Яворський І. М.<sup>1, 2</sup>Мацько І. Й.<sup>1</sup>Юзефович Р. М.<sup>1</sup>Кравець І. Б.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Фізико-механічний  
інститут  
ім. Г. В. Карпенка НАН  
України*

<sup>2</sup> *Інститут  
телекомунікації  
Технологічно-  
природничого  
університету, Польща*

Javorskyj I.M.<sup>1, 2</sup>Matsko I.Y.<sup>1</sup>Yuzefovych R.M.<sup>1</sup>Kravets I.B.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Karpenko Physico-  
mechanical Institute NAS  
Ukraine*

<sup>2</sup> *Telecommunication  
Institute of University of  
Technology and Life  
Science, Poland*

УДК 621.319:519.22

## ВЕКТОРНА ДІАГНОСТИКА ПІДШИПНИКА КОЧЕННЯ ПРИ РОЗВИТКУ ДЕФЕКТУ НА ЗОВНІШНЬОМУ КІЛЬЦІ

Проведено аналіз змін лінійних та квадратичних інваріантів кореляційної тензор-функції векторних вібраційних сигналів підшипника кочення при розвитку дефекту на зовнішньому кільці. Показано, що криві другого порядку є інформативним ознаками для виявлення та локалізації дефектів.

**Ключові слова:** діагностика, підшипник кочення, вібраційний сигнал, періодично корельований випадковий процес, інваріанти кореляційної тензор-функції.

**Постановка проблеми.** Характерними ознаками вібраційних коливань є повторюваність і стохастичність. Повторюваність зумовлена циклічним принципом дії багатьох механізмів, а стохастичність може бути викликана флуктуаціями товщини і в'язкості змазки, змінами сил тертя, спонтанними та некерованими змінами навантаження, турбулентністю і т.п. Оскільки поява дефектів приводить до нелінійності механічних коливань систем, то повторюваність і стохастичність виступають у властивостях вібрацій незалежно, а у взаємодії. Саме в характері такої взаємодії проявляються ті властивості коливного процесу, які в багатьох випадках є визначальними як для виявлення дефектів, так і для встановлення їх характеру.

**Аналіз останніх публікацій.** Відомо, що характеристики вібраційних сигналів від обертових механізмів залежать від місця кріплення первинних перетворювачів. Тому доцільно вибирати такі діагностичні ознаки, на які місцеположення акселерометрів не впливає. Вивчивши зміну таких ознак при розвитку того чи іншого дефекту механізму, можна адекватно оцінювати стан цього механізму незалежно від системи координат, в якій відбиралися дані [1].

Нові можливості для опису та виявлення стану об'єктів створюються, коли проводити сумісний аналіз складових, виходячи з моделі вібраційного сигналу у вигляді векторного процесу. Вперше векторні ПКВП були розглянуті в статті [2], а також монографії [3], де коротко проаналізовані властивості кореляційних інваріантів та наведені можливі



методи їх обчислення. Поява дефектів в елементах механічних конструкцій [4] приводить до взаємодії детермінованої та стохастичної складових вібраційного сигналу, яка виявляється в модуляції його гармонічних складових. Властивості такої модуляції описуються імовірнісними характеристиками періодично корельованих випадкових процесів (ПКВП). Використання характеристик другого порядку ПКВП дає можливість виявляти дефекти механізмів вже на ранніх стадіях розвитку [5, 6].

**Метою даної статті** є дослідження лінійних та квадратичних інваріантів кореляційної тензор-функції векторних вібраційних процесів підшипника кочення при розвитку дефекту на зовнішньому кільці.

**Основна частина роботи.** Векторний випадковий процес  $\mathbf{o}(t) = \mathbf{i}\xi_1(t) + \mathbf{j}\xi_2(t)$ , де  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  – базисні орти, будемо називати періодично корельованим випадковим процесом, якщо його математичне сподівання є періодичним вектором [2, 3]:

$$\mathbf{m}_\xi(t) = E\xi(t) = \mathbf{i}m_{\xi_1}(t) + \mathbf{j}m_{\xi_2}(t) = \mathbf{m}_\xi(t+T)$$

а кореляційна функція

$$I_1(t,u) = E\mathbf{o}(t)\mathbf{o}(t+u)\cos \angle \mathbf{o}(t)\mathbf{o}(t+u) = b_{\xi_1}(t,u) + b_{\xi_2}(t,u),$$

$$D(t,u) = E\mathbf{o}(t)\mathbf{o}(t+u)\sin \angle \mathbf{o}(t)\mathbf{o}(t+u) = b_{\xi_1\xi_2}(t,u) - b_{\xi_2\xi_1}(t,u).$$

Перший характеризує властивості колінеарних змін випадкового вектора  $\mathbf{o}(t)$ , а другий – властивості ортогональних змін, його називають індикатором обертання.

Квадратичний інваріант

$$I_2(t,u) = b_{\xi_1}(t,u)b_{\xi_2}(t,u) - \frac{1}{4} [b_{\xi_1\xi_2}(t,u) + b_{\xi_2\xi_1}(t,u)]^2$$

є визначником симетричної частини тензора (1), а інваріанти

$$\lambda_{1,2}(t,u) = \frac{1}{2} [I_1(t,u) \pm \sqrt{I_1^2(t,u) - 4I_2^2(t,u)}]$$

$$\mathbf{b}_o(t,u) = E\overset{\circ}{\mathbf{o}}(t) \otimes \overset{\circ}{\mathbf{o}}(t+u),$$

