Гель П. В.
Янчук Я. Н.
Винницкий национальный аграрный университет
Резник С. И.
Винницкий национальный технический университет
Hel P. V.
Yanchuk Y. N.
Vinnytsia National Agrarian University
Reznik S. I.
Vinnytsia National Technical University

УДК 541.124:532.5

ТУРБУЛЕНТНАЯ ДИФФУЗИЯ В МНОГОФАЗНЫХ ПОТОКАХ

В работе выполнено обобщение динамического уравнения Хопфа для характеристического функционала на случай многофазных турбулентных потоков.

Ключевые слова: *уравнение Хопфа, многофазные турбулентные потоки, диффузия.*

Введение. С многофазными турбулентными потоками приходится встречаться, например, в практике гидротехнического строительства, при рассмотрении потоков воды, содержающих взвешенные частицы грунта или кристаллов льда, шугу, а также при изучении аэрированных потоков. Многофазные потоки образуются при использовании гидротранспорта, когда транспортировка определенных субстанций осуществляется методами гидромеханизации.

С первой половины XX в. резко возросло использование рек в народно-хозяйственных целях. Реки используются не только для судоходства и поливного земледелия, но и для водоснабжения городов и промышленных предприятий. Их используют также для получения дешевой электроэнергии. Это способствовало тому, что речное течение и русло и механизм его развития стали предметом всестороннего и глубокого изучения. К этому периоду относятся инженерные решения вопросов защиты приречных территорий от затопления, борьба с которыми введется с незапамятных времен [1].

Движение взвешенных и донных наносов неразрывно связано с турбулентностью потока, на что впервые было обращено внимание в работе [2]. Под русловым понимается процесс взаимодействия между потоком и его руслом. Деформируя грунт, поток создает себе такие русловые формы, которые отвечают его полю скоростей, а русловые формы, в свою очередь, определяют поле скоростей потока. При несоответствии русловых форм и поля скоростей происходит их взаимная перестройка. Таким образом, русловой процесс является геофизическим самосогласованным процессом. Взгляд на реку как продукт взаимодействия потока и русла наиболее четко был сформулирован в работах [2,3].

Многофазные потоки применяются в нефтегазовой промышленности, в тепловой и ядерной энергетике, в гидротехнике, при транспортировке по трубопроводам нефтегазовых и газоконденсатных смесей. Промышленное использование таких явлений, как диффузия, барботаж, фильтрация и других физико-химических процессов в той или иной степени связаны с многофазными потоками.

В настоящее время считается общепризнанным факт возникновения в турбулентных потоках отдельных объёмов жидкости, которые характеризуются своего рода относительной самостоятельностью как в своем движении по отношению к осредненному потоку, так и по своей внутренней структуре [4]. Эти объемы жидкости называют «крупными вихрями». В процессе турбулентной диффузии происходит их распад на более мелкие вихри, в которых инерционные явление все еще преобладают над вязкими. Последние вихри участвуют в конвекции и турбулентной диффузии, но очень в незначительной степени подвержены воздействиям сил вязкости. Общий процесс дальнейшего распада вихрей приводит в конечном итоге к «мелким вихрям», на которые уже действуют вязкая диффузия и последующая вязкая диссипация кинетической энергии жидкости [5]. Эти процессы рассмотрены в работах [6,7].

Гидродинамические поля турбулентных потоков являются случайными. Осреднение любых характеристик этих полей по существу является теоретико-вероятностным осреднением по некоторому статистическому ансамблю [8].

