

Дем'яненко А. Г.

*Дніпропетровський
державний аграрний
університет*

Demianenko A. G.

*Dnepropetrovsk State
Agrarian University*

УДК 534.113:539.3

МЕХАНІЧНІ І МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ДЕЯКИХ ЗАДАЧ ДИНАМІКИ ПРУЖНИХ СИСТЕМ З РУХОМИМ ІНЕРЦІЙНИМ НАВАНТАЖЕННЯМ ТА ЇХ ДОСЛІДЖЕННЯ

Розглянуто основні механічні і, відповідні їм, математичні моделі деяких задач динаміки пружних систем під дією рухомого інерційного навантаження та деяких інших пружних систем, дослідження яких зводиться до таких математичних моделей. Основна увага приділена дослідженню математичної моделі динаміки балки Тимошенко під дією рухомого інерційного навантаження, яка знаходиться на пружній основі та під дією стискувальної сили. Розв'язок задачі будується на основі метода двохвильового подання коливань у вигляді суперпозиції власних та супровідних коливань. Досліджується вплив швидкості, співвідношення рухомих і нерухомих мас на динаміку, визначаються критичні значення швидкості руху навантаження.

Ключові слова: динаміка, інерція, навантаження, частота, критична швидкість.

Вступ. У травні 2014 року виповнилося 167 років з дня виникнення та початку досліджень з проблеми динамічної дії рухомого навантаження на пружні конструкції і споруди. Приводом послужило руйнування Честерського мосту в Англії у маю 1847 року. У відомому огляді [6], присвяченому 100 річчю з дня виникнення проблеми, відомий фахівець з МТДТ Пановко Я.Г. писав: «Проблема динамического действия подвижной нагрузки, столетний юбилей которой исполнился в 1947 году, до наших дней не утратила своей актуальности, жизнь продолжает ставить все новые задачи и тем вызывает дальнейшее движение теории вперед». У динамічному ХХ-ХХІ сторіччі суттєве збільшення мас і швидкостей руху ставить нові задачі, потребує їх вирішення, викликаючи у свою чергу появу нових підходів у механічному та математичному моделюванні, нових і удосконалення старих методів їх дослідження, які дозволяють більш повно виявити усі кількісні та якісні особливості кінематичних та динамічних характеристик процесу руху таких систем. Підвищений інтерес до цієї проблеми останнім часом обумовлений появою і

застосуванням інформаційних технологій, які дозволяють більш повно та детально досліджувати математичні моделі та аналізувати отримані результати. Суттєво змінилося і традиційне уявлення про механічні системи з рухомих інерційних навантаженням. Простими прикладами таких систем є мости з рухомих потоком транспорту, трубопроводи, стержні, пластинки, оболонки під дією рухомого потоку рідини чи газу. До цього класу задач в рамках певних аналогій [2] можна віднести об'єкти змінної за часом довжини та об'єкти, які рухаються у поздовжньому напрямку, такі як нитки, дроти, профільні стержні у прокатному виробництві, смугові та ланцюгові пили, паски пасових передач, канати шахтних підіймальних машин і таке інше. В залежності від способу схематизації інерційних властивостей пружної конструкції і рухомого навантаження існують чотири принципово різних варіантів постановки задачі про вплив рухомого навантаження на пружні конструкції та споруди [7]. Найбільш складним з точки зору практики є четвертий варіант, де враховуються як сили інерції самої конструкції так і сили інерції рухомого навантаження.



Таблиця 1

Варіанти механічного моделювання динаміки об'єктів з рухомим навантаженням

№	Врахування маси		Розрахункова схема
	несучої конструкції	рухомого навантаження	
1	ні	ні	
2	ні	да	
3	да	ні	
4	да	да	

с

Основними особливостями математичних моделей таких задач, по - перше, є наявність у диференціальних рівняннях у тому чи іншому вигляді інерційного оператора

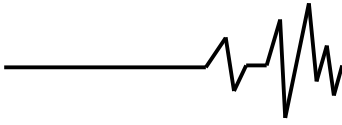
$$Z(x, t) = -\frac{q_0 + q_1}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2 \frac{q_1 v}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} - \frac{q_1 v^2}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

який визначає силову дію на пружний об'єкт рухомого масового навантаження. Характерним є той факт, що силова дія залежить, як від інтенсивності $q_1(x)$ і швидкості руху v потоку навантаження, так і від деформації пружного об'єкта $w(x, y, t)$, причому, чітко видно залежність силової дії від прискорення деформації $w_{tt}(x, y, t)$, швидкості кутової деформації $w_{tx}(x, y, t)$ та зміни кривини пружної лінії об'єкта $w_{xx}(x, y, t)$ тобто в такого роду системах силова дія є слідуюча за поведінкою системи змінюючи свою величину и напрямок в процесі деформації. Таким чином, силова дія на пружний об'єкт, викликана рухомою масою не є заздалегідь визначеною а визначається поточним станом системи. Це є другою особливістю задач динаміки пружних систем у полі сил інерції рухомих навантажень.

