

Надутый В. П.  
Ягнюков В. Ф.  
Ягнюкова И. В.

*Институт  
геотехнической  
механики  
им. Н.С. Полякова  
НАН Украины*

Nadutyu V. P.  
Iagniuikov V. F.  
Iagniuikova I. V.

*M.S. Polyakov Institute of  
Geotechnical Mechanics  
under the NAS of Ukraine*

УДК 622.74.913.1

## ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КУСКОВ МАТЕРИАЛА С ФУТЕРОВАННЫМ ВАЛКОМ ВИБРАЦИОННОГО КЛАССИФИКАТОРА

Цель данной статьи состоит в том, чтобы получить больше информации о взаимодействии кусков материала с футерованным валком вибрационного классификатора при переработке минерального сырья, то есть решается контактная задача такого взаимодействия. Существенный интерес представляет расчет ударных нагрузок, поступающих на рабочую поверхность вибрационного классификатора, и определение оптимальной толщины футеровки рабочих органов валкового вибрационного классификатора при ее взаимодействии с кусковым материалом для увеличения срока эксплуатации валковых просеивающих поверхностей и интенсификации переработки минерального сырья. Таким образом, были определены и рассчитаны основные параметры, влияющие на ударную стойкость валков классификатора, среди которых присутствует упругая абсолютная и относительная деформация упругого слоя, а также сила нажатия твердого тела, которая производит эту деформацию. В ходе исследования были получены расчетные формулы для кинетической энергии падения куска и потенциальная энергия деформации. Полученные результаты могут быть использованы для расчета прочности рассматриваемых рабочих органов в процессе создания конструкции валкового вибрационного классификатора.

**Ключевые слова:** футерованный валок, валковый вибрационный классификатор, деформация упругого слоя, сила удара, толщина футеровки, потенциальная энергия деформации, кинетическая энергия падения куска.

**Введение.** Рассматривается задача о вдавливании твердого тела в упругий резиновый слой футеровки рабочего органа валкового классификатора. Необходимость решения данной задачи обусловлена тяжелыми условиями эксплуатации просеивающих поверхностей классификатора, где определяющую роль в их износе задают удары крупных кусков исходного минерального сырья. Именно поэтому валки футеруются эластичным слоем, в объеме которого происходит гашение энергии удара кускового материала.

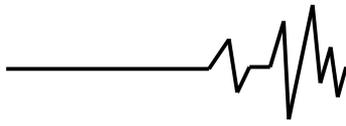
**Основной материал.** Итак, для решения данной задачи сделаем некоторые допущения. Выступ, которым кусок материала

давит в упругий слой, имеет осесимметричную форму. При решении задачи пренебрегаем эффектом больших деформаций, так называемым гидростатическим давлением. В большинстве практически возможных случаев эффектом конечности деформаций можно пренебречь.

Соответствующие контактные задачи решались для случая неограниченной толщины слоя (полупространство). В разбираемом случае величина упругого слоя ограничена.

Известно [1], что при действии сосредоточенной нагрузки  $Q$  на упругое полупространство, деформация, нормальная к поверхности:

$$\omega(z, r) = \frac{(1 + \mu)}{2\pi E} Q \left[ z^2 (z^2 + r^2)^{-\frac{3}{2}} + 2(1 - \mu) (z^2 + r^2)^{-\frac{1}{2}} \right] + f(r), \quad (1)$$



где  $\mu$  – коэффициент Пуассона (для резины  $\mu = 0,5$ );  $E$  – модуль упругости резины;  $z$  – координата по линии действия силы;  $r$  – радиальная координата;  $f(r)$  – некоторая функция от  $r$ , определяемая из граничных условий.

Для разбираемого случая имеет место соотношение:

$$\omega(h, r) = 0, \quad (2)$$

$$f(r) = -0,0239 \frac{Q}{E_0} \left[ h^2 (h^2 + r^2)^{-\frac{3}{2}} + (h^2 + r^2)^{-\frac{1}{2}} \right]$$

и, подставляя решение граничных условий,

$$\omega(z, r) = 0,0239 \frac{Q}{E} \left[ z^2 (z^2 + r^2)^{-\frac{3}{2}} + (z^2 + r^2)^{-\frac{1}{2}} - h^2 (h^2 + r^2)^{-\frac{3}{2}} - (h^2 + r^2)^{-\frac{1}{2}} \right]. \quad (3)$$

Определяем относительную деформацию:

$$\varepsilon(z, r) = \frac{\partial \omega}{\partial z} 0,0239 \frac{Q}{E} \left[ (z^2 + r^2)^{-\frac{3}{2}} - 3z^2 (z^2 + r^2)^{-\frac{5}{2}} \right] \cdot z, \quad (4)$$

Задача внедрения в упругое полупространство тела заданной конфигурации в общем виде решена Штаерманом [2]. Тем не менее, полученные им результаты можно обобщить и на случай упругого слоя конечной толщины.