Основная часть работы. Рассмотрим сначала однофазные турбулентные потоки несжимаемой вязкой жидкости, описываемые соленоидальным полем скоростей:

$$\vec{u}(x,t) = (u_1(x,t),\ u_2(x,t),\ \vec{u}_3(x,t)) \quad (1)$$

где $\vec{u}(x,t)$ – скорость течения; $u_j(x,t)$ – компоненты скорости; $x = (x_1, x_2, x_3)$ – пространственные координаты; t-время; j=1,2,3. Проблему турбулентности можно свести к нахождению распределения вероятности $P(d\omega)$ на фазовом пространстве $\Omega = \{\omega\}$ – турбулентного потока, «точками» которого являются всевозможные соленоидальные векторные поля (1), удовлетворяющие уравнениям Навье-Стокса и соответствующим начально-краевым условиям [5].

Наиболее компактным и полным статистическим описанием гидродинамического поля скоростей $\vec{u}(x,t)$ турбулентного потока является задание его пространственно-временного характеристического функционала [9]:

$$\Phi\left(\vec{\theta}(x,t)\right) = <\exp i \iint \theta_j(x,t) u_j(x,t) dx\, dt >, \quad (2)$$

где $<\ldots>$ – символ теоретико-вероятностного осреднения по статистическому ансамблю; $\vec{\theta}(x,t) = (\theta_1(x,t), \theta_2(x,t), \theta_3(x,t))$ – неслучайная вектор-функция; $j = 1,2,3$. Под повторяющимся индексам производится суммирование.

Интерпретация результатов осреднения (2) возможна при использовании предположения об эргодичности рассматриваемого турбулентного потока как случайного процесса [10,11]. Фазовое пространство Ω считается банаховым [12,13]. Функционал (2) однозначно определяет распределение вероятностей на фазовом пространстве Ω турбулентного потока.

Введем следующее обозначение для аналога скалярного произведения в функциональном пространстве:

$$(\vec{\theta} \cdot \vec{u}) = \iint \theta_j(x,t)\, u_j(x,t)\, dx\, dt, \quad (3)$$

где интегрирование ведется по пространственно-временному цилиндру.

Теперь функционал (2) можно записать в таком виде:

$$\Phi\left(\vec{\theta}(x,t)\right) = < \exp i\left(\vec{\theta} \cdot \vec{u}\right) \quad (4)$$

Обозначим оператор вариационной (функциональной) производной следующим соотношением [9]:

$$D_k = \frac{\delta}{\delta\theta_k(x,t)dx\, dt} \quad (5)$$

Тогда правило вариационного дифференцирования можно записать следующим образом:

$$D_k\Phi = < i\, u_k(x,t) \exp i\,(\vec{\theta} \cdot \vec{u}) > \quad (6)$$

$$D_j D_k \Phi = -< u_j(x,t) u_k(x,t) \exp i\,(\vec{\theta} \cdot \vec{u}) > \quad (7)$$

где $j,k = 1,2,3$.

Выясним, какие ограничения налагает на характеристический функционал $\Phi\left(\vec{\theta}(x,t)\right)$ уравнение неразрывности турбулентного потока несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1,2,3. \quad (8)$$

Предположим, что жидкость занимает конечный объем V пространства ограниченный гладкой поверхностью Г. Поле скоростей удовлетворяет граничному условию:

$$u_n|\Gamma = 0 \quad (9)$$

где u_n – компонента скорости в направлении внутренней нормали к границе Г.

Если $\varphi(x,t)$ – некоторая скалярная функция, то в силу (8) имеет место соотношение:

$$\int u_j \frac{\partial\varphi}{\partial xj} dV = \int \frac{\partial(u_j\varphi)\,dV}{\partial xj} = -\oint u_n \varphi\, d\Gamma = 0, \quad (10)$$

т.е. $(\nabla\varphi \cdot \vec{u}) = 0$,

где $\nabla = \vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x1} + \vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x2} + \mathrm{k}\frac{\partial}{\partial x3}$ операто Гамильто (11)

Тогда справедливо соотношение:

$$((\vec{\theta} + \nabla\varphi) \cdot \vec{u}) = (\vec{\theta} \cdot \vec{u})$$

для любых функций $\vec{\theta}$ и $\vec{u}$.

