнитного подвеса ротора детандер компрессорного агрегата [20]. Схема полного магнитного подвеса ротора, включающего два радиальных МППМ 1,2 и один осевой АМП 3, представлена на рисунке 1, а сама установка – на рисунке 2.

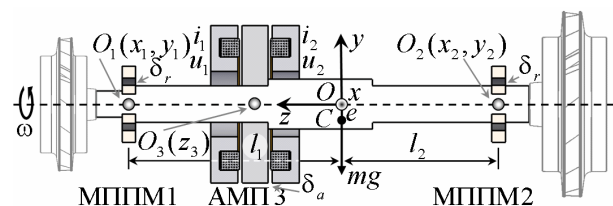


Рис. 1. Схема полного подвеса ротора в МП

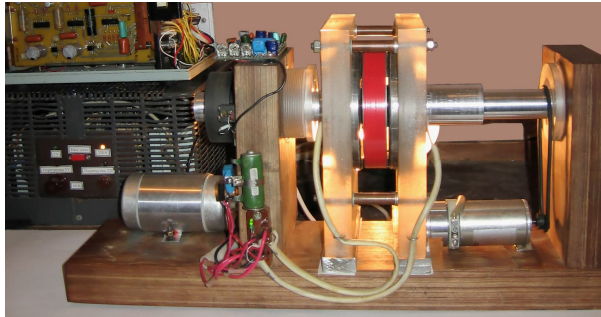
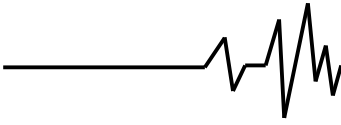


Рис. 2. Лабораторная установка

Цель экспериментальных и расчетных исследований – определение возможных в такой системе явлений роторной динамики и обоснованный выбор математического аппарата для их описания. Причем анализу подвергаются именно критические режимы, обусловленные особенностями такой системы.

**Экспериментальные исследования.**

Изучение динамики модельного ротора в комбинированном магнитном подвесе выполнялось с использованием оригинального специализированного программно-аппаратного комплекса [21]. При проведении экспериментов скорость вращения ротора варьировалась в диапазоне от 0 до 3000 об/мин. При этом дискретно для выбранных значений частоты вращения фиксировались осциллограммы движения центров опорных участков ротора, их траектории движения и спектрограммы. Последние позволили построить АЧХ, которые представлены на рисунке 3.

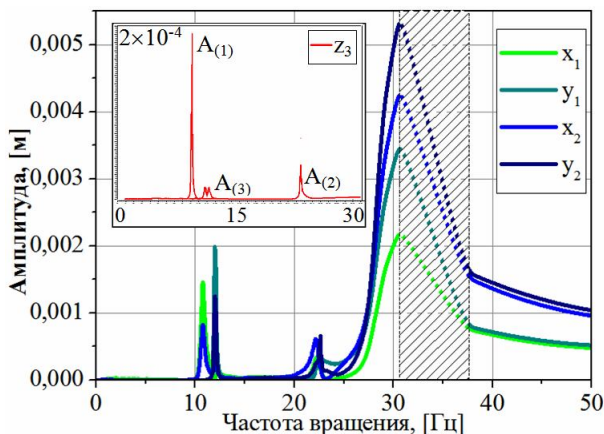


Рис. 3. Экспериментально полученная АЧХ

Подробный анализ результатов, а также обнаруженных явлений роторной динамики, присущих данной системе, приведен в [22], а для оценки адекватности различных аналитических математических моделей далее используются только приведенные на рис. 3 зависимости амплитуд первой гармоники

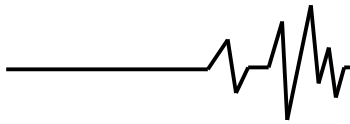
виброперемещений центров опорных участков от частоты вращения.

**Математическое моделирование.**

Аналитическая нелинейная модель динамики жесткого ротора модельной установки в МП различных типов (МППМ и АМП) базируется на предложенном ранее общем подходе, который представлен в работах [13, 23]. Она основана на дифференциальных уравнениях Лагранжа-Максвелла в форме Рауса относительно двух групп переменных – обобщенных координат  $x_1, \dots, z_3$  (перемещений центров опорных участков ротора  $O_1, O_2, O_3$ ) и потокоцеплений  $\Psi_{c1}, \Psi_{c2}$  (полных магнитных потоков через контуры катушек) (рис. 1). Примем, что все обобщенные координаты перемещения ротора  $x_1, \dots, z_3$ , параметры неуровновешенности  $e_1, e_2$  (линейные) и  $\gamma_1, \gamma_2$  (угловые), а также зазоры в МП –  $\delta_r$  (радиальный в МППМ),  $\delta_a$  (осевой в АМП) имеют одинаковый порядок малости. Тогда учитывая это предположение о малости обобщенных координат и их производных, нелинейные слагаемые уравнений движения можно считать малыми по сравнению с линейными членами [23]. Исключая из рассмотрения слагаемые уравнений движения, порядок малости которых выше третьего, приходим к полностью связанной системе семи нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих динамику рассматриваемой электромагнитомеханической системы [13]:

$$\begin{cases}
 m_{11}\ddot{x}_1 + m_{12}\ddot{x}_2 + j(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + f_{x1}'' + f_{x1}''' + b_{x1}\dot{x}_1 = \\
 \quad = -F_{Mx}(x_1, y_1) + Q_{x1} + H_{x1}(t), \\
 m_{22}\ddot{x}_2 + m_{12}\ddot{x}_1 - j(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + f_{x2}'' + f_{x2}''' + b_{x2}\dot{x}_2 = \\
 \quad = -F_{My}(x_1, y_1) + Q_{x2} + H_{x2}(t), \\
 m_{11}\ddot{y}_1 + m_{12}\ddot{y}_2 - j(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + f_{y1}'' + f_{y1}''' + b_{y1}\dot{y}_1 = \\
 \quad = -F_{Mx}(x_2, y_2) + Q_{y1} + H_{y1}(t), \\
 m_{22}\ddot{y}_2 + m_{12}\ddot{y}_1 + j(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + f_{y2}'' + f_{y2}''' + b_{y2}\dot{y}_2 = \\
 \quad = -F_{My}(x_2, y_2) + Q_{y2} + H_{y2}(t), \\
 m\ddot{z}_3 + f_{z3}'' + f_{z3}''' + b_{z3}\dot{z}_3 = -F_{Mz}(x_1, y_1, z_1) - \\
 \quad - F_{Mz}(x_2, y_2, z_2) - \frac{\partial W}{\partial z_3} + Q_{z_3} + H_{z_3}(t), \\
 \dot{\Psi}_{c1} + r_{c1} \frac{\partial W}{\partial \Psi_{c1}} = u_{c1}(z_3), \\
 \dot{\Psi}_{c2} + r_{c2} \frac{\partial W}{\partial \Psi_{c2}} = u_{c2}(z_3);
 \end{cases} \quad (1)$$