Для контактирующих тел, уравнения поверхностей которых не имеют особенностей,

где  $h$  – толщина резинового слоя, то есть деформация футеровки у основания равна нулю.

Тогда, при  $\mu = 0,5$  и  $E = 10 \text{ МПа}$  (для резины с твердостью 75 Шор) с учетом граничного условия (2) из выражения (1) получим:

то есть регулярны во всей области контакта, справедливо соотношение:

$$\alpha = z_1(r) + z_2(r), \quad (5)$$

где  $\alpha$  – величина сближения контактирующих тел (рис. 1);  $z_1(r), z_2(r)$  – уравнения поверхностей контактирующих тел.

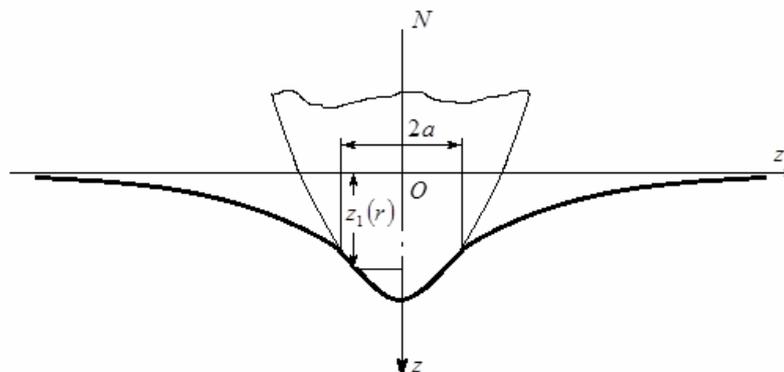


Рис. 1. Расчетная схема вдавливания твердого тела в упругое полупространство

Положим, что [2]:

$$z_1(a) + z_2(a) = 2Aa^2, \quad (6)$$

где  $A$  – некоторый параметр, характеризующий кривизну поверхностей;  $a$  – радиус контура поверхности контакта.

В работе [2] получено уравнение:

$$\frac{1 - \mu^2}{\pi E} \iint_{\Sigma} \frac{Q(r')}{R_1} f(R_1, z, h) d\sigma + z_1(r) = \alpha, \quad (7)$$

где  $Q(r')$  – давление в некоторой точке  $A'$ , находящейся на расстоянии  $r'$  от точки симметрии  $z$  (рис. 2);  $R_1$  – расстояние от этой точки до точки  $A$ , в которой определяется деформация от действия давления  $Q(r')$  в точке  $A'$ ;  $d\sigma$  – элементарная площадка, на которой действует давление  $Q(r')$ ;  $\Sigma$  – область интегрирования (площадка контакта);  $f(R_1, z, h)$  – некоторая функция.

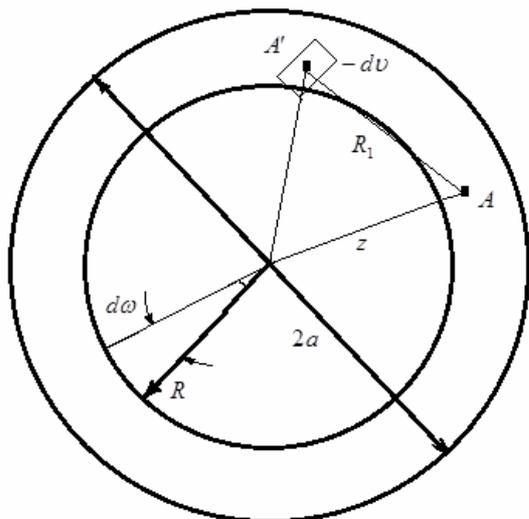
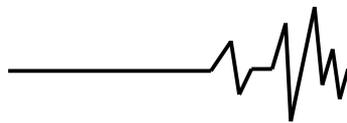