Следовательно, согласно соотношению (3) можно записать:

$$\Phi\left(\vec{\theta}(x,t) + \nabla\varphi(x,t)\right) = \Phi\left(\vec{\theta}(x,t)\right). \quad (12)$$

Соотношение (12) выражает искомое ограничение, которое налагает на характеристический функционал $\Phi\left(\vec{\theta}(x,t)\right)$ условие неразрывности поля скоростей турбулентного потока.

Согласно основной теореме векторного анализа каждое векторное поле $\vec{\theta}(x,t)$ можно однозначно представить в виде суммы соленоидального и потенциального полей [14]:

$$\vec{\theta}(x,t) = \vec{\theta}^*(x,t) + \nabla\varphi(x,t), \qquad (13)$$

$$\frac{d\theta_j^*(x,t)}{dx_j} = 0, \quad \theta_n^*|\Gamma = 0, j = 1,2,3.$$

Иными словами, существует линейный оператор L,обладающий свойством:

$$L\vec{\theta}(x,t) = \vec{\theta}^*(x,t).$$

Из соотношения (12) следует:

$$\Phi\left(\vec{\theta}(x,t)\right) = \Phi\left(\vec{\theta}^*(x,t)\right), \qquad (14)$$

которое утверждает, что характеристический $\Phi(\theta(x,t))$ функционал инвариантен относительно преобразования пространства функций $\vec{\theta}(x,t)$, осуществляемого оператором L.

Продифференцируем обе части равенства (6) ко x_k :

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(D_k\Phi\left(\vec{\theta}(x,t)\right) =< i\,\frac{\partial u_k(x,t)}{\partial x_k}\exp i\left(\vec{\theta}\cdot\vec{u}\right) >. \qquad (15)$$

Выражение в правой части (15) в силу уравнения неразрывности равно нулю.

Таким образом, имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(D_k\Phi\left(\vec{\theta}(x,t)\right) = 0 \qquad (16)$$

Полученное соотношение является дифференциально-вариационной формой ограничений, налагаемых на характеристический функционал $\Phi\left(\vec{\theta}(x,t)\right)$ условием неразрывности поля скоростей.

Продифференцируем далее уравнение (3) по времени t:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} =< i\left(\vec{\theta}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}\right)\exp\left(\vec{\theta}\cdot\vec{u}\right) > \qquad (17)$$

По уравнениям Навье-Стокса [5] имеем:

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - \frac{\partial\vec{u}u_j}{\partial x_j} + \upsilon\Delta\vec{u}, \qquad (18)$$

где ρ – плотность жидкости; p – давление; υ – кинематическая вязкость;

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \text{ оператор Лапласа.}$$

Следовательно, уравнение (17) можно записать в таком виде:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} =< i\left(\vec{\theta}\cdot\left(\frac{1}{\rho}\nabla p - \frac{\partial\vec{u}u_j}{\partial x_j} + \upsilon\Delta\vec{u}\right)\right)\exp i\left(\vec{\theta}\cdot\vec{u}\right) >. \qquad (19)$$

Введем обозначение:

$$\Pi =< \frac{1}{\rho}p\exp i\left(\vec{\theta}\cdot\vec{u}\right) > = \Pi\left(\vec{\theta}(x,t)\right).$$

Тогда уравнение (19) преобразуется к такому виду:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \left(\vec{\theta}\cdot\left(i\,\frac{\partial\vec{D}D_j\Phi}{\partial x_j} + \upsilon\Delta\vec{D}\Phi - i\nabla\Pi\right)\right), \qquad (20)$$

где $\vec{D} = (D_1, D_2, D_3)$ – векторный оператор вариационного дифференцирования.