где  $m$  – масса ротора;  $m_{ks}, j$  – инерционные и гироскопические коэффициенты;  $b_{x1, \dots, z3}$  – коэффициенты вязкости;  $f''$  и  $f'''_{x1, \dots, z3}(x_1, \dots, \ddot{z}_3)$  – нелинейные слагаемые уравнений движения, обусловленные силами инерции и



потенциального поля второго и третьего порядка по отношению к обобщенным координатам и их производным по времени, т.е. порядка сравнимого с порядком зависимостей магнитных сил в МППМ  $F_{My}(x,y)$ ,  $F_{Mx}(x,y)$ ,  $F_{Mz}(x,y,z)$ ;  $Q_{x1,...,z3}$  – другие обобщенные силы, в частности, сила тяжести;  $H_{x1,...,z3}(t)$  – внешние гармонические возмущающие силы и моменты, вызванные линейной и угловой неуравновешенностями;  $\omega$  – угловая скорость ротора;  $r_{c1,2}$  – активные сопротивления в цепях обмоток АМП 3 (рис. 1);  $W = W(x_1, x_2, y_1, y_2, z_3, \Psi_{c1}, \Psi_{c2})$  – магнитная энергия в АМП 3.

Выражения, находящиеся в уравнениях (1), внешних возмущающих сил, вызванных неуравновешенностью, а также инерционных и гироскопических коэффициентов имеют вид:

$$\begin{cases} m_{11} = (ml_2^2 + J_1) / l^2; m_{12} = (ml_1l_2 - J_1) / l^2; \\ m_{22} = (ml_1^2 + J_1) / l^2; j = \omega J_3 / l^2; \\ H_{x1}(t) = M_{11}E_x + J\Gamma_x; H_{x2}(t) = M_{22}E_x - J\Gamma_x; \\ H_{y1}(t) = M_{11}E_y - J\Gamma_y; H_{y2}(t) = M_{22}E_y + J\Gamma_y; \\ E_x = e_1 \cos(\omega t) - e_2 \sin(\omega t); \\ E_y = e_1 \sin(\omega t) + e_2 \cos(\omega t); \\ \Gamma_x = \gamma_1 \sin(\omega t) + \gamma_2 \cos(\omega t); \\ \Gamma_y = \gamma_1 \cos(\omega t) - \gamma_2 \sin(\omega t); \\ M_{11} = ml_2\omega^2 / l; M_{22} = ml_1\omega^2 / l; \\ J = \omega^2 (J_1 - J_3) / l. \end{cases} \quad (2)$$

Слагаемые второго порядка, которые находятся в левых частях уравнений движения в (1) имеют вид:

$$\begin{cases} f_{x1}'' = -m\ddot{z}_3 E_x / l; f_{x2}'' = m\ddot{z}_3 E_x / l; \\ f_{y1}'' = -m\ddot{z}_3 E_y / l; f_{y2}'' = m\ddot{z}_3 E_y / l; \\ f_{z3}'' = m \left[ (\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) - \omega^2 (x_2 - x_1) + 2\omega(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) \right] E_x + \\ + \left[ (\ddot{y}_2 - \ddot{y}_1) - \omega^2 (y_2 - y_1) - 2\omega(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \right] E_y / l. \end{cases} \quad (3)$$

Нелинейные слагаемые третьего порядка ввиду громоздкости записей здесь не приводятся (они даны в [23]), однако именно в них проявляется полная взаимосвязь между всеми обобщенными координатами посредством членов, не зависящих от параметров неуравновешенности.

Нахождение выражения для магнитной энергии  $W$  и связи между потокоцеплениями  $\Psi_{c1,2}$  и токами  $i_{1,2}$  (рис. 1) выполнено на основе рассмотрения эквивалентных схем замещения электромагнитной цепи АМП 3 и схематизации путей магнитных потоков [24].

Так для осевого АМП 3 (рис. 1)

выражение магнитной энергии имеет вид [24]:

$$W = \frac{1}{2} \left[ (R_{mcs1} + R_{g1} + R_{g2}) \Psi_{c1}^2 / w_1^2 + (R_{mcs2} + R_{g3} + R_{g4}) \Psi_{c2}^2 / w_2^2 + R_{mcr} (\Psi_{c1} / w_1 + \Psi_{c2} / w_2)^2 \right] \quad (4)$$

где  $R_{mcs1}$ ,  $R_{mcs2}$  и  $R_{mcr}$  – магнитные сопротивления стальных магнитопроводов первого и второго статоров и ротора;  $R_{g1} = R_{g1}(x_1, \dots, z_3)$ ,  $R_{g2} = R_{g2}(x_1, \dots, z_3)$  и  $R_{g3} = R_{g3}(x_1, \dots, z_3)$ ,  $R_{g4} = R_{g4}(x_1, \dots, z_3)$  – магнитные сопротивления воздушных зазоров между полюсами первого и второго статоров и ротором соответственно;  $w_1$  и  $w_2$  – количество витков в обмотках АМП.

**Варианты линеаризации уравнений движения (зависимостей магнитных сил в подшипниках).** На рисунке 4 представлены графики зависимостей восстанавливающих магнитных сил, действующих в МППМ на роторный магнит при его смещении в радиальном и осевом направлениях (рис. 1). При этом радиальные усилия носят нелинейный характер, близкий к кубической зависимости, и приближенно могут быть аппроксимированы полиномами третьей степени, зависящими от одной переменной.

Силовая характеристика осевого АМП, полученная с помощью аналитического способа анализа электромагнитных цепей активных магнитных подшипников с целью нахождения выражений магнитных сил и энергии для случая плоскопараллельного зазора между диском и полюсами статоров [24], представлена на рисунке 5.