де  $\overset{\circ}{\mathbf{o}}(t) = \mathbf{o}(t) - \mathbf{m}_o(t)$ , а  $\otimes$  – знак тензорного добутку, є періодичною за часом тензорною функцією

$$\mathbf{b}_o(t,u) = \mathbf{b}_o(t+T,u),$$

матричне подання якої має вигляд

$$\mathbf{b}_o(t,u) = \begin{bmatrix} b_{\xi_1}(t,u) & b_{\xi_2\xi_1}(t,u) \\ b_{\xi_1\xi_2}(t,u) & b_{\xi_2}(t,u) \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Очевидно, що елементи матриці (1) залежать від вибору системи координат. Проте існують такі величини на цих елементах, які при переході від одної системи координат до іншої залишаються незмінними. Їх називають кореляційними інваріантами. Передусім, це лінійні інваріанти  $I_1(t,u)$  і  $D(t,u)$ , які не пов'язані з орієнтацією власного базису тензора  $\mathbf{b}_o(t,u)$ . Інваріант  $I_1(t,u)$  є усередненим скалярним добутком векторів  $\mathbf{o}(t)$  і  $\mathbf{o}(t+u)$ , а інваріант  $D(t,u)$  – їх усередненим скісним добутком:

є її власними значеннями. Величини  $\lambda_1(t,u)$  і  $\lambda_2(t,u)$  визначають значення кореляційної функції за напрямками власного базису тензора (1). На їх основі може бути визначена кореляційна функція сигналу у довільному напрямі, а також побудовані характерні для кожного сигналу криві другого порядку.

Оцінки інваріантів сформуємо, виходячи з формул, які їх визначають

$$\hat{I}_1(t,u) = \hat{b}_{\xi_1}(t,u) + \hat{b}_{\xi_2}(t,u), \quad (2)$$

$$\hat{D}(t,u) = \hat{b}_{\xi_1\xi_2}(t,u) - \hat{b}_{\xi_2\xi_1}(t,u), \quad (3)$$



$$\hat{I}_2(t, u) = \hat{b}_{\xi_1}(t, u) \hat{b}_{\xi_2}(t, u) - \frac{1}{4} \left[ \hat{b}_{\xi_1 \xi_2}(t, u) + \hat{b}_{\xi_2 \xi_1}(t, u) \right]^2,$$

$$\hat{\lambda}_{1,2}(t, u) = \frac{1}{2} \left[ \hat{I}_1(t, u) \pm \left[ \hat{I}_1^2(t, u) - 4\hat{I}_2^2(t, u) \right]^{\frac{1}{2}} \right].$$

І оцінка квадратичного інваріанту  $\hat{I}_2(t, u)$ , і оцінки головних компонентів  $\hat{\lambda}_{1,2}(t, u)$  є нелінійними функціями оцінок авто-

взаємкореляційних функцій складових вектора  $\mathbf{o}(t)$  [8, 9].

Рівняння руху точок на кільці підшипника, враховуючи інерційні сили, сили заникання та силу тяжіння, можна записати так:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + \sum_{j=1}^{N_b} k \left[ x \cos \varphi_j + y \sin \varphi_j - \Pi_j \right]^{3/2} \cos \varphi_j = W + F_u \cos \omega t, \quad (4)$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + \sum_{j=1}^{N_b} k \left[ x \cos \varphi_j + y \sin \varphi_j - \Pi_j \right]^{3/2} \sin \varphi_j = F_u \sin \omega t. \quad (5)$$

Тут  $m$  – сумарна маса вала та внутрішнього кільця, проте майже завжди маса кільця значно менша, ніж вала, і її можна знехтувати, тому часто припускають, що  $m$  – маса вала [10].

Наведені вище рівняння (4) і (5) взяті за основу для комп'ютерної симуляції вібраційних сигналів. Для розв'язання цієї задачі використали числовий метод з коригуванням кроку обчислення. З допомогою симуляції отримали серію реалізацій вібрацій як у вертикальному, так і горизонтальному напрямках для підшипника з дефектом на зовнішньому кільці. Для опису дефекту використали функцію

$$\Pi_j = \frac{A + \varepsilon_A}{2} \left( 1 + \cos \frac{\varphi_j - \varphi_d}{\Delta \varphi} \right) + \varepsilon_\omega,$$

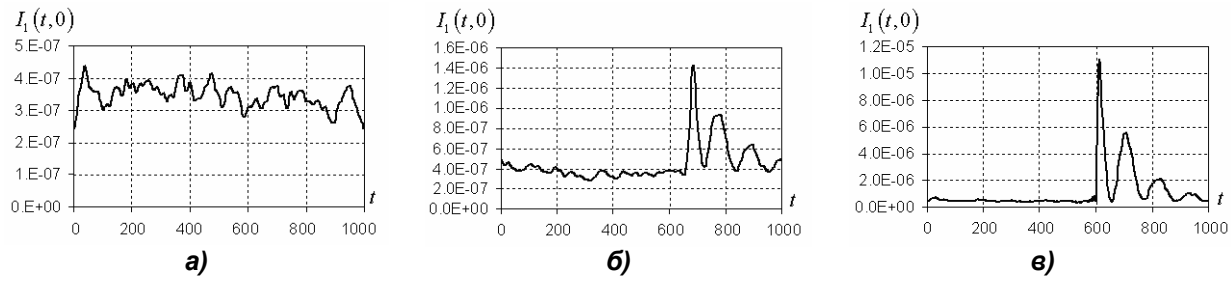
де  $A$  – розмір дефекту,  $\varepsilon_A$  – рівномірно розподілена на інтервалі  $[-0,25 A; 0,25 A]$  випадкова величина;  $\varphi_d$  – кут дефекту;  $\Delta \varphi$  – його кутова ширина;  $\varepsilon_\omega$  – стаціонарний білий шум. Симуляцію виконали за таких параметрів: маса вала  $m = 0.6$  kg, модуль Юнга для сталі  $E = 2.1 \times 10^{11}$  J/m, частота обертання вала  $\omega_0 = 80$  Hz, радіус внутрішнього кільця підшипника  $r = 0.023$  m, зовнішнього  $R = 0.046$  m, радіус тіл кочення  $r_b = 0.00398$  m, а їх кількість  $N_b = 8$ . Розміри дефекту були вибрані наступні: 2, 3 і 5

мкм. Для оцінювання ймовірнісних характеристик взято довжину реалізації рівну 100 періодам обертання з 300 точками на період, що дає можливість оцінювати характеристики сигналів з похибкою не більше 10 %.