Рис. 2. Расчетная схема к определению деформации футеровки вала

Рассмотрим деформацию в точках, лежащих на оси симметрии  $z(r=0)$  от действия давления  $Q(R)$  по окружности радиусом  $R$ . Все точки  $A$  совпадают с осью симметрии, то есть  $r' = R_1 = R$ , а

$$d\sigma = RdRd\psi.$$

Так как  $z(0) = z$  (поверхность тела регулярна), то формула (7) приобретает вид:

$$\frac{1-\mu^2}{\pi E} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{Q(R)}{R} f(R, z, h) RdR = \alpha. \quad (8)$$

В разбираемом случае ( $h$  - конечно):

$$f(R, z, h) = \frac{R}{2(1-\mu)} \left[ z^2 (z^2 + R^2)^{-\frac{3}{2}} + 2(1-\mu) (z^2 + R^2)^{-\frac{1}{2}} - h^2 (h^2 + R^2)^{-\frac{3}{2}} - 2(1-\mu) (h^2 + R^2)^{-\frac{1}{2}} \right] \quad (9)$$

Сближение тел в точке  $z_1(0)$  при абсолютно твердом внедряемом теле, равно деформации упругого слоя в этой точке

$$\alpha(z) = \omega(z, h, 0). \quad (10)$$

Таким образом, из (8) получим:

$$\omega(z, h, 0) = \frac{1,5}{E} \int_0^a \frac{Q(R)}{R} f(R, z, h) RdR. \quad (11)$$

При вдавливании жесткого тела с криволинейной конфигурацией значение  $(a)$  определяется равенством:

$$\frac{\alpha}{z_1(a) + z_2(a)} = \frac{\omega(0, h, 0)}{z_1[d(h)] + z_2[d(h)]}, \quad (12)$$

где приведенная толщина упругого слоя футеровки:

$$\varphi = \frac{a}{h}. \quad (15)$$

где  $\alpha$  - величина вдавливания абсолютно твердого тела в полубесконечное пространство;  $a$  - радиус контура площадки вдавливания тела в полупространство;  $\omega(0, h, 0)$ ;  $d(h)$  - соответственно деформация упругого слоя на его поверхности и радиус контура площадки контакта при вдавливании абсолютно твердого тела в упругий слой конечной толщины.

Для параболических тел, как доказал Штаерман [2], нагрузка на упругий слой футеровки выражается как:

$$Q = \frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{R^2}{a^2} \cdot \frac{N}{\pi a^2}}, \quad (13)$$

где  $N$  - нагрузка на внедряемое тело.

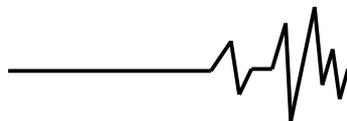
Подставив (13) и (9) в уравнение (11), после интегрирования получим:

$$\omega(0, h, 0) = \frac{9N}{8\pi E h \varphi} \left[ \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\varphi \sqrt{1+\varphi^2}} + \frac{1-\varphi^2}{\varphi^2} \arcsin \frac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}} \right], \quad (14)$$

Так как

$$\omega(0, h, 0) = 2Aa^2(h) = 2h^2 A \varphi^2, \quad (16)$$

то с учетом (14) получим:



$$N = \frac{16\pi E h^3 A}{9} = \frac{\varphi^3}{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\varphi\sqrt{1+\varphi^2}} + \frac{1-\varphi^2}{\varphi^2} \arcsin \frac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}}} \quad (17)$$

Относительная деформация с учетом (17):

$$\varepsilon(\varphi, \varphi, 0) = 4hA \frac{\frac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}} - \arcsin \frac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}}}{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\varphi\sqrt{1+\varphi^2}} + \frac{1-\varphi^2}{\varphi^2} \arcsin \frac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}}} \quad (18)$$

Таким образом, задаваясь значениями  $\varphi = \frac{a}{h}$ , по формулам (16), (17) и (18), можно определить упругую абсолютную и относительную деформацию упругого слоя и силу нажатия твердого тела, которая производит эту деформацию.

Кинетическая энергия падения куска:

$$T_k = \frac{Gv^2}{2g}, \quad (19)$$

где  $G$  – сила веса падающего куска материала;  $g$  – ускорение свободного падения.