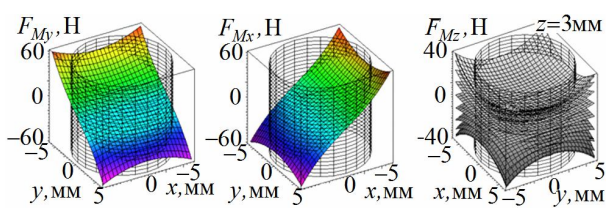


Рис. 4. Зависимости магнитных сил в МППМ от смещения роторного магнита

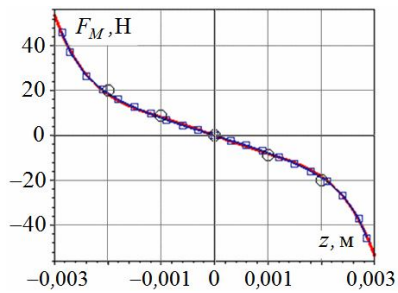
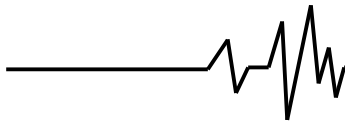


Рис. 5. Зависимость магнитной силы в осевом АМП от осевого смещения



Так как целью исследований является выбор наиболее адекватной аналитической модели, математически описывающей динамическое поведение роторов в магнитных подшипниках сравнительному анализу подвергаются результаты, полученные с помощью различных моделей: 1) нелинейной – с учетом нелинейных слагаемых сил инерции и нелинейных силовых характеристик магнитных подшипников (5); 2) нелинейной – без нелинейных слагаемых сил инерции, но с нелинейными силовыми характеристиками МП (5); 3) линеаризованных – без нелинейных слагаемых сил инерции и с линеаризованными различными способами магнитными силами, полученными исходя из равенства магнитных сил (6) или жесткостей (7) в положении статического равновесия. При этом выражения для магнитных сил имеют вид:

$$F_{M\rho}(\rho) = k_2\rho^3 + k_1\rho^2 + k_0\rho, \quad (5)$$

$$F_{M\rho 1}(\rho) = (k_2\rho_{ст}^2 + k_1\rho_{ст} + k_0)\rho, \quad (6)$$

$$F_{M\rho 2}(\rho) = \frac{\partial F_M(\rho_{ст})}{\partial \rho} \rho = (3k_2\rho_{ст}^2 + 2k_1\rho_{ст} + k_0)\rho, \quad (7)$$

где  $\rho$  – радиальные смещения  $x$  или  $y$ ,  $\rho_{ст}$  – смещения, соответствующие положению статического равновесия  $x_{ст}$  или  $y_{ст}$ .

Зависимость осевой восстанавливающей магнитной силы в осевом АМП 3 определяется последними двумя уравнениями относительно потокосцеплений в (1) с учетом примененного оригинального алгоритма управления (т.е. формирования  $u_{ck}$ ) [24] и используется в пятом уравнении посредством члена  $-\partial W / \partial z_3$ .

**Результаты решения задачи о вынужденных нелинейных колебаниях.** Исследуемая система – это ротор массой 2,5 кг в полном магнитном подвесе (рис. 1), в котором в качестве радиальных опор применены МППМ 1 и 2, а в качестве осевой – АМП 3. Основные параметры системы имеют такие значения:  $l_1=0,106$  м,  $l_2=0,176$  м,  $J_1=0,0107$  кг·м<sup>2</sup>,  $J_3=0,0034$  кг·м<sup>2</sup>,  $\delta_r=5,5 \cdot 10^{-3}$  м,  $\delta_a=3 \cdot 10^{-3}$  м,  $\gamma=0,003$  рад,  $e=6 \cdot 10^{-5}$  м и  $b_{x1, \dots, z3}=2,325$  кг/с.

Предварительным этапом оценки адекватности математической модели (1) являлись расчеты собственных частот и форм колебаний невращающегося жесткого ротора в МП, которые выполнялись с использованием линеаризованной системы уравнений без учета демпфирования. Их результаты приведены в таблице 1. Уточнение значений критических скоростей выполнялось с помощью Кэмбэлл-диаграммы, представленной на рисунке 6. Сравнительный анализ критических скоростей (табл. 1), определенных без и с учетом

зависимости от  $\omega$ , показал, что наибольшее влияние этот учет оказывает на критические частоты, соответствующие конической прецессии ротора (рис. 6).

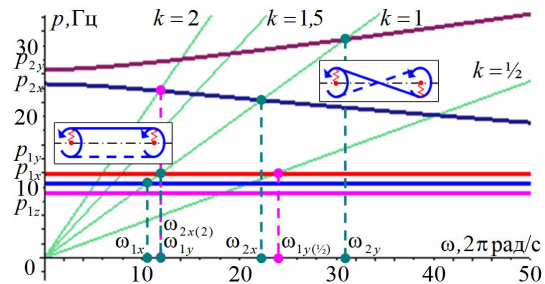


Рис. 6. Резонансная диаграмма (Кэмбелла)

Таблица 1  
Собственные частоты и критические скорости ротора

Собственная частота, Гц	Критическая скорость, 2π рад/с	Критическая скорость при p=p(ω), 2π рад/с
$p_{1z}=9,21$	$\omega_{1z}=9,21$	$\omega_{1z}=9,20$
$p_{1x}=10,57$	$\omega_{1x}=10,57$	$\omega_{1x}=10,55$
$p_{1y}=11,91$	$\omega_{1y}=11,91$	$\omega_{1y}=11,90$
$p_{2x}=24,59$	$\omega_{2x}=24,59$	$\omega_{2x}=22,30$
$p_{2y}=26,62$	$\omega_{2y}=26,62$	$\omega_{2y}=30,90$

При этом значения критических скоростей прямой и обратной прецессий, полученных с помощью диаграммы Кэмбелла, отличаются от экспериментальных данных не более чем на 0,5% (рис. 3), что является подтверждением адекватности аналитической модели (1) даже при использовании ее в линеаризованном виде.