Уравнения (16) и (20) образуют систему двух уравнений в вариационных производных относительно искомых неизвестных $\Phi\left(\vec{\theta}(x,t)\right)$ и $\Pi\left(\vec{\theta}(x,t)\right)$. Исключим функционал $\Pi\left(\vec{\theta}(x,t)\right)$,учтя, что выражение:

$$< i\,\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\exp i\left(\vec{\theta}\cdot\vec{u}\right) >$$

описывает векторное поле, дивергенция которого равна нулю. Используя условие обращения в нуль дивергенции этого поля, получаем:

$$\Delta\Pi = \frac{\partial^2 D_j D_k\Phi}{\partial x_j\partial x_k} \qquad (21)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$\Pi = \Delta^{-1}\frac{\partial^2 D_j D_k\Phi}{\partial x_j\partial x_k}, \qquad (22)$$

где Δ^{-1} – оператор, обратный оператору Лапласа.

Итак, уравнение (20) можно записать в таком виде:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \left(\vec{\theta}\cdot\left(i\,\frac{\partial\vec{D}D_j\Phi}{\partial x_j} - i\nabla\Delta^{-1}\frac{\partial^2 D_j\partial_k\varphi}{\partial x_j\partial x_k} + \upsilon\Delta\vec{D}\varphi\right)\right). \qquad (23)$$

Полученное уравнение содержит только один искомый функционал $\Phi\left(\vec{\theta}(x,t)\right)$ Используя соотношения (14) и (16), окончательно получаем:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = i\left(\vec{\theta}^*\cdot\frac{\partial\vec{D}D_j D_k\Phi}{\partial x_j}\right) + \upsilon(\vec{\theta}^*\cdot\Delta\vec{D}\Phi) \qquad (24)$$

Уравнение (24) является уравнением Э.Хопфа для пространственно-временного характеристического функционала $\Phi\left(\vec{\theta}(x,t)\right)$ [16].Оно представляет собой наиболее полную и наиболее компактную форму записи управления Навье-Стокса для турбулентного потока. Замечательной особенностью этого уравнения является его линейность. Таким образом, в то время как эволюция индивидуальных полей скорости $\vec{u}(x,t)$ описывается нелинейным уравнением Навье-Стока, задача изучения соответствующих распределений вероятностей в функциональном пространстве Ω становится линейной задачей. Отсюда вытекает ряд радикальных математических упрощений, включая принцип суперпозиции, позволяющий искать решение уравнения (24) в виде суммы частных решений. Кроме того, уравнение (24) в ряде отношений аналогично уравнениям квантовой теории поля [16,17].

Применим изложенные выше рассуждения к рассмотрению многофазных турбулентных потоков. Примем за основу уравнения Франкля-Дюнина, которые удобно представить в виде [18,19]:

$$\frac{\partial S_\ell u_{\ell j}}{\partial t} + \frac{\partial S_\ell u_{\ell k} u_{\ell j}}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho \ell} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}\left(S_\ell \Pi_{\ell jk} + \mathrm{T}_{\ell jk}\right) + S_\ell G_{\ell j}, \tag{25}$$

$$\frac{\partial S_\ell}{\partial t} + \frac{\partial S_\ell u_{\ell k}}{\partial x_k} = 0, \qquad \mathrm{j,k} = 1,2,3, \quad \ell = \overline{1,\mathrm{n}}, \tag{26}$$

где ℓ – признак компоненты многофазного потока; ρ – массовая плотность компонент; $u_j u_k$ компоненты мгновенной скорости; S – объемная концентрация компоненты; $\Pi_{\ell jk}$ – тензор молекулярных напряжений; $\mathrm{T}_{\ell jk}$ – тензор турбулентных напряжений; n – количество компонент.

В уравнениях (25) и (26) индекс $\ell = 1$ является признаком несущей компоненты, а $\ell = \overline{2,\mathrm{n}}$ – признаком примесей.