Потенциальная энергия деформации:

$$\Pi = \Pi_\phi + \Pi_B, \quad (20)$$

где  $\Pi_\phi$  – потенциальная энергия деформации резины;  $\Pi_B$  – потенциальная энергия деформации вала.

$$\Pi_B = \left(\frac{1}{2}N - G\right)N\delta, \quad (21)$$

где  $N$  – сила удара;  $\delta$  – податливость вала,

$$\delta = \frac{a(l^2 + a^2)}{6EI},$$

$$\Pi_\phi = \int_0^{\omega(0,h,0)} (N - G)d\omega. \quad (22)$$

Обозначив:

$$\gamma = \frac{N}{Eh^2}; \quad \gamma_k = \frac{G}{Eh^2}; \quad \beta = \frac{\omega(0,h,0)}{h};$$

получим:

$$\Pi_B = E^2 h^4 \left(\frac{1}{2}\gamma - \gamma_k\right)\gamma\delta; \quad (23)$$

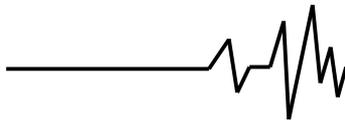
$$\Pi_\phi = Eh^3 \int_0^\beta (\gamma - \gamma_k)d\beta. \quad (24)$$

Интеграл (24) можно определить только приближенно.

Окончательно получим:

$$\Pi_\phi \cong Eh^5 A^2 \left\{ \frac{64\pi}{45} \cdot \frac{\varphi^5}{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\varphi\sqrt{1+\varphi^2}} + \frac{1-\varphi^2}{\varphi^2} \arcsin \frac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}}} - \frac{2\gamma_k}{hA} \varphi^2 \right\}, \quad (25)$$

$$\Pi_B \cong E^2 h^4 \delta \left\{ \frac{16\pi}{9} hA \cdot \frac{\varphi^3}{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\varphi\sqrt{1+\varphi^2}} + \frac{1-\varphi^2}{\varphi^2} \arcsin \frac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}}} \left[ \frac{16\pi}{9} hA \cdot \frac{\varphi^3}{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\varphi\sqrt{1+\varphi^2}} + \frac{1-\varphi^2}{\varphi^2} \arcsin \frac{\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}}} - \gamma_k \right] \right\}. \quad (26)$$



Порядок расчета в дальнейшем следующий. По формуле (19) при вертикальном падении куска, либо по формуле:

$$T_k = \frac{Gv^2}{2g} \cdot \cos^2 \alpha, \quad (27)$$

при его движении по валкам, определяется кинетическая энергия соударения.

Затем, задаваясь значениями  $\varphi$ , определяют  $P_B$  и  $P_\varphi$ . Из баланса энергий определяют величину  $\varphi$ , соответствующей данному значению  $T_k$ , после этого вычисляют  $N$  по формуле (17).

Следует иметь в виду, что потенциальная энергия деформации резины имеет ограничение по величине  $\beta \leq 0,9$ , так как величина деформации резины  $\omega(0, h, 0)$  не может быть больше  $h$ . Следовательно,

$$\varphi \leq \sqrt{\frac{0,45}{hA}}; \quad (28)$$

Для валков наиболее опасны соударения с острыми выступами, для которых  $0,5 \leq A \leq 1 \frac{1}{\text{см}}$ . Поэтому, для футеровки толщиной  $2 \leq h \leq 3 \text{ см}$  следует принимать  $0,4 \leq \varphi \leq 0,7$ .

### Выводы

Таким образом, ударная и абразивная стойкость валков зависит от упругих, эластичных свойств применяемых футеровок. Выведены зависимости для определения упругой абсолютной и относительной деформации упругого слоя и силы нажатия твердого тела, которая производит эту деформацию.

Получены расчетные формулы для кинетической энергии падения куска и потенциальная энергия деформации, как суммы потенциальной энергии деформации резины и валка.

Приведен алгоритм вычисления силы удара куска материала по резиновому слою футеровки для определения его оптимальной толщины при полном гашении энергии удара.

Оптимальный модуль упругости футеровки валка:

$$30 \leq E \leq 60 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}.$$

Эта величина обеспечивает максимальное поглощение энергии удара футеровкой до достижения предела ее деформации.

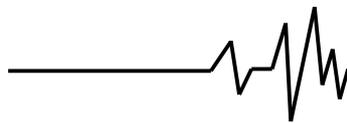
Расчеты показывают, что даже при оптимальных параметрах футеровки валков усилия соударения могут достигать 200 – 300 кг со скоростью 4– 5 м/с.