Решение системы нелинейных уравнений (1), представляющей собой нелинейную математическую модель 1 (п. 5), выполнялось численно методом Рунге-Кутты 7-8 порядков для фиксированных значений угловой скорости. При этом с помощью специального подхода была обеспечена высокая сходимость решения [25]. Результаты расчетных исследований вынужденных колебаний – это решения на стационарных участках для обобщенных координат  $x_1, y_1, x_2, y_2, z_3$  в диапазоне угловой скорости 0-100π рад/с. Они представлены на рис. 7 в виде зависимостей амплитуд гармоник  $A$ , полученных с помощью БПФ, от угловой частоты вынуждающей силы  $\omega_0$ , вызванной собственной неуравновешенностью ротора. Эта частота соотносится с угловой скоростью ротора как  $\omega_0=\omega$ . На рис. 7 приняты обозначения:  $A_{(1)}$  – амплитуды первых гармоник,  $A_{(1/n)}$  – суб- и  $A_{(n)}$  – супергармоник (рис. 7а и б,в), где число в скобках – кратность частоты гармоники основной частоте  $\omega_0$ , а пунктирными

линиями показаны скелетные кривые.

Первый резонансный режим на частоте  $\omega_{1z}$  соответствует поступательным колебаниям ротора в направлении оси  $z$ . После прохождения этой частоты осевые колебания отличаются наличием как супер-, так и субгармоник, что является следствием нелинейности силовой характеристики АМПЗ. Порядок этой нелинейности по отношению к обобщенным координатам равен пяти (рис. 5).

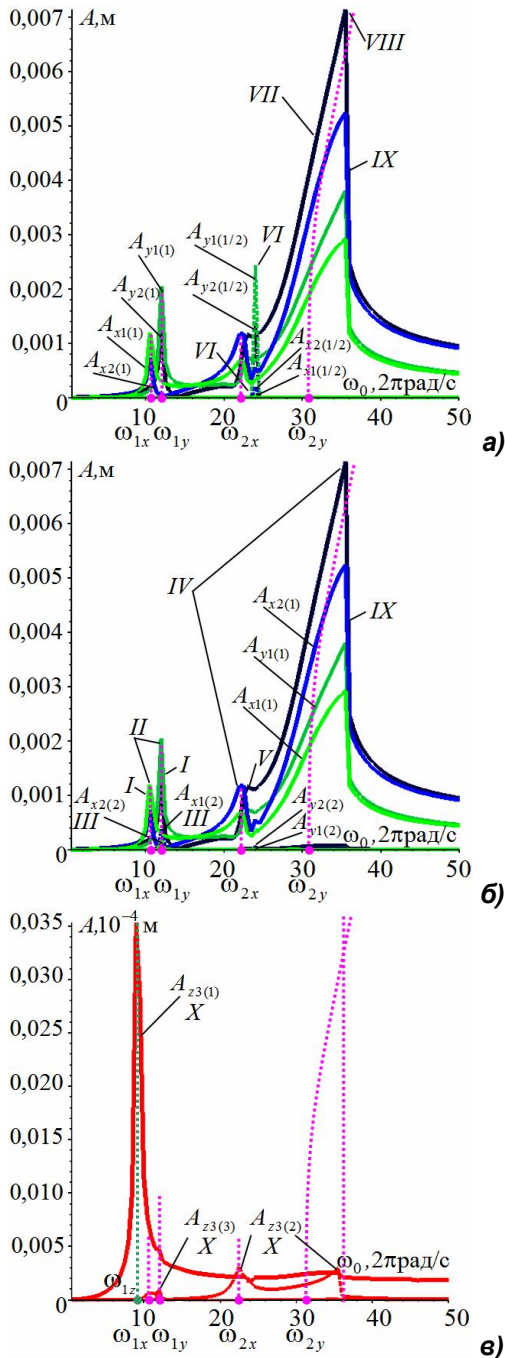
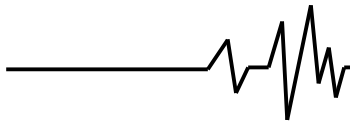


Рис. 7. Зависимости амплитуд гармоник от частоты вынуждающей силы (модель 1): а, б)  $x_1, y_1, x_2, y_2$ ; в)  $z_3$

Дальнейший анализ результатов позволил обнаружить в системе «ротор в магнитных подшипниках» наличие нелинейных явлений роторной динамики (рис. 7), таких как: супергармонические колебания в области второго резонансного режима (I); раздвоение второго резонанса вследствие анизотропии жесткости МППМ в горизонтальном и вертикальном направлениях, причем при  $\omega < \omega_{1x}$  и  $\omega > \omega_{1y}$  ротор совершает движение типа прямой, а в диапазоне между этими критическими скоростями  $\omega_{1x} < \omega < \omega_{1y}$  – типа обратной цилиндрической прецессии (рис. 6) (II); суперрезонансные колебания  $\omega_{2x(2)}$ , которые совпадают с внутренним резонансом  $\omega_{2x(2)} = \omega_{1y}$  (рис. 6) (III); раздвоение третьего резонанса вследствие анизотропии жесткости МППМ, причем при  $\omega < \omega_{2x}$  и  $\omega > \omega_{2y}$  ротор совершает движение типа прямой, а в диапазоне между этими критическими скоростями  $\omega_{2x} < \omega < \omega_{2y}$  – типа обратной конической прецессии (рис. 6) (IV); внешний резонанс  $\omega_{1x} + \omega_{1y} \approx \omega_0$  (V); субрезонансные колебания  $\omega_{1y(1/2)}$ , которые усиливаются внутренним резонансом  $\omega_{1y(1/2)} = 2\omega_{1y} = 2\omega_{2x(2)}$  (рис. 6, 7а,б), причем эти субгармонические колебания возникают при относительно больших частотах возбуждения, а их амплитуды значительно превосходят амплитуды первой гармоники (VI) [26 с. 31]; вид резонансных кривых в области третьего резонансного режима ( $\omega_{2x}, \omega_{2y}$ ) характерен системам с жесткими характеристиками восстанавливающей силы, что справедливо для МППМ (VII); третий резонансный режим более опасен чем второй, так как сопровождается значительным увеличением амплитуд из-за того, что при движении типа конической прецессии (угловых колебаниях) нарушается плоскопараллельность зазоров в осевом АМП, что приводит к возникновению момента, совпадающего по направлению с угловым отклонением ротора (VIII); в области частот, в которых возможны два устойчивых режима вынужденных колебаний с двумя различными амплитудами, наблюдается срыв колебаний (IX); основные и супергармонические резонансные колебания в осевом направлении возбуждаются нагрузкой, действующей в радиальном направлении (собственной неуравновешенностью ротора) (рис. 7в и а,б), что является следствием учета взаимосвязи между радиальными и осевой обобщенными координатами посредством нелинейных членов уравнений движения (1) (X).

