

**III. ПЕРЕРОБНІ ТА ХАРЧОВІ ВИРОБНИЦТВА**

Любін М. В.

Любин В. С.

Чорна Т. В.

*Вінницький  
національний  
аграрний  
університет*

Liubin M. V.

Liubyn V. S.

Chorna T. V.

*Vinnitsia National  
Agrarian University*

УДК 631.147;635.82

**ВИЗНАЧЕННЯ ШВИДКОСТІ  
ПІДЙОМУ БУЛЬБАШКИ БІОГАЗУ У  
ПРОЦЕСІ МЕТАНОВОГО  
ЗБРОДЖУВАННЯ ОРГАНІЧНИХ  
ВІДХОДІВ**

Процес переробки біомаси в енергетичну продукцію залежить від технічних і технологічних параметрів процесів і машин. Так в деяких роботах для визначення швидкості підйому бульбашки біогазу використовували закон Гельмгольца, який описує розподіл швидкості навколо бульбашки. Так як біомаса має вологість близько 90 %, то її можна представити як Ньютонівську рідину.

Саме тому можна використовувати класичні рівняння Нав'є-Стокса в циліндричних координатах. На їх підставі представлена математична модель руху бульбашок біогазу в просторі метантенка при бродінні біогазу.

**Ключові слова:** швидкість, прискорення, маса, біомаса, бродіння, рідина, рух бульбашок, метантенк.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Ефективність переробки біомаси в енергетичну продукцію досягається лише за раціональних параметрів технологічних процесів і машин, які здійснюють конверсію сировини. Так у роботі [1] для виведення формули швидкості підйому бульбашки біогазу використовувався закон вихорів Гельмгольца [1], який описує розподіл швидкостей в рідині, яка обтікає бульбашку радіуса  $R$ .

Результати досліджень реологічних властивостей і закономірностей руху відходів показують, що при вологості 90 %, останні поводять себе як Ньютонівські рідини [2, 3, 4].

У зв'язку з цим є можливим використання класичних рівнянь гідродинаміки Нав'є-Стокса в циліндричній системі координат  $(z, r, \varphi)$ , які дозволяють математично описати процес руху окремо взятої частинки в камері бродіння метантенка. Слід зазначити, що при переході від ідеальної рідини до реальної (в'язкої) рідини потрібно було введення додаткових величин, які враховують сили тертя. Це призвело до отримання системи трьох диференціальних рівнянь з частковими похідними [5, 6].

**Виклад основного матеріалу.**

Розглянемо процес руху бульбашки біогазу радіусом  $r$  в камері бродіння на рисунку 1.1, де

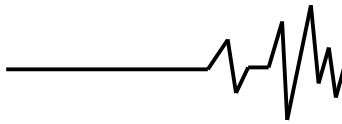
показано розміщення осей координат. Припускаємо, що слідом при спливанні бульбашки вгору є елементарна трубка радіусом  $r$ . Виходячи з цього приймаємо, що даний процес адекватний процесу руху маси в цій трубці.

Запишемо систему диференціальних рівнянь Нав'є-Стокса:

$$\left\{ \begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial V_r}{\partial \tau} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\varphi}{r} \cdot \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} + \frac{V_r^2}{r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial r} + \\ + \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot V_\varphi + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 V_r}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} \right) \right] \right\} &+ \rho g_r; \\ \rho \left( \frac{\partial V_\varphi}{\partial \tau} + V_r \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + \frac{V_r}{r} \cdot \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{V_r \cdot V_\varphi}{r} + V_z \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} \right) &= -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial P}{\partial \varphi} + \\ + \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot V_\varphi + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial z^2} \right) \right] \right\} &+ \rho g_\varphi; \\ \rho \left( \frac{\partial V_z}{\partial \tau} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\varphi}{r} \cdot \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \\ + \mu \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 V_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right] &+ \rho g_z; \end{aligned} \right. \quad (1)$$

де:

 $\rho$  – густина рідких відходів, кг/м<sup>3</sup>; $\mu$  – динамічна в'язкість, сСт;



$V_r, V_z, V_\varphi$  – складові швидкості, м/с;

$g_r, g_z, g_\varphi$  – складові прискорення вільного падіння, м/с<sup>2</sup>;

$P$  – тиск в напрямку руху бульбашки, Па;

Як видно рівняння (1) в загальному вигляді є доволі складними і, як наслідок мало придатними для аналізу. Тому в роботі поставлена задача прийняття і обґрунтування достатньо можливих допущень, які застосовуються до флотатора.