Для описания гидродинамических полей многофазовых турбулентных потоков запишем по аналогии с характеристическим функционалом (2) функционал, определяемый следующим соотношением:

$$\Phi\left(\vec{\theta}(x,t)\right) =< \exp i \iint \theta_k(x,t) u_{\ell k} S_\ell dx\, dt >, \tag{27}$$

Так как согласно физическому смыслу рассматриваемой задачи имеет место равенство:

$$\sum_{\ell=1}^{n} S_\ell = 1,$$

то можно получить такое соотношение:

$$\Phi\left(\vec{\theta}(x,t)\right) =< \exp i\,(\vec{\theta} \cdot \vec{u}_\ell) S_\ell > \tag{29}$$

Продифференцировав по времени *t* обе части этого равенства, находим:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = i\,(\vec{\theta} \cdot \frac{\partial \vec{u}_\ell S_\ell}{\partial t} \exp i(\vec{\theta} \cdot \vec{u}_\ell) S_\ell > \tag{30}$$

Заменим выражение $\frac{\partial \vec{u}_\ell S_\ell}{\partial t}$, используя уравнения (25) и (26):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} =< i\,(\vec{\theta} \cdot \Big(-\frac{\partial \vec{u}_\ell S_\ell u_{\ell k}}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho \ell} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}\left(S_\ell \Pi_{\ell jk} + \mathrm{T}_{\ell jk}\right) + S_\ell G_{\ell j}\Big) \exp i\left(\vec{\theta} \cdot \vec{u}_\ell\right) S_\ell >. \tag{31}$$

Без учета массовых сил, последнее уравнение можно свести к виду:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} =< (\vec{\theta} \cdot \left(i\,\frac{\partial \vec{D} D_j \Phi}{\partial x_j} + \frac{\partial D_j \Phi}{\partial x_j}\right) >. \tag{32}$$

Итак, с учетом некоторых ограничений описание поля скоростей многофазовых турбулентных потоков можно выполнить с помощью обобщенного уравнения Э. Хопфа (32).

При описании многофазных турбулентных потоков с помощью пространственно-временного функционала поля скоростей в настоящее время существует трудность, связанная с отсутствием общего метода решения уравнений в вариационных производных. В научной литературе описаны методы решения некоторых специальных линейных уравнений в вариационных производных [20-22]. К решению подобных уравнений может быть применим метод преобразования Фурье, который в этом случае приводит к представлению искомого функционала $\Phi\left(\vec{\theta}(x,t)\right)$ в виде континуального интеграла Фурье-Стильтьеса [9]:

$$\Phi\left(\vec{\theta}(x,t)\right) = \int \exp i\,(\vec{\theta} \cdot \vec{F}) \Psi\left(\vec{F}(x,t)\right) d\mu\left(\vec{F}(x,t)\right), \tag{33}$$

где μ – мера Лебега в бесконечно-мерном функциональном пространстве.

«Точками» этого пространства являются функции $\vec{F}(x,t)$. Континуальные интегралы, по-видимому, впервые были применены к решению некоторых физических задач в работе [16]. В теории турбулентности этот аппарат применялся в работах [17,24].

Выводы

Применение уравнения (32) даст возможность успешно решить ряд практических задач, связанных рассмотрением многофазных турбулентных потоков и их промышленно-хозяйственным использованиям, например, в области исследований теплообмена и гидравлики многофазных потоков в элементах энергооборудования, в нефтегазовой промышленности, при использовании диффузии, барботажа, флотации и других физико-химических процессов в различных отраслях промышленности.

Список использованных источников

1. Васильев О.Ф., Лятхер В.М. Гидравлика // Механика в СССР за 50 лет, т.2.– М.: Наука 1970, с.709–790.

2. Великанов М.А. Динамика русловых потоков. – Л.М.: Гидрометиздат, 1946. – 148 с.

3. Великанов М.А. Динамика русловых потоков, ч. II. Насосы и русла. – М. : Гостехиздат, 1955. – 203 с.