Насамперед, проаналізуємо зміни оцінок першого лінійного інваріанта  $\hat{I}_1(t, u)$  зі збільшенням  $A$ . На рис. 1 наведено графіки його часових змін при  $u = 0$  для різних розмірів дефекту. Видно, що коли дефект проявляється слабо, тобто на стадіях його зародження, значення інваріанта  $\hat{I}_1(t, 0)$  змінюється флуктуаційно (рис. 1а). Середнє значення амплітуди інваріанта за період становить приблизно  $3.5 \times 10^{-7} (y.o.)^2$ .

Відношення мінімального значення  $I_1(t, 0)$  за період до максимального складає 0.67. При збільшенні дефекту в поведінці інваріанта  $I_1(t, 0)$  з'являється викид (рис. 1б).

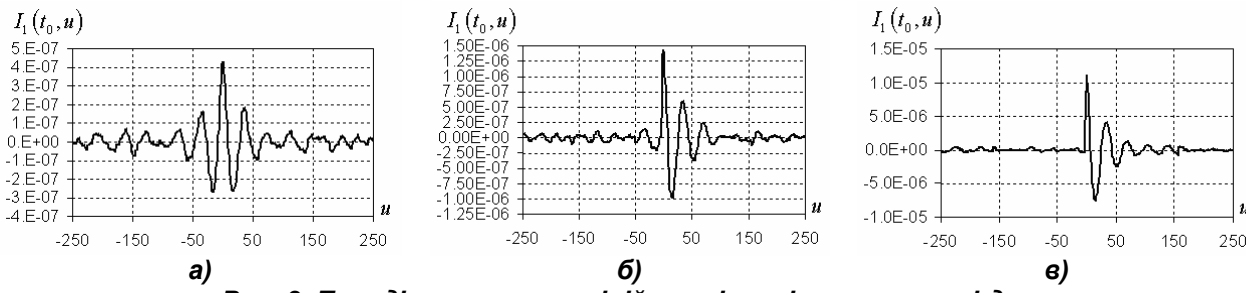
Відношення мінімального значення  $I_1(t, 0)$  за період до максимального зменшується і складає 0.28. При подальшому збільшенні розміру дефекту амплітуда викиду збільшується у 8 разів (рис. 1в). Відношення  $I_{1 \min}(t, 0) / I_{1 \max}(t, 0)$  при розмірі дефекту 5 мкм рівне 0.05.



**Рис. 1. Залежність оцінки першого лінійного інваріанта від часу при  $u = 0$  для підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці:**  
а) розмір дефекту 2 мкм; б) розмір дефекту 3 мкм; в) розмір дефекту 5 мкм

Аналіз поведінки  $I_1(t, u)$  по зсуві  $u$  проведемо для тих моментів часу  $t_0$ , для яких графіки поведінки  $I_1(t, 0)$  приймають екстремальні значення. Відповідні графіки показані на рис. 2. Видно, що на стадії зародження дефекту поведінка інваріанта  $\hat{I}_1(t, u)$  за зсувом має коливний характер, при

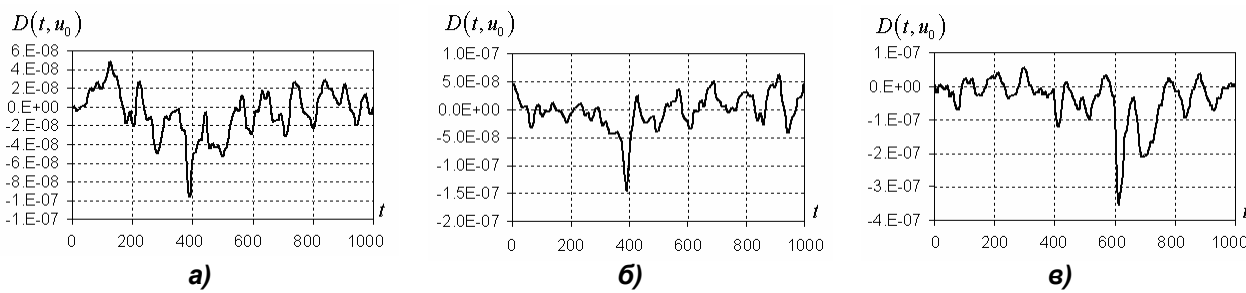
чому графік, що відображає цю поведінку, є симетричним відносно вертикальної осі ординат (рис. 2а). При збільшенні розміру тріщини симетричність зникає (рис. 2б), амплітуда інваріанта збільшується більш ніж втричі. При подальшому збільшенні розміру форма інваріанта зберігається зростає лише його амплітуда (рис. 2в).



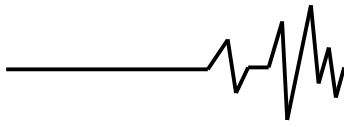
**Рис. 2. Поведінка першого лінійного інваріанта по зсуві для підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці:**  
а) розмір дефекту 2 мкм; б) розмір дефекту 3 мкм; в) розмір дефекту 5 мкм

Дослідження поведінки оцінки інваріанта  $\hat{D}(t, u)$  в часі також проводитимемо для тих зсувів  $u$ , для яких  $\hat{D}(t, u)$  приймає екстремальні значення. Такою точкою є

$u = 380$  у.о. З наведених на рис. 3 графіків бачимо, що в усіх випадках значення другого лінійного інваріанта змінюються флуктуаційно, але на кожному з графіків присутній незначний викид (рис. 3а-в).