Все описанные нелинейные явления, обнаруженные в системе при проведении численных исследований с использованием аналитической модели (1), подтверждают ее



полную адекватность при сравнении с экспериментально полученными АЧХ (рис. 3) и зависимостями от частоты вынуждающей силы амплитуд гармоник, отличных от первой [21-22]. Так, сравнительный анализ результатов позволил установить тождественность как по качественному отображению происходящих в системе процессов, так и по количественному определению их параметров – по амплитудам отличие не превышает 2-3%, а по значениям резонансных частот – 0,2-0,5%.

**Сравнительный анализ результатов решения, полученных с помощью линеаризованных математических моделей.** Выяснение целесообразности применения нелинейной модели 1 (п. 5) при исследовании динамики роторных систем с магнитными подшипниками проводилось путем сравнения приведенных выше результатов (рис. 6 и 7) с данными, полученными с использованием линеаризованных аналитических моделей.

На рисунке 8 представлены результаты расчетов, выполненных с применением модели 2 (п. 5).

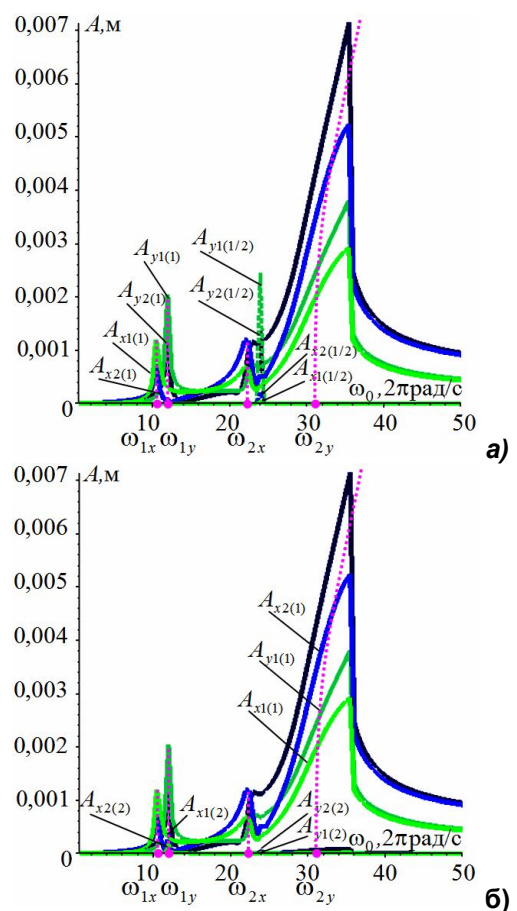


Рис. 8. Зависимости амплитуд гармоник от частоты вынуждающей силы (модель 2)

Их анализ показывает, что учет в уравнениях (1) нелинейных слагаемых сил инерции не позволяет описать колебания, возбуждаемые в осевом направлении, хотя данный факт был установлен и при проведении экспериментальных исследований (рис. 6), и при проведении расчетных экспериментов на модели 1 (рис. 7). Это свидетельствует о некоторой неадекватности линеаризованной модели 2. При этом значения резонансных частот, сведенные в таблицу 2 (как для этого, так и для других вариантов линеаризации аналитической модели) полностью совпадают, а зависимости основной, супер- и субгармоник полностью идентичны полученным при использовании нелинейной модели 1, что говорит о возможности применения модели 2, но с некоторыми допущениями и оговорками.

На рисунке 9 представлены результаты расчетов, выполненных с применением модели 3, линеаризованной путем исключения из уравнений (1) нелинейных слагаемых сил инерции и использования линейных зависимостей магнитных сил (6) (п. 5).

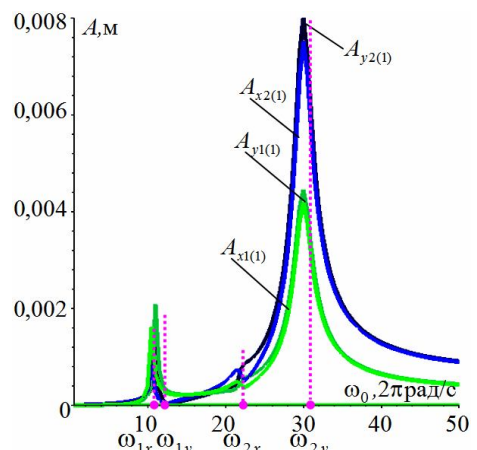
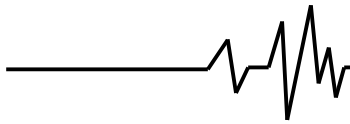


Рис. 9. АЧХ (модель 3 с силами  $F_{M\rho 1}$ )

**Таблица 2**  
Резонансные частоты, рассчитанные с помощью различных линеаризованных моделей [2π рад/с]

Модель 2 с силами $F_{M\rho}$	Модель 3 с силами $F_{M\rho 1}$	Модель 3 с силами $F_{M\rho 2}$
$\omega_{1x}=10,5$	$\omega_{1x}=10,5$	$\omega_{1x}=10,5$
$\omega_{1y}=12,0$	$\omega_{1y}=11,0$	$\omega_{1y}=12,0$
$\omega_{2x}=22,5$	$\omega_{2x}=21,0$	$\omega_{2x}=22,0$
$\omega_{2y}=35,5$ (срыв)	$\omega_{2y}=30,0$	$\omega_{2y}=31,0$
$\omega_{2x(2)}=12,0$	-	-
$\omega_{1y(1/2)}=24,0$	-	-

Обнаружено, что данная математическая модель позволяет описать раздвоение резонансов, наблюдаемое в системе из-за



анизотропии жесткости радиальных МППМ, а также движение типа прямой и обратной, цилиндрической и конической прецессий. Однако частоты резонансных режимов определяются с погрешностью ~6-8% (табл. 2), а амплитуды, соответствующие резонансным режимам, отличаются на ~10-30% (рис. 9). Кроме того, поведение системы линейно, нет супер- и субгармоник, не отображены области частот, в которых возможны несколько устойчивых режимов вынужденных колебаний, колебания в осевом направлении не возбуждаются.

Ситуация с описанием явлений динамики становится чуть лучше при использовании модели 3 с силами (7) (п. 5), о чем свидетельствуют результаты расчетов, приведенные на рисунке 10.