4. Favre A., Gaviglio I., Dumas R. Structure of velocity space-time correlations in a boundary layer // Phys. Fluids, Supplement 10. – 1967, p. 138–143.

5. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М. : Наука, 1973 – 848 с.

6. Борщевский Ю.Т., Резник С.И., Шнайдер В.Э. О турбулентном перемешивании в пограничном слое несжимаемой жидкости. // Сб. тр. научн.–технич. конф. Машиностроение, вып.21. – Хабаровск, 1970, с. 321–331.

7. Гель П.В., Резник С.И. О возможном механизме турбулентного перемешивание в пограничном слое несжимаемой жидкости // Вібрації в техніці та технологіях. – 2010, №4(60), с. 9–12.

8. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика, ч.2. – М. : Физматгиз, 1963. – 728 с.

9. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика, ч.2. – М. : Наука, 1967. – 720 с.

10. Биллингслей П. Эргодическая теория и информация. – М. : Мир, 1969. – 238 с.

11. Foias C. Ergodic problems in functional spaces related to Navier – Stokes equations // Proc. Conf. Anal. rel. Topics. – Tokyo, 1969, p. 290–304.

12. Банах С.С. Курс функціонального аналізу. – К. :Радянська шк., 1948. – 216 с.

13. Эдвардс Р. Функциональный анализ. – М. : Мир, 1969. – 1071 с.

14. Арфкен Г. Математические методы в физике. – М. : Атомиздат, 1970. – 712 с.

15. Hopf E. Statistical hydromechanics and functional calculus. // J. Rational Mech. Anal. – 1952, – V.1, №1, p. 87–123.

16. Фейнман Р. Пространственно-временной подход к релятивистской квантовой механике. // Вопросы причинности в квантовой механике. Сб. статьей. – М. : ИЛ, 1955, с. 167–207.

17. Татарский В.И. Применение методов квантовой теории поля к задаче о вырождении однородной турбулентности. // ЖЭТФ, т.42, №5, 1962, с. 1386–1396.

18. Франкль Ф.И. К теории движения взвесенесущих потоков. // ДАН СССР, т.92, №2, 1953, с.166–170.

19. Дюнин А.К. Механика метелей. – Новосибирск: Изд-во СОАН СССР, 1963. – 385 с.

20. Татарский В.И. О первообразном функционале и его применении к интегрированию некоторых уравнений в функциональных производных. // УМН, т.16, №4(100), 1961, с. 179–186.

21. Новиков Е.А. Решение некоторых уравнений с вариационными производными. // УМН, т.16, №2(98), 1961, с 135–141.

22. Новиков Е.А. Функционалы и метод случайных сил в теории турбулентности. // ЖЭТФ, т.47, №5(11), 1964, с. 1919–1926.

23. Халмош П. Теория меры – М. : ИЛ, 1953. – 291 с.

24. Rosen G. Turbulence theory and functional integration, I,II. // Phys. Fluids, V.3, №4, 1960, p. 579–528.

Список источников в транслитерации

1. Vasilyev O.F., Lyatkher V.M. Gidravlika // Mekhanika v SSSR za 50 let, t. 2. – M. : Nauka 1970, s. 709–790.

2. Velikanov M.A. Dinamika ruslovykh potokov. – L.M. : Gidrometizdat, 1946. – 148 s.

3. Velikanov M.A. Dinamika ruslovykh potokov, ch. II. Nasosy i rusla. – M. : Gostekhizdat, 1955. – 203 s.

4. Favre A., Gaviglio I., Dumas R. Structure of velocity space-time correlations in a boundary layer // Phys. Fluids, Supplement 10. – 1967, p. 138–143.

5. Loytsyanskiy L.G. Mekhanika zhidkosti i gaza. – M. : Nauka, 1973 – 848 s.

6. Borshchevskiy YU.T., Reznik S.I., Shnayder V.E. V turbulentnom peremeshivaniya v pogranichnom sloye neszhimayemoy zhidkosti. // Sb. tr. nauchn.–tekhnich. konf. Mashinostroyeniye, vyp.21. – Khabarovsk, 1970, s. 321–331.