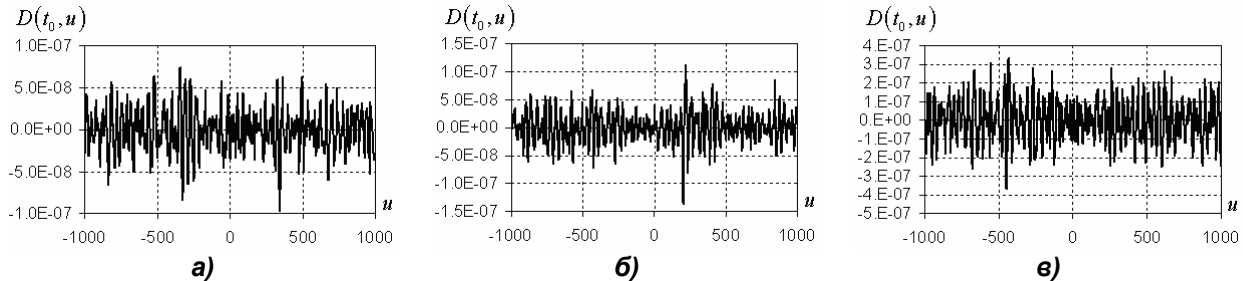
**Рис. 3. Залежність оцінки другого лінійного інваріанта від часу при  $u = 0$  для підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці:**  
а) розмір дефекту 2 мкм; б) розмір дефекту 3 мкм; в) розмір дефекту 5 мкм



Амплітуда викиду при розмірі дефекту 5 мкм більш ніж втричі переважає амплітуду викиду для випадку, коли дефект на стадії зародження.

Залежності другого лінійного інваріанта від зсуву для тих моментів часу  $t_0$ , де

залежності  $D(t_0, u)$  приймає екстремальні значення, показані на рис. 4. Видно, що незалежно від розміру дефекту, другий лінійний інваріант для цього типу дефекту проявляється слабо (рис. 4а-в).

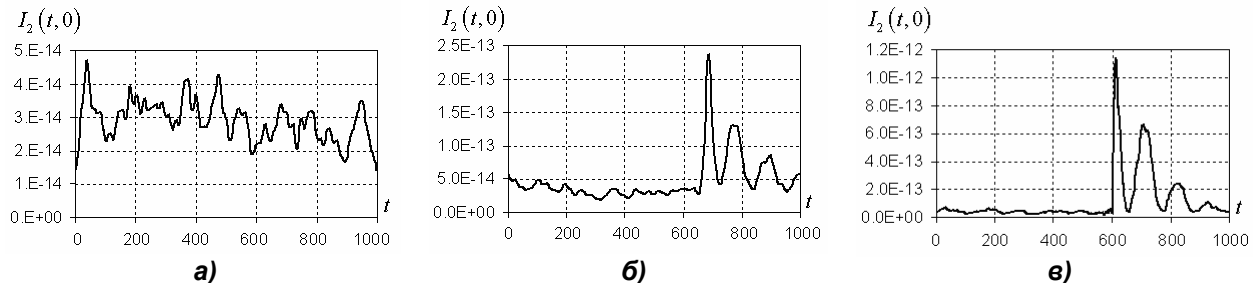


**Рис. 4. Залежність оцінки другого лінійного інваріанта від зсуву для підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці:**

**а) розмір дефекту 2 мкм; б) розмір дефекту 3 мкм; в) розмір дефекту 5 мкм**

На рис. 5 наведено часові залежності оцінки квадратичного інваріанта для різних розмірів дефекту на зовнішньому кільці при нульовому зсуві. Видно, що при малих розмірах дефекту значення оцінки інваріанта  $I_2(t, 0)$  змінюється флукуаційно. Його середнє значення за період становить приблизно

$3 \times 10^{-14} (y.o.)^2$ . Відношення мінімального значення цього інваріанта за період до максимального рівне 0.4. При збільшенні розміру дефекту до 3 мкм в поведінці  $I_2(t, 0)$  з'являється викид (рис. 5б).



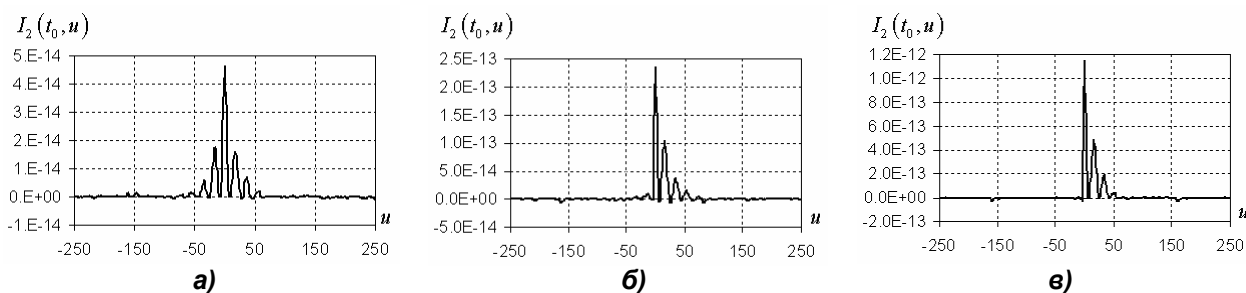
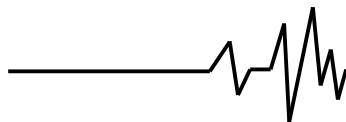
**Рис. 5. Залежність оцінки квадратичного інваріанта від зсуву для підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці:**

**а) розмір дефекту 2 мкм; б) розмір дефекту 3 мкм; в) розмір дефекту 5 мкм**

Відношення  $\hat{I}_{2\min}(t, 0) / \hat{I}_{2\max}(t, 0)$  для цього розміру дефекту складає 0.13. При подальшому збільшенні дефекту форма квадратичного інваріанта зберігається, а його амплітуда зростає майже в 5 разів (рис. 5в).

Проаналізуємо також зміни в поведінці цього інваріанта за зсувом при розвитку дефекту для тих моментів часу  $t_0$ , де залежності  $I_2(t, 0)$  приймають екстремальні значення. Відповідні графіки показані на рис. 6.

Бачимо, що у випадку, коли дефект слабо проявляється, інваріант  $\hat{I}_2(t_0, u)$  має коливний характер і є симетричним відносно вертикальної осі (рис. 6а). При збільшенні дефекту симетричність порушується, амплітуда квадратичного інваріанта зростає майже в п'ятеро. При подальшому збільшенні дефекту амплітуда  $I_2(t_0, u)$  збільшується ще в 5 разів (рис. 6в). Слід зазначити, що в усіх випадках квадратичний інваріант завжди більший від нуля.