Прийняті наступні допущення:

– так, як рух вихідної маси проходить у вертикальній площині, то складові прискорення вільного падіння будуть рівними:

$$g_r = g_\varphi = 0; g_z = -g.$$

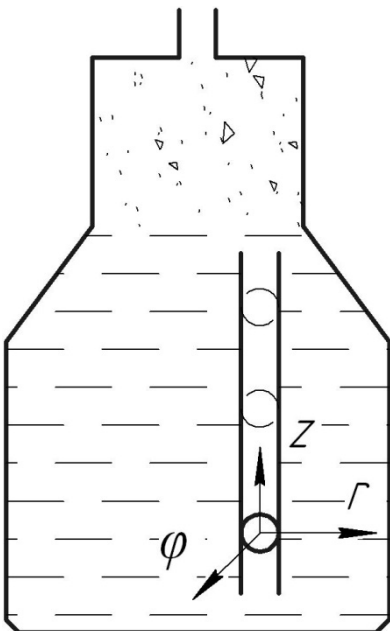


Рис. 1. Для виведення формули швидкості підйому бульбашки біогазу

– при встановленому русі маси похідні швидкості по часу рівні нулю:

$$\frac{\partial V_r}{\partial \tau} = \frac{\partial V_\varphi}{\partial \tau} = \frac{\partial V_z}{\partial \tau} = 0, \text{ а також } V_r = V_\varphi = 0;$$

– в силу осьової симетрії руху всі похідні по осі  $\varphi$  рівні нулю

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0;$$

– так, як напрям швидкості вибрано по осі  $z$ , то справедливе рівняння:

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} = 0.$$

З врахуванням прийнятих вище допущень система рівнянь Нав'є-Стокса (1) приймає наступний вигляд:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial z} = 0; \\ -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial P}{\partial \varphi} = 0; \\ \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\mu}{r} \cdot \frac{\partial V_z}{\partial r} + \mu \cdot \frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} - \rho \cdot g = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Запишемо (2) у вигляді:

$$\mu \cdot \frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{\mu}{r} \cdot \frac{\partial V_z}{\partial r} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho \cdot g. \quad (3)$$

Із перших двох рівнянь Нав'є-Стокса випливає  $P = P(z)$  а третє рівняння (3) має

місце лише при  $\frac{\partial P}{\partial z} = const.$

Введемо позначення:

$$\frac{1}{\mu} \left( -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho \cdot g \right) = A. \quad (4)$$

Тоді рівняння (3) матиме наступний вигляд:

$$\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V_z}{\partial r} = A. \quad (5)$$

Використаємо для вирішення (5) метод зниження порядку рівняння, тобто вводимо позначення:

$$U = \frac{\partial V_z}{\partial r}.$$

Тоді (5) можна записати у такому вигляді:

$$U' + \frac{1}{r} \cdot U = A. \quad (6)$$

Так як

$$U = y \cdot x.$$

То отримаємо:

$$U' = y' \cdot x + x' \cdot y. \quad (7)$$

Після підстановки (7) в (6) отримаємо

$$y' \cdot x + x' \cdot y + \frac{y \cdot x}{r} = A$$

або

$$y' \cdot x + y \left( x' + \frac{x}{r} \right) = A, \quad (8)$$

Звідки

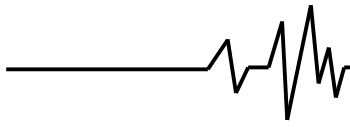
$$x' + \frac{x}{r} = 0, \quad (9)$$

$$y' \cdot x = A, \quad (10)$$

Запишемо (9) у вигляді

$$\frac{\partial x}{\partial r} = -\frac{x}{r} \quad (11)$$

або



$$\frac{\partial x}{\partial r} = -\frac{\partial r}{r}, \quad (12)$$

Проінтегрувавши (12), отримаємо  
 $\ln x = -\ln r$ , звідки

$$x = \frac{1}{r}, \quad (13)$$

Запишемо (10) у вигляді:

$$\frac{\partial y}{\partial r} \cdot \frac{1}{r} = A$$

або

$$\partial y = A \cdot r \cdot \partial r, \quad (14)$$

проінтегрувавши (14) отримаємо:

$$y = \frac{A \cdot r^2}{2} + C_1, \quad (15)$$

вирази (13) і (15) дозволять отримати

$$U = \frac{\partial V_z}{\partial r} = \frac{1}{r} \left( \frac{A \cdot r^2}{2} + C_1 \right) = \frac{A \cdot r}{2} + \frac{C_1}{r},$$

звідки

$$\partial V_z = \frac{A}{2} \cdot r \cdot \partial r + \frac{C_1}{r} \cdot \partial r, \quad (16)$$

проінтегрувавши (16) отримаємо:

$$V_z = \frac{A \cdot r^2}{4} + C_1 \cdot \ln r + C_2. \quad (17)$$

Враховуючи початкові умови, знайдемо:  
при  $V_z = 0$

$$C_1 \cdot \ln r + C_2 = 0.$$

Звідки

$$C_2 = -C_1 \cdot \ln r. \quad (18)$$

Після підстановки (18) в (17) отримаємо:

$$V_z = \frac{A \cdot r^2}{4}$$

З врахуванням (4) знайдемо:

$$V_z = \frac{r^2}{4\mu} \cdot \left( -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho \cdot g \right). \quad (19)$$

Запишемо позначення швидкості підйому  
бульбашки біогазу

$$V = V_z = \frac{r^2}{4\mu} \cdot \left( -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho \cdot g \right). \quad (20)$$

Перетворюючи вираз підйомної сили,  
отримаємо:

$$\frac{F}{V} = \frac{F}{S \cdot z} = \frac{P}{z} = (\rho - \rho_z) \cdot g. \quad (21)$$

Враховуючи, що  $\frac{\partial P}{\partial z} = const$ , рівняння (21)

можна записати у такому вигляді:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = (\rho - \rho_z) \cdot g. \quad (22)$$

Підставляючи (22) у (20), знайдемо

$$V = \frac{r^2 \cdot \rho_z \cdot g}{4\mu}, \text{ м/с} \quad (23)$$

У роботі [1] виведена формула для визначення швидкості підйому бульбашки газу у виноградному соку

$$V = \frac{2r^2 \cdot (\rho - \rho_z) \cdot g}{9\mu} \text{ м/с.} \quad (24)$$

### Висновки

Порівнюючи формули (23) і (24) бачимо, що вони достатньо схожі, так як виражають функціональну залежність від розмірів бульбашки та фізико-механічних властивостей рідини, незважаючи на використання різних рівнянь гідродинаміки, покладених в основу теоретичних досліджень.

В теорії флотації [7, 1], відомо що зміна в'язкості маси, яка бродить, не впливає на дисперсність бульбашок газу. Так зміна в'язкості навіть у сто разів несуттєво впливає на розмір бульбашок. При підвищенні температури бродиння зменшується в'язкість маси, що призводить до збільшення швидкості спливання бульбашок.

Формула (24) була експериментально підтверджена шляхом вимірювання швидкості підйому бульбашок біогазу за допомогою швидкісної зйомки [1]. Це можливо було здійснити при достатній прозорості досліджуваної рідини – виноградного соку.