В этом случае значения резонансных частот ближе к полученным с помощью нелинейной модели и определяются с погрешностью ~1-4% (табл. 2), однако амплитуды, соответствующие им, также отличаются от эталонных на ~10-40% (рис. 10).

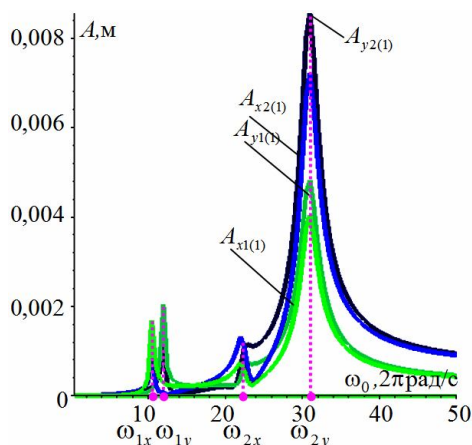


Рис. 10. АЧХ (модель 3 с силами  $F_{M\rho 2}$ )

При использовании этой аналитической линеаризованной модели, как и в предыдущем случае, имеется возможность отразить раздвоение резонанса из-за анизотропии жесткости радиальных МППМ, движение типа прямой и обратной, цилиндрической и конической прецессии и нет возможности описать любые нелинейные эффекты типа супер- и субгармонических колебаний и резонансов, взаимосвязи колебаний в осевом и радиальном направлениях.

**Заключение.** В работе предложена аналитическая модель, которая учитывает нелинейную взаимосвязь механических и электромагнитных процессов в системе «ротор в магнитных подшипниках». Ее адекватность и

применимость для изучения динамики жестких роторов в магнитных подшипниках различных типов подтверждена экспериментально.

В результате использования этой модели при проведении численных экспериментов для лабораторной установки, реализующей комбинированный магнитный подвес ротора определено, что при действии на ротор гармонической вынуждающей силы в радиальном направлении и вызванной собственной неуравновешенностью ротора, кроме гармонических колебаний с частотой возбуждения одновременно происходят супер- и субгармонические колебания не только в радиальных направлениях, но и в осевом, а также проявляются другие нелинейные явления роторной динамики, такие как супер- и субрезонансные колебания, при которых ротор совершает движения типа прямой и обратной цилиндрической или конической прецессий.

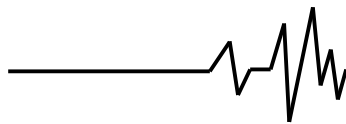
Кроме того, рассмотрены различные способы, которые позволяют выполнить линеаризацию предложенной математической модели для снижения требований к вычислительным ресурсам при проведении предварительных расчетных исследований. Каждый из них обладает своими недостатками, а линеаризованные математические модели, основанные на них, позволяют определять основные динамические характеристики лишь с некоторой степенью достоверности, что сужает границы их применимости.

Данные исследования доказывают, что нелинейные аналитические модели предпочтительнее использовать в имитационных вычислительных моделях для численного исследования механизмов возбуждения пространственных колебаний вращающихся жестких роторов, выяснения условий существования различных резонансных режимов, характерных подобным системам, супер-, субгармонических и комбинационных колебаний, а также применяться для апробации алгоритмов управления и выбора оптимальных параметров магнитного подвеса.

#### Список использованных источников

1. Siegart R. Industrial Magnetic Bearings – Basics and Applications / R. Siegart, H. Bleuler, A. Traxler // Mechatronic Systems Techniques and Applications. –Vol. 4: Electromechanical Systems / Edited by Cornelius T. Leondes. –Amsterdam: Gordon and Breach Science Publisher, 2000. – Pp. 1-70.
2. Брюне М. Применение активных магнитных подшипников в турбокомпрессорах и турбодетандерах газовой промышленности /





М. Брюне, И. Детомб // Компрессорная техника и пневматика. –2001. –№7. –С. 17-19.

3. Magnetic Bearings and Bearingless Drives / [A. Chiba, T. Fukao, O. Ichikawa, and other]. –Oxford: Elsevier Linacre House, 2005. – 381 p.

4. Schweitzer G. Applications and Research Topics for Active Magnetic Bearings / G. Schweitzer // IUTAM Bookseries. –Vol. 25: IUTAM Symposium on Emerging Trends in Rotor Dynamics, New Delhi, India, March 23-26, 2009: Proceedings / Ed. K. Gupta. –Dordrecht: Springer, 2011. –Pp. 263-273.

5. Ануров Ю.М. Разработка и эксплуатация серийных энергетических ГТУ на магнитных подшипниках / Ю.М. Ануров, Е.В. Литвинов // Восточно-европейский журнал передовых технологий. –2009. –№4/4, Ч. 1. – С. 20-24.

6. Schweitzer G. Active Magnetic Bearings / G. Schweitzer, H. Bleuler and A. Traxler. –Zurich: ETH, 1994. –244 p.

7. Maslen E.H. Magnetic Bearings / E.H. Maslen. –Virginia: University of Virginia Department of Mechanical, Aerospace, and Nuclear Engineering Charlottesville, 2000. –231 p.

8. Журавлев Ю.Н. Активные магнитные подшипники: Теория, расчет, применение / Ю.Н. Журавлев. –СПб: Политехника, 2003. –206 с.

9. Magnetic Bearings. Theory, Design, and Application to Rotating Machinery / [G. Schweitzer, E.H. Maslen, H. Bleuler, and other]; Editors G. Schweitzer and E.H. Maslen. – Berlin: Springer, 2009. –535 p.

10. Active Magnetic Bearings - a Step Towards Smart Rotating Machinery / [R. Nordmann, M. Aenis, E. Knopf, and S. Strabburger] // Vibrations in Rotating Machinery: Seventh International Conference: IMechE Conference Transactions. –London: Professional Engineering Publishing, 2000. –Pp. 1-19.

11. Jansen R. Passive Magnetic Beating With Ferrofluid Stabilization / R. Jansen and E. DiRusso. –Cleveland: Lewes Research Center, 1996. –154 p. –(NASA Technical Memorandum 107154).

12. Martynenko G. Method of detuning from resonance modes for rotors in active magnetic bearings with nonlinear force characteristics / G. Martynenko // Нелинейная динамика: 3-я междунар. конф., Харьков, 21-24 сент. 2010 г.: тез. докл. –Харьков: ЭДЭНА, 2010. –С. 135-140.