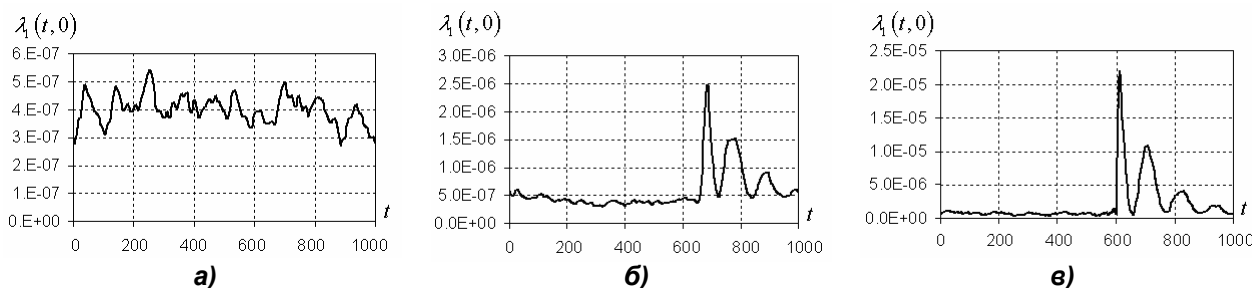


**Рис. 6. Залежність оцінки квадратичного інваріанта від зсуву для підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці:**

**а) розмір дефекту 2 мкм; б) розмір дефекту 3 мкм; в) розмір дефекту 5 мкм**

Проведемо тепер аналіз зміни в поведінці по часу та зсуву оцінок параметрів кривих другого порядку  $\hat{\lambda}_1(t, u)$  та  $\hat{\lambda}_2(t, u)$  при розвитку дефекту на зовнішньому кільці підшипника. Отримані часові залежності  $\hat{\lambda}_1(t, 0)$  для різних розмірів дефекту зовнішнього кільця наведені на рис. 7. Видно, що для випадку, коли дефект слабо проявляється значення  $\hat{\lambda}_1(t, 0)$  змінюються

флюктуаційно. Середнє значення за період становить  $4 \times 10^{-7} (y.o.)^2$ . Відношення мінімального значення амплітуди  $\lambda_1(t, 0)$  до максимального за період рівне 0.54 (рис. 7а). При збільшенні розміру дефекту в поведінці цього параметра по часу появляється викид (рис. 7б). Амплітуда параметра  $\hat{\lambda}_1(t, 0)$  зростає більш ніж в 5 разів.



**Рис. 7. Залежність оцінки параметра кривих другого порядку  $\hat{\lambda}_1(t, 0)$**

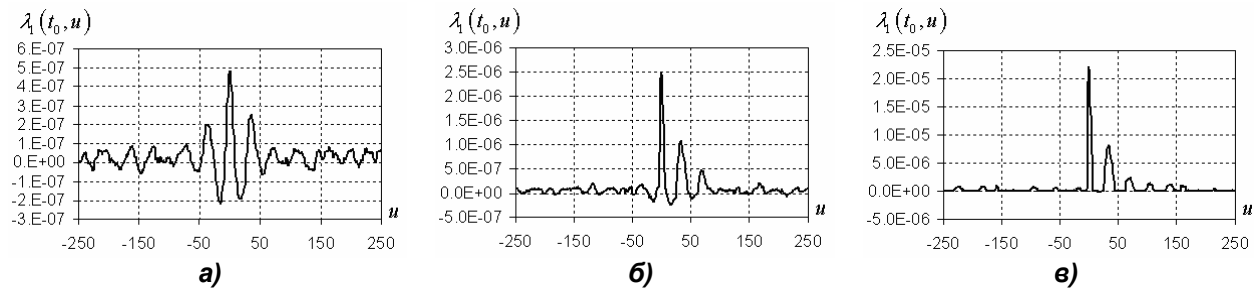
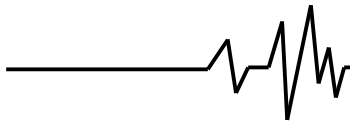
**для підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці:**

**а) розмір дефекту 2 мкм; б) розмір дефекту 3 мкм; в) розмір дефекту 5 мкм**

Відношення  $\hat{\lambda}_{1 \min}(t, 0) / \hat{\lambda}_{1 \max}(t, 0)$  для цього розміру дефекту становить 0.16. При подальшому збільшенні розміру дефекту амплітуда параметра  $\hat{\lambda}_1(t, 0)$  зростає майже у 8 разів (рис. 7в). Відношення мінімального значення амплітуди параметра  $\hat{\lambda}_1(t, 0)$  за період до максимального рівне 0.04.

Для проведення аналізу змін у поведінці цього параметра по зсуву при розвитку дефекту на зовнішньому кільці підшипника, вибираємо ті моменти часу  $t_0$ , для яких  $\hat{\lambda}_1(t, 0)$  приймають

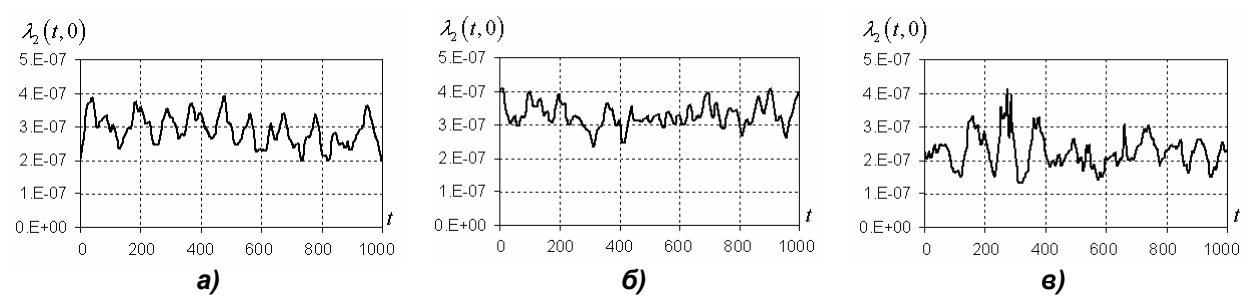
екстремальні значення. Отримані залежності для різних розмірів дефекту наведені на рис. 8. З них бачимо, що для випадку, коли дефект слабо проявляється поведінка інваріанта  $\hat{\lambda}_1(t_0, u)$  має коливний характер (рис. 8а). Проте при збільшенні розміру дефекту характер поведінки параметра  $\hat{\lambda}_1(t_0, u)$  змінюється (рис. 8б), зростає майже в 5 разів його амплітуда. При подальшому розвитку дефекту параметр  $\hat{\lambda}_1(t_0, u)$  стає постійно більшим нуля (рис. 8в), амплітуда його зростає ще у 8 разів.