### Список використаних джерел

1. Матов Б. М. Электрофлотация / Б. М. Матов - Кишинев, 1971. – 69 с.
2. Бартепов П. М. К теории реологических свойств дисперсных систем. Вязкие жидкообразные системы / П. М. Бартепов, В. Н. Ермилова. – М., Наука, 1966. – 440 с. – (В сб: Физико-химическая механика дисперсных структур.)
3. Зуев В. А. Реологические характеристики экспериментов крупного рогатого скота / В. А. Зуев., М. С. Текучева // Научно – технический бюллетень по электрификации сельского хозяйства – 1971. – М., Вып. 1, с 39 – 45.
4. Крупенин А. В. Исследование вязкопластических свойств навоза крупного рогатого скота / А. В. Крупенин // Записки ЛСХИ. – 1969 – Л., вып. 2.
5. Тепло- и массообмен. Теплотехнический эксперимент (Справочник) / [Аметистов Е. В., Григорьев В. А. и др.] – М., Энергоиздат, 1982, – 512 с.
6. Биотехнология / [Ковалев А. А. и др.; под ред. В. С. Шевелуха] – изд. Высшая школа, 2003 – гл. 7.



7. Физико-химические основы теории флотации / [Кассен В. И. и др.] – М., Наука, 1983, 171 с.

#### **Список джерел в транслітерації**

1. Matov B. M. Jelektroflotacija / B. M. Matov – Kishinev, 1971. – 69 s.

2. Bartenev P. M. K teorii reologicheskikh svojstv dispersnyh sistem. Vjazkie zhidkoobraznye sistemy / P. M. Bartenev, V. N. Ermilova. – М., Nauka, 1966. – 440 s. – (V sb: Fiziko-himicheskaja mehanika dispersnyh struktur.)

3. Zuev V. A. Reologicheskie harakteristiki jeksperimentov krupnogo rogatogo skota / V. A. Zuev., M. S. Tekucheva // Nauchno – tehnicheskij bjulleten' po jelektrifikacii sel'skogo hozjajstva – 1971. – М., Вып. 1, s 39 – 45.

4. Krupenin A. V. Issledovanie vjazkoplastichnyh svojstv navoza krupnogo rogatogo skota / A. V. Krupenin // Zapiski LSHI. – 1969 – L., вып. 2.

5. Тепло- i massoobmen. Teplotehnicheskij jeksperiment (Spravochnik) / [Ametistov E. V., Grigorev V. A. i dr.] – М., Jenergoizdat, 1982, – 512 s.

6. Biotehnologija / [Kovalev A. A. i dr.; pod red. V. S. Sheveluha] – izd. Vysshaja shkola, 2003 – gl. 7.

7. Физико-химические основы теории флотации / [Кассен В. И. и др.] – М., Наука, 1983, 171 с.

#### **ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ПОДЪЁМА ПУЗЫРЬКА БИОГАЗА В ПРОЦЕССЕ МЕТАНОВОГО СБРАЖИВАНИЯ ОРГАНИЧЕСКИХ ОТХОДОВ**

**Аннотація.** Процес переробки біомаси в енергетическу продукцію зависит от техніческх и технологических параметров процессов и машин. Так в

некоторых работах для определения скорости подъема пузырька биогаза использовали закон Гельмгольца, который описывает распределение скорости вокруг пузырька. Так как биомасса имеет влажность около 90 %, то ее можно представить как Ньютоновскую жидкость.

Поэтому можно использовать классические уравнения Навье-Стокса в цилиндрических координатах. На их основании представлена математическая модель движения пузырьков биогаза в пространстве метантенка при брожении биогаза.

**Ключевые слова:** скорость, ускорение, масса, биомасса, сбразивание, жидкость, движение пузырек, метантенк.

#### **DETERMINATION OF CLIMBING OF BUBBLE OF BIOGAS ABILITY IN THE PROCESS OF METHANE FERMENTATIONS OF ORGANIC WASTES**

**Annotation.** The process of processing of biomass in power products depends on the technical and technological parameters of processes and machines. So in some works for determination of climbing of bubble of biogas ability used the law of Helmholtz which describes distribution of speed round a bubble. Because biomass has humidity about 90 %, then she can be presented as the Newtonian liquid.

That is why it is possible to use classic equalizations of Navier-Stokes in cylindrical coordinates. On their foundation the mathematical model of motion of bubbles of biogas is presented in space of methane-tank at fermentation of biogas.

**Key words:** speed, acceleration, mass, biomass, fermentation, liquid, motion is a bubble, methane-tank.