13. Мартыненко Г.Ю. Общий подход к моделированию нелинейной динамики жестких роторов в магнитных подшипниках различных типов // Доповіді НАН України. –2012. –№3. – С. 78-84.

14. Липсман С.И. Предупреждение и

устранение вибрации роторных машин / С.И. Липсман, А.Т. Музыка, В.С. Липсман. –К.: Техніка, 1968. –196 с.

15. Иноземцев А.А., Нихамкин М.А., Сандратский В.Л. Основы конструирования авиационных двигателей и энергетических установок. – М. : Машиностроение, 2008. – Т. 4: Динамика и прочность авиационных двигателей и энергетических установок. – 204 с.

16. Вибрации роторных систем / [Рагульскис К.М., Ионушас Р.А., Бакшис А.К. и др.]. – Вильнюс: Мокслас, 1976. –232 с.

17. Кельзон А.С., Журавлев Ю.Н., Январев Н.В. Расчет и конструирование роторных машин. – Л. : Машиностроение (Ленинград, отд-ние), 1977. –288 с.

18. Кельзон А.С., Циманский Ю.П., Яковлев В.И. Динамика роторов в упругих опорах. – М. : Наука, 1982. – 280 с.

19. F. Ehrich Observations of Nonlinear Phenomena in Rotordynamics // Journal of System Design and Dynamics. – 2008. –Vol. 2, № 3. – P. 641-651.

20. Бухолдин Ю.С. Особенности модифицирования ротора детандер-компрессорного агрегата для применения опор на постоянных магнитах / Ю.С. Бухолдин, В.А. Левашов, В.Г. Гадяка, Г.Ю. Мартыненко // Компрессорная техника и пневматика. – М. : ИИЦ КХТ, 2012. – № 4. –С. 22-28.

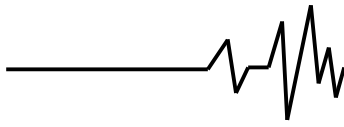
21. Мартыненко Г.Ю. Методика экспериментальных исследований динамики модельного ротора в комбинированном магнитном подвесе // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»: зб. наук. праць. –Х. : НТУ «ХПІ», 2013. – № 58. – С. 125-135.

22. Мартыненко Г.Ю. Результаты экспериментальных исследований и анализ динамики модельного ротора в магнитных подшипниках разных типов // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»: зб. наук. праць. –Х. : НТУ «ХПІ», 2013. – №63. –С. 90-101.

23. Мартыненко Г.Ю. Математическое описание динамического поведения ротора в магнитных подшипниках в зависимости от принятых упрощений. Часть 1. Жесткий ротор // Вісник НТУ «ХПІ». – Харьков: НТУ «ХПІ», 2009. – № 30. – С. 95-119.

24. Мартыненко Г.Ю. Способ аналитического определения магнитных сил в активных магнитных подшипниках роторных машин // Восточно-европейский журнал передовых технологий. –2010. –№3/3. –С. 67-73.

25. Мартыненко Г.Ю. Исследование устойчивости движения ротора в управляемых



электромагнитных подшипниках с помощью нелинейной имитационной вычислительной модели / Проблемы машиностроения. – Харьков: ИПМаш НАН Украины, 2005. – Т.8, №1. – С. 47-58.

26. Вибрации в технике: [справ.]. В 6-ти т. – Т. 2: Колебания нелинейных механических систем / Под ред. И.И. Блехмана. – М. : Машиностроение, 1979. – 351 с.

#### Список источников в транслитерации

1. Siegwart R. Industrial Magnetic Bearings – Basics and Applications / R. Siegwart, H. Bleuler, A. Traxler // Mechatronic Systems Techniques and Applications. – Vol. 4: Electromechanical Systems / Edited by Cornelius T. Leondes. – Amsterdam: Gordon and Breach Science Publisher, 2000. – Pp. 1-70.

2. Bryune M. Primeneniye aktivnykh magnitnykh podshipnikov v turbokompressorakh i turbodetanderakh gazovoy promyshlennosti / M. Bryune, I. Detomb // Kompessornaya tekhnika i pnevmatika. – 2001. – №7. – S. 17-19.

3. Magnetic Bearings and Bearingless Drives / [A. Chiba, T. Fukao, O. Ichikawa, and other]. – Oxford: Elsevier Linacre House, 2005. – 381 p.

4. Schweitzer G. Applications and Research Topics for Active Magnetic Bearings / G. Schweitzer // IUTAM Bookseries. – Vol. 25: IUTAM Symposium on Emerging Trends in Rotor Dynamics, New Delhi, India, March 23-26, 2009: Proceedings / Ed. K. Gupta. – Dordrecht: Springer, 2011. – Pp. 263-273.

5. Anurov Yu.M. Razrabotka i ekspluatatsiya seriynykh energeticheskikh GTU na magnitnykh podshipnikakh / Yu.M. Anurov, Ye.V. Litvinov // Vostochno-yevropeyskiy zhurnal peredovykh tekhnologiy. – 2009. – №4/4, Ch. 1. – S. 20-24.

6. Schweitzer G. Active Magnetic Bearings / G. Schweitzer, H. Bleuler and A. Traxler. – Zurich: ETH, 1994. – 244 p.

7. Maslen E.H. Magnetic Bearings / E.H. Maslen. – Virginia: University of Virginia Department of Mechanical, Aerospace, and Nuclear Engineering Charlottesville, 2000. – 231 p.

8. Zhuravlev Yu.N. Aktivnyye magnitnyye podshipniki: Teoriya, raschet, primeneniye / Yu.N. Zhuravlev. – SPb: Politehnika, 2003. – 206 s.

9. Magnetic Bearings. Theory, Design, and Application to Rotating Machinery / [G. Schweitzer, E.H. Maslen, H. Bleuler, and other]; Editors G. Schweitzer and E.H. Maslen. – Berlin: Springer, 2009. – 535 p.

10. Active Magnetic Bearings - a Step Towards Smart Rotating Machinery / [R. Nordmann, M. Aenis, E. Knopf, and S. Straburger] // Vibrations in Rotating Machinery: Seventh

International Conference: IMechE Conference Transactions. – London: Professional Engineering Publishing, 2000. – Pp. 1-19.