**Рис. 8. Залежність оцінки параметра кривих другого порядку  $\hat{\lambda}_1(t_0, u)$  по зсуві для підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці:**  
**а) розмір дефекту 2 мкм; б) розмір дефекту 3 мкм;**  
**в) розмір дефекту 5 мкм**

Проведемо тепер аналіз зміни оцінки параметра кривих другого порядку  $\hat{\lambda}_2(t, u)$  при розвитку дефекту. Як впливає з рис. 9 при збільшенні розмірів дефекту поведінка інваріанта  $\hat{\lambda}_2(t, 0)$  змінюється незначно. Для всіх розмірів дефекту значення цього параметра змінюється флуктуаційно. Середнє

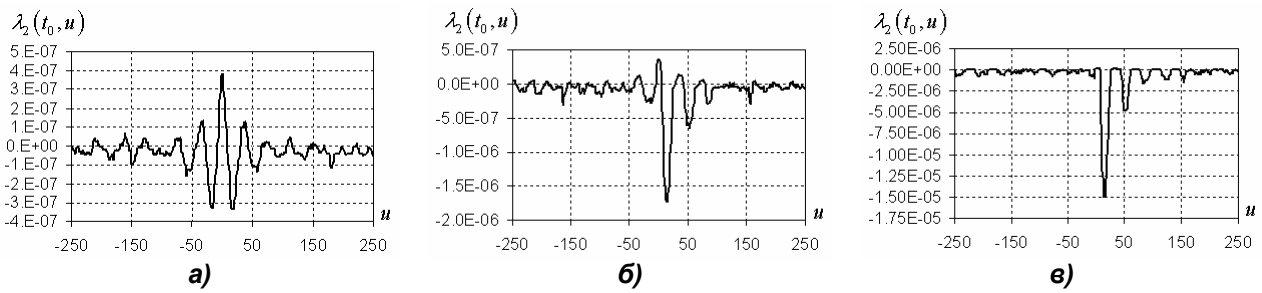
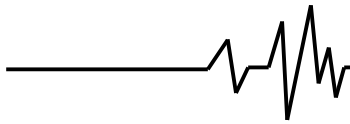
значення знаходиться в межах близько  $3 \times 10^{-7} (y.o.)^2$ . Відношення мінімального значення  $\hat{\lambda}_2(t, 0)$  до максимального за період становить для всіх випадків  $\approx 0.45$ .



**Рис. 9. Залежність оцінки параметра кривих другого порядку  $\hat{\lambda}_2(t, 0)$  для підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці:**  
**а) розмір дефекту 2 мкм; б) розмір дефекту 3 мкм;**  
**в) розмір дефекту 5 мкм**

Проведемо тепер аналіз змін у поведінці  $\hat{\lambda}_2(t, u)$  за зсувом. Для дослідження виберемо ті моменти часу  $t_0$ , де залежності  $\hat{\lambda}_2(t, 0)$  приймали пікові значення. Коли дефект лише зароджується, змінам за зсувом  $\hat{\lambda}_2(t_0, u)$  притаманний коливний характер, як і параметру  $\lambda_1(t_0, u)$  для цього розміру дефекту. Слід також відзначити, що змінюються вони синхронно. При збільшенні розміру

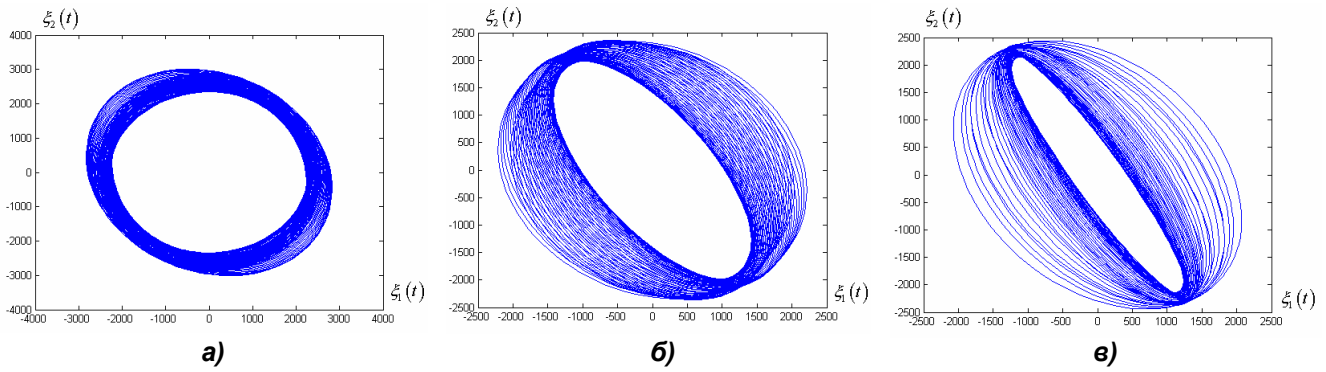
дефекту цей інваріант змінює характер своєї поведінки, все більше починає проявлятися у нижній частині графіку і практично стає від'ємним (рис. 10б). Амплітуда його зростає більш ніж в 4 рази. За своєю поведінкою він абсолютно протилежний до параметра  $\hat{\lambda}_1(t_0, u)$ . При подальшому збільшенні дефекту він практично завжди менший нуля (рис. 4.41в). Амплітуда викиду збільшується ще більш ніж у 8 разів.