7. Gel P.V., Reznik S.I. V vozmozhno mekhanizme turbulentnogo peremeshivaniye v pogranichnom sloye neszhimayemoy zhidkosti // Vibratsii v tekhnike i tekhnologiyakh. – 2010, № 4 (60), s. 9–12.

8. Kochin N.Ye., Kibel I.A., Roze N.V. Teoreticheskaya Gidromekhanika, ch.2. – M. : Fizmatgiz, 1963. – 728 s.

9. Monin A.S., Yaglom A.M. Statisticheskaya Gidromekhanika, ch.2. – M. : Nauka, 1967. – 720 s.

10. Billingsli P. Ergodicheskaya teoriya i informatsiya. – M. : Mir, 1969. – 238 s.
11. Foias C. Ergodic problems in functional spaces related to Navier – Stokes equations // Proc. Conf. Anal. rel. Topics. – Tokyo, 1969, p. 290–304.
12. Banakh S.C. Kurs funktsionalnoho analizu. – K. : Radyanska shk., 1948. – 216 s.
13. Edvards R. Funktsional'nyy analiz. – M. : Mir, 1969. – 1071 s.
14. Arfken G. Matematicheskiye metody v fizike. - M. : Atomizdat, 1970. – 712 s.
15. Hopf E. Statistical hydromechanics and functional calculus. // J. Rational Mech. Anal. – 1952, – V.1, № 1, p. 87–123.
16. Feynman R. Prostranstvenno-vremennoy podkhod k relyativistskoy kvantovoy mekhanike. // Voprosy prichinnosti v kvantovoy mekhanike. Sb. stat'yey. – M. : IL, 1955, s. 167–207.
17. Tatarskiy V.I. Primeneniye metodov kvantovoy teorii polya k zadache o vyrozhdeniye odnorodnoy turbulentnosti. // ZHETF, t.42, № 5, 1962, s. 1386–1396.
18. Frankl F.I. K teorii dvizheniya vzvesenesushchikh potokov. // DAN SSSR, t. 92, № 2, 1953, s.166–170.
19. Dyunin A.K. Mekhanika meteley. – Novosibirsk: Izd-vo soan SSSR, 1963. – 385 s.
20. Tatarskiy V.I. O pervoobraznomu funktsionala i yego primenenii k integrirovaniya Nekotorykh uravneniy v funktsional'nykh proizvodnykh. // UMN, t.16, № 4 (100), 1961, s. 179–186.
21. Novikov Ye.A. Resheniye Nekotorykh uravneniy s variatsionnym proizvodnymi. // UMN, t.16, № 2 (98), 1961, s. 135–141.
22. Novikov Ye.A. Funktsionaly i metod sluchaynykh sil v teorii turbulentnosti. // ZHETF, t.47, № 5 (11), 1964, s. 1919–1926.
23. Khalmosh P. Teoriya mery – M. : IL, 1953. – 291 s.
24. Rosen G. Turbulence theory and functional integration, I, II. // Phys. Fluids, V.3, № 4, 1960, g. 579–528.

ТУРБУЛЕНТНА ДИФУЗІЯ В БАГАТОФАЗНИХ ПОТОКАХ

Анотація. *У роботі виконано узагальнення динамічного рівняння Хопфа для характеристичного функціоналу на випадок багатофазних турбулентних потоків.*

Ключові слова: *рівняння Хопра, багатофазні турбулентні потоки, дифузія.*

TURBULENT DIFFUSION IN MULTIPHASE FLOWS

Annotation. *In this paper generalization Hopf's dynamical equation for characteristic functional on case of polyphase turbulent flows had been carried out.*

Key words: *khoper equation, multiphase turbulent flows, diffusion.*