### Список использованных источников

1. Жемочкин Б.Н. Теория упругости: Учеб. пособие для вузов / Б.Н. Жемочкин. – М. : Госстройиздат, 1957. – 256 с.
2. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости / И.Я. Штаерман. – М.-Л. : Гостехиздат, 1949. – 272 с.
3. Тимошенко С.П. Теория упругости / С.П.Тимошенко, Дж. Гудьер; [перев. с англ.]. – М. : Главная редакция физико-математической науки изд-ва «Наука», 1975. – 576 с.
4. Кильчевский Н.А. Динамическое контактное сжатие твердых тел. Удар / Н.А. Кильчевский. – К. : изд. «Наукова думка», 1976. – 319 с.
5. Надутий В.П. Результаты исследований взаимодействия кусковой горной массы с валками вибрационного грохота / В. П. Надутий, В. Ф. Ягниуков, I.V. Ягниукова // Міжвід. зб. наук. пр. ІГТМ НАН України "Геотехнічна механіка". – 2013. – № 109. – С. 207–216.

### Список источников в транслитерации

1. Jemochkin B.N. Teoriia uprugosti: Uchebnoye posobiie dlia vuzov / B.N. Jemochkin.– M. : Gosstroyizdat, 1957. – 256 p.
2. Shtaierman I.Ya. Kontaktnaia zadacha teorii uprugosti / I.Ya. Shtaierman. – M.-L. : Gostehizdat, 1949. – 272 p.
3. Timoshenko S.P. Teoriia uprugosti / S.P. Timoshenko, J. Gudier. – M.: Glavnaia redaktsiia fiziko-matematicheskoy nauki izdatelstva «Nauka», 1975. – 576 p.
4. Kilchevskiy N.A. Dinamicheskoie kontaknoie sjiatie tverdyh tel. Udar / N.A. Kilchevskiy. – K. : izd. «Naukova dumka», 1976. – 319 p.
5. Nadutyu V.P. Rezultaty issliedovaniy vzaimodeystviia kuskovoy gornoy massy s valkami vibratsionnogo grohota / V. P. Nadutyu, V. F. Iaghiukov, I.V. Iaghiukova // Mijvid. zb. nauk. pr. IGTM NAS of Ukraine "Geotechnical Mechanics". – 2013. – № 109. – pp. 207–216.

**ВЗАЄМОДІЯ ШМАТКІВ МАТЕРІАЛУ З  
ФУТЕРОВАНИМ ВАЛКОМ ВІБРАЦІЙНОГО  
КЛАСИФІКАТОРА**

**Анотація.** Мета даної статті полягає в тому, щоб отримати більше інформації про взаємодію шматків матеріалу з футерованим валком вібраційного класифікатора при переробці мінеральної сировини, тобто вирішується контактна задача такої взаємодії. Суттєвий інтерес представляє розрахунок ударних навантажень, що надходять на робочу поверхню вібраційного класифікатора, і визначення оптимальної товщини футеровки робочих органів валкового вібраційного класифікатора при її взаємодії з шматковим матеріалом для збільшення терміну експлуатації валкових просіювальних поверхонь і інтенсифікації переробки мінеральної сировини. Таким чином, були визначені і розраховані основні параметри, що впливають на ударну стійкість валків класифікатора, серед яких присутня пружна абсолютна і відносна деформація пружного шару, а також сила натискання твердого тіла, яка здійснює цю деформацію. У ході дослідження були отримані розрахункові формули для кінетичної енергії падіння шматка і потенційна енергія деформації. Отримані результати можуть бути використані для розрахунку міцності розглянутих робочих органів у процесі створення конструкції валкового вібраційного класифікатора.

**Ключові слова:** футерований валок, валковий вібраційний класифікатор, деформація пружного шару, сила удару, товщина футеровки, потенційна енергія

деформації, кінетична енергія падіння шматка.

**THE INTERACTION OF LUMPS OF MINED  
ROCK WITH BUSHED ROLLER OF VIBRATING  
CLASSIFIER**

**Annotation.** The objective of this article is to obtain more information on the interaction of mined rock pieces with a bushed roller of vibrating classifier during mineral processing, meaning that the contact problem under such interaction has been solved in this paper. There is a considerable interest in computing of impact load acting on the working surface of the vibrating classifier and determining the optimum thickness of the bushing of executive roller of vibrating classifier in its interaction with the lumped material in order to extend the roller's life inside of its screening surface and raise the mineral processing intensification. Thus, we have defined and calculated the main parameters affecting the impact resistance of classifier's roller, among which there are the absolute and relative elastic deformation of the elastic layer, and the pressing force of a rigid body, which makes this strain. During these investigations formulas for the kinetic energy of falling pieces and the potential energy of deformation were obtained. The obtained results can be used for calculation the resistance of such executive elements during the process of creating a design of roller of vibrating classifier.

**Key words:** bushed roller, roller of vibrating classifier, deformation of the elastic layer, the impact force, the thickness of the bush, potential energy of deformation, kinetic energy of the falling pieces.