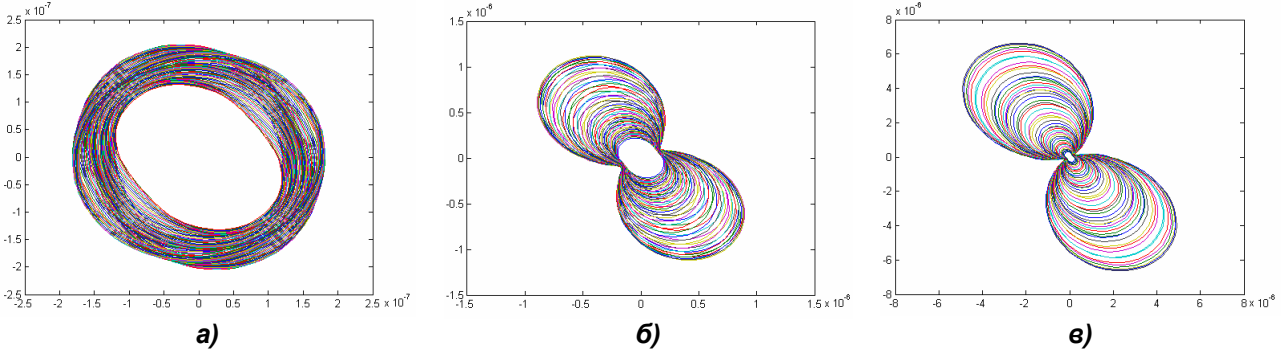
**Рис. 10. Залежність оцінки параметра кривих другого порядку  $\hat{\lambda}_2(t_0, u)$  по зсуві для підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці:**  
а) розмір дефекту 2 мкм; б) розмір дефекту 3 мкм; в) розмір дефекту 5 мкм

Проаналізувавши зміни в поведінці по часу та зсуву оцінки параметрів кривих другого порядку  $\hat{\lambda}_1(t, u)$  та  $\hat{\lambda}_2(t, u)$  при розвитку дефекту на зовнішньому кільці підшипника, намалюємо та проаналізуємо ці криві при  $u = 0$  (рис.11). З наведених рисунків бачимо, що для випадку, коли дефект слабо проявляється, кривими другого порядку будуть

кола (рис. 11а). При збільшенні дефекту ці кола починають вироджуватися в еліпси (рис. 11б), при цьому більша вісь еліпсів вказує на місцезнаходження дефекту на зовнішньому кільці. При подальшому розвитку дефекту еліпси ще сильніше видовжуються (рис. 11в). Показовою для діагностики є зміна з розвитком дефекту кореляційних зв'язків у певному напрямі (рис. 12).

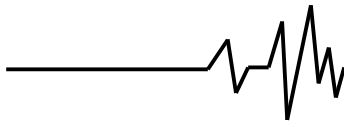


**Рис. 11. Криві другого порядку при нульовому зсуві для підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці:**  
а) розмір дефекту 2 мкм; б) розмір дефекту 3 мкм; в) розмір дефекту 5 мкм



**Рис. 12. Зміна кореляційних зв'язків за напрямком при нульовому зсуві для підшипника кочення з дефектом на зовнішньому кільці:**  
а) розмір дефекту 2 мкм; б) розмір дефекту 3 мкм; в) розмір дефекту 5 мкм





З рис. 12 добре видно, що при зародженні дефекту зміна кореляційних зв'язків у всіх напрямках відбувається практично з однаковою швидкістю (рис. 12а). При збільшенні дефекту ці графіки викривляються (рис. 12б) і бачимо, що в певному напрямі вони змінюються найбільше. Цей напрям вказує на місцезнаходження дефекту на зовнішньому кільці підшипника, як і більша вісь еліпсів кривих другого порядку. При подальшому розвитку дефекту ці криві ще сильніше витягуються в напрямі, що вказує на розташування дефекту (рис. 12в).

Отже, наявність дефекту на зовнішньому кільці підшипника кочення призводить до того, що вертикальна й горизонтальна складові вібрації набувають властивостей періодичної нестационарності другого порядку. Використання лінійних інваріантів кореляційної тензор-функції дозволяє швидше виявляти та класифікувати дефекти. Особливо наглядними для характеристики просторових властивостей двовимірного вібраційного сигналу є криві другого порядку, які визначаються власними значеннями симетричної частини кореляційної тензор-функції. При нерухомому дефекті (дефект на стаціонарному зовнішньому кільці підшипника) криві другого порядку вироджуються в еліпси, при цьому напрями головних осей еліпсів, які отримані при обробці симульованих реалізацій, вказують на місце розташування дефекту. Показовими також є діаграми, які визначають зміни кореляційних зв'язків за напрямками і які легко отримуються за квадратичними інваріантами.

#### Список використаних джерел

1. Яворський І. М. Математичні моделі та аналіз стохастичних коливань: монографія / І. М. Яворський. – Львів: ФМІ НАН України, 2013. – 802 с.
2. Яворский И.Н. Статистический анализ векторных периодически нестационарных случайных процессов // Отбор и передача информации. – 1987. – № 76. – С. 3–12.
3. Драган Я.П., Рожков В.А., Яворский И.Н. Методы вероятностного анализа ритмики океанологических процессов. – Л.: Гидрометеиздат, 1987. – 320 с.
4. Назарчук З. Т. Застосування теорії періодично корельованих випадкових процесів до раннього виявлення дефектності обертових систем / З. Т. Назарчук, І. М. Яворський, В. Ю. Михайлишин. // 3-я міжнародна конференція "Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій". – Львів, 2004. – С. 403–410.

5. Яворський І. М. Методи і нові технічні засоби вібродіагностики підшипникових вузлів та зубчатих передач / І. М. Яворський, П. П. Драбич, О. П. Драбич та ін. // Проблеми ресурсу і безпеки експлуатації конструкцій, споруд та машин. – Київ: Інститут електрозварювання ім. Є.О. Патона НАН України. – 2006. – С. 52–56.