11. Jansen R. Passive Magnetic Beating With Ferrofluid Stabilization / R. Jansen and E. DiRusso. – Cleveland: Lewes Research Center, 1996. – 154 p. – (NASA Technical Memorandum 107154).

12. Martynenko G. Method of detuning from resonance modes for rotors in active magnetic bearings with nonlinear force characteristics / G. Martynenko // Nelineynaya dinamika: tretya mezhdunar. konf., Kharkov, 21-24 sent. 2010 g.: tez. dokl. – Kharkov: EDENA 2010. – S. 135-140.

13. Martynenko G.Yu. Obschiy podkhod k modelirovaniyu nelineynoy dinamiki zhestkikh rotorov v magnitnykh podshipnikakh razlichnykh tipov // Doklady NAN Ukrainy. – 2012. – №3. – S. 78-84.

14. Lipsman S.I. Preduprezhdeniye i ustraneniye vibratsii rotornykh mashin / S.I. Lipsman, A.T. Muzyka, V.S. Lipsman. – K.: Tekhnika, 1968. – 196 s.

15. Inozemtsev A.A., Nikhamkin M.A., Sandratskiy V.L. Osnovy konstruirovaniya aviatsionnykh dvigateley i energeticheskikh ustanovok. – M.: Mashinostroyeniye, 2008. – Т. 4: Dinamika i prochnost aviatsionnykh dvigateley i energeticheskikh ustanovok. – 204 s.

16. Vibratsiya rotornykh sistem / [Ragulskis K.M., Ionushas R.A., Bakshis A.K. i dr.]. – Vilnius: Mokslas, 1976. – 232 s.

17. Kelzon A.S., Zhuravlev Yu.N., Yanvarev N.V. Raschet i konstruirovaniye rotornykh mashin. – L.: Mashinostroyeniye (Leningrad, otd-niye), 1977. – 288 S.

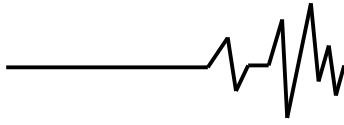
18. Kelzon A.S., Tsimanskiy Yu.P., Yakovlev V.I. Dinamika rotorov v uprugikh oporakh. – M.: Nauka, 1982. – 280 s.

19. F. Ehrich Observations of Nonlinear Phenomena in Rotordynamics // Journal of System Design and Dynamics. – 2008. – Vol. 2, № 3. – P. 641-651.

20. Bukholdin Yu.S. Osobennosti modifitsirovaniya rotora detander-kompressorogo agregata dlya primeneniya opor na postoyannyykh magnitakh / Yu.S. Bukholdin, V.A. Levashov, V. Gadyaka, G.Yu. Martynenko // Kompessornaya tekhnika i pnevmatika. – M. : IITS KKHT 2012. – №4. – S. 22-28.

21. Martynenko G.Yu. Metodika eksperimentalnykh issledovaniy dinamiki modelnogo rotora v kombinirovannom magnitnogo podvese // Vestnik Natsional'nogo tekhnicheskogo universiteta «Kharkovskiy politehnicheskii institut»: sb. nauk. trudov. – Kh. : NTU «KhPI», 2013. – № 58. – S. 125-135.

22. Martynenko G.Yu. Rezultaty eksperimentalnykh issledovaniy i analiz dinamiki



modelnogo rotora v magnitnykh podshipnikakh raznykh tipov // Vestnik Natsional'nogo tekhnicheskogo universiteta «Kharkovskiy politekhnicheskiiy institut»: sb. nauk. trudov. –Kh.: NTU «KhPI», 2013. –№63. –S. 90-101.

23. Martynenko G.Yu. Matematicheskoye opisaniye dinamicheskogo povedeniya rotora v magnitnykh podshipnikakh v zavisimosti ot prinyatykh uproshtchen. Chast 1. Zhestkiy rotor // Vestnik NTU «KhPI». –Kharkov: NTU «KhPI», 2009. – №30. –S. 95-119.

24. Martynenko G.Yu. Spособ analiticheskogo opredeleniya magnitnykh sil v aktivnykh magnitnykh podshipnikakh rotornykh mashin // Vostochno-yevropeyskiy zhurnal peredovykh tekhnologiy. – 2010. – №3/3. – S. 67-73.

25. Martynenko G.Yu. Issledovaniye ustoychivosti dvizheniya rotora v upravlyayemykh elektromagnitnykh podshipnikakh s pomoshchyu nelineynoy imitatsionnoy vychislitelnoy modeli / Problemy mashinostroyeniya. –Kharkov: IPMash NAN Ukrainy, 2005. –Т.8, №1. –S. 47-58.

26. Vibratsiya v tekhnike: [sprav.]. V 6-ti t. - Т. 2: Kolebaniya nelineynykh mekhanicheskikh sistem / Pod red. I.I. Blekhmana. – М. : Mashinostroyeniye, 1979. –351 s.

#### **ЗАСТОСОВНІСТЬ НЕЛІНІЙНИХ АНАЛІТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ОПИСУ ДИНАМІКИ РОТОРІВ У МАГНІТНИХ ПІДШИПНИКАХ**

**Анотація.** Запропоновано аналітичну модель для опису динаміки жорстких роторів в

магнітних підшипниках. Вона враховує нелінійний взаємозв'язок механічних і електромагнітних процесів в системі. Достовірність моделі підтверджена зіставленням розрахункових і експериментальних даних. Проведено чисельні дослідження для одного з можливих варіантів комбінованого магнітного підвісу роторів турбодетандерів. Оцінка результатів дозволила виявити недоліки лінеаризованих і зробити висновок про доцільність застосування нелінійних моделей для адекватного опису динаміки таких систем.

**Ключові слова:** динаміка ротора, магнітний підшипник, аналітична модель.

#### **APPLICABILITY OF NONLINEAR ANALYTICAL MODELS TO DESCRIBE THE DYNAMICS OF ROTORS ON MAGNETIC BEARINGS**

**Annotation.** The analytical model for describing the dynamics of rigid rotors on magnetic bearings is introduced. It takes into account the nonlinear relationship of mechanical and electromagnetic processes in the system. The reliability of the model is confirmed by experimental data. The numerical researches for one possible variant of turbo-expanders magnetic suspension rotor are carried out. Estimated results revealed shortcomings of the linearized models. Based on this conclusion the need of using nonlinear models for adequate description of the dynamics of such systems is proved.

**Key words:** rotor dynamics, magnetic bearing, analytical model.