6. Яворський І. М. Методи і засоби ранньої діагностики обертових механізмів / І. М. Яворський, П. П. Драбич, І. Б. Кравець та ін. // Праці міжнар. наук.-техн. конф. "Ресурс, надійність та ефективність використання енергетичного обладнання". – Харків, 2010. – С. 31–38.

7. Яворський І. М. Методи вібраційної діагностики початкових стадій пошкодження обертових систем / І. М. Яворський, П. П. Драбич, І. Б. Кравець та ін. // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2011. – Т. 47, № 2. – С. 134–140.

8. Яворський І. М. Оцінювання кореляційних інваріантів періодично нестационарних вібраційних сигналів / І. М. Яворський, Р. М. Юзефович, І. Й. Мацько та ін. // Відбір і обробка інформації. – 2013. – № 39 (115) – С. 15–23.

9. Яворський І. М. Інваріантний кореляційний аналіз векторних періодично корельованих випадкових процесів / І. М. Яворський, Р. М. Юзефович, І. Й. Мацько та ін. // Відбір і обробка інформації. – 2011. – № 35 (111). – С. 22 – 31.

10. Kankar P. K. Fault Diagnosis of a Rotor Bearing System using Response Surface Method / P. K. Kankar, S. P. Harsha, P. Kumar, S. C. Sharma // European J. Mechanics, A Solids. – 2009. – 28. – P. 841–857.

#### Список джерел в транслітерації

1. Yavorskyi I. M. Matematychni modeli ta analiz stokhastychnykh kolyvan: monohrafiia / I. M. Yavorskyi. – Lviv: FMI NAN Ukrainy, 2013. – 802 s.
2. Nazarchuk Z. T. Zastosuvannia teorii periodychno korelovanykh vypadkovykh protsesiv do rannoho vyjavlennia defektnosti obertovykh system / Z. T. Nazarchuk, I. M. Yavorskyi, V. Yu. Mykhailyshyn. // 3-ia mizhnarodna konferentsiia "Mekhanika ruinuвання materialiv i mitsnist konstruktsii". – Lviv, 2004. – S. 403–410.
3. Yavorskyi I. M. Metody i novi tekhnichni zasoby vibrodiahnostyky pidshypnykovykh vuzliv ta zubchatykh peredach / I. M. Yavorskyi, P. P. Drabych, O. P. Drabych ta in. // Problemy resursu i bezpeky ekspluatatsii konstruktsii, sporud i mashyn. – Kyiv: Instytut elektrosvaryuvannia im.



Ye. O. Patona NAN Ukrainy. – 2006. – S. 52–56.

4. Yavorskyi I. M. Metody i zasoby rannoi diahnostryky obertovykh mekhanizmiv / I. M. Yavorskyi, P. P. Drabych, I. B. Kravets ta in. // Pratsi mizhnar. nauk.-tekhn. konf. "Resurs, nadiinist ta efektyvnist vykorystannia enerhetychnoho obladnannia". – Kharkiv, 2010. – S. 31–38.

5. Yavorskyi I. N. Statisticheskii analiz vektornykh periodicheskii nestatsionarnykh sluchainykh protsesov // Otbor i peredecha informatsii. – 1987. – № 76. – S. 3–12.

6. Drahan Ya.P., Rozhkov V.A., Yavorskyi I. N. Metody veroiatnostnoho analiza ritmiki okeanolohicheskikh protsesov. – L.: Hidrometeoizdat, 1987. – 320 s.

7. Yavorskyi I. M. Metody vibratsiinoi diahnostryky pochatkovykh stadii poskodzhennia obertovykh system / I. M. Yavorskyi, P. P. Drabych, I. B. Kravets ta in. // Fizyko-khimichna mekhanika materialiv. – 2011. – T. 47, № 2. – S. 134–140.

8. Yavorskyi I. M. Otsiniuvannia koreliatsiinykh invariantiv periodychno nestatsionarnykh vibratsiinykh syhnaliv / I. M. Yavorskyi, R. M. Yuzefovych, I. Y. Matsko ta in. // Vidbir i obrobka informatsii. – 2013. – № 39 (115) – S. 15–23.

9. Yavorskyi I. M. Invariantnyi koreliatsiinyi analiz vektornykh periodychno korelovanykh vypadkovykh protsesiv / I. M. Yavorskyi, R. M. Yuzefovych, I. Y. Matsko ta in. // Vidbir i obrobka informatsii. – 2013 – № 35 (111). – S. 22 – 31.

10. Kankar P. K. Fault Diagnosis of a Rotor Bearing System using Response Surface Method / P. K. Kankar, S. P. Harsha, P. Kumar, S. C. Sharma // European J. Mechanics, A Solids. – 2009. – 28. – P. 841–857.

## ВЕКТОРНАЯ ДИАГНОСТИКА ПОДШИПНИКОВ КАЧЕНИЯ ПРИ РАЗВИТИИ ДЕФЕКТА НА НАРУЖНОМ КОЛЬЦЕ

**Аннотация.** Проведен анализ изменений линейных и квадратичных инвариантов корреляционной тензор-функции векторных вибрационных сигналов подшипника качения при развитии дефекта на внешнем кольце. Показано, что кривые второго порядка является информативным признакам для выявления и локализации дефектов.

**Ключевые слова:** диагностика, подшипник качения, вибрационный сигнал, периодически коррелированный случайный процесс, инварианты корреляционной тензор-функции.

## VECTORIAL DIAGNOSIS OF ROLLING BEARING AT OUTER RACE DEFECT GROWTH

**Annotation.** Model in the form of two-dimensional periodically correlated random process is proposed to be used for description of rolling bearing vibrations. Changes of linear and quadratic invariants of correlation tensor-function at defect growth on bearing outer race are analyzed. It is shown that second order curves are informative features for detection, classification and localization of defects.

**Key words:** diagnosis, rolling bearing, vibration signal, periodically correlated random process, invariants of correlation tensor-function.