Третьою суттєвою особливістю цих задач є наявність в математичній моделі у тій чи іншій формі непарної за часом змішаної похідної, яка обумовлена прискоренням Кориоліса рухомого масового навантаження і утворює деякі труднощі при побудові розв'язків, а саме, не дозволяє розділити просторову x і часову t змінні за класичною схемою Фур'є в дійсній області шуканих функцій. До вигляду інерційного оператора зводиться і аеродинамічна дія на пружний об'єкт рухомого потоку рідини чи газу. Відомо [5], що швидкості рідини у трубопроводах літальних апаратів досягають 50-80 м/с, газів 200 – 250

м/с, а відмови літальних апаратів по причині втрати стійкості і руйнування трубопроводів складають до 60 % від загальної кількості відмов. У механічних системах такого типу можливі флатерні і дивергентні режими руху, параметричні, автоколивання та інші нестационарні процеси і явища. Рухоме навантаження буває рівномірно розподіленим або змінюватися за певним законом, дискретним або розподіленим з певними дискретними включеннями, мати сталу або змінну швидкість. В доповіді наведено короткий огляд та аналіз науковий праць присвячених дослідженню математичних моделей, які описують задачі будівельної механіки одновимірних пружних тіл з рухомим інерційним навантаженням та задачі, які зводяться до таких математичних моделей та досліджуються на основі методу двохвильового подання [4]. Наведено коротко історія виникнення і розвитку методу двохвильового подання при розв'язуванні задач динаміки пружних систем з рухомим інерційним навантаженням та об'єктів змінної довжини. Робиться акцент на аналогії математичних моделей задач динаміки пружних систем з рухомим інерційним навантаженням та задач динаміки пружних об'єктів змінної довжини, що в свою чергу обумовлює аналогії в їх поведінці.

1. Коливання одновимірних пружних об'єктів. Механічні, математичні моделі та їх дослідження. Відомо, що метод Фур'є належить до методів математичної фізики, які дають можливість отримати розв'язки певного класу диференціальних рівнянь у частинних похідних в явній формі. Лише у порівняно простих випадках маємо можливість побудувати явні розв'язки рівнянь у частинних



похідних за класичною схемою розділення змінних, як суми часткових рішень у вигляді добутку розділених функцій. До таких рівнянь належать рівняння коливань струни, мембрани, балки та деякі інші. Вперше такий підхід до розв'язування задач динаміки пружних систем з рухомим навантаженням було застосовано Радаковичем [7]. Пряме застосування такого методу до розгляду задач динаміки пружних систем з рухомим інерційним навантаженням у загальному випадку не є можливим. У зв'язку з цим були зроблені спроби застосування цього методу шляхом його модифікації та узагальнення.

Однією з перших відомих публікацій по застосуванню модифікованого методу розділення змінних до дослідження математичних моделей задач динаміки пружних систем з рухомим інерційним навантаженням була праця Н. Steuding [10], де розглядалися поперечні коливання балки під дією рухомих розподілених і зосереджених інерційних навантажень. Другою була стаття G. W. Housner [9], де показано, що загальний розв'язок диференціального рівняння у частинних похідних, яке описує пружні коливання об'єкта під дією рухомого інерційного навантаження являє лінійну комбінацію часткових розв'язків, які містять як симетричні, так і антисиметричні, зсунуті по фазі на 90° , форми коливань. Причому антисиметричні форми коливань обумовлені наявністю змішаної похідної непарної за часом, тобто силами інерції Коріоліса рухомого навантаження, і зв'язані через них з симетричними формами. Симетричні ж форми коливань при нерухомому навантаженні являють собою власні форми коливань навантаженої системи. Власне ці дві роботи започаткували метод двохвильового подання коливань пружних систем під дією рухомого інерційного навантаження, фізична інтерпретація якого вперше була наведена О. О. Горшко [1,2]. При застосуванні методу двохвильового подання коливань до дослідження таких систем, який дозволяє у деяких випадках отримати точні розв'язки задач, загальний розв'язок диференціального рівняння подається у вигляді суми двох рядів, один з яких являє собою класичну частину розв'язку, а другий ту частину, яка обумовлена наявністю змішаної непарної за часом похідної а, саме, інерційністю рухомого навантаження і не виявляється при традиційному застосуванні прямих методів математичної фізики до розв'язування задач цього класу. Форми першої групи названі власними формами, а форми другої груп – супровідними формами коливань

пружної системи. Супровідні коливання обумовлені і нетривіальні лише при наявності рухомого інерційного навантаження. Сьогодні більш повному та детальному дослідженню задач динаміки пружних систем з рухомим інерційним навантаженням методом двохвильового подання коливань сприяють сучасні інформаційні технології, чого не було, навіть, десять років назад, не кажучи вже про часи Н. Steuding, G. W. Housner, Я.Г. Пановко та інших.

На цей час методом двохвильового подання коливань досліджене “узагальнене” рівняння струни, поперечні коливання балок, пластинок під дією, як рівномірно розподіленого навантаження, так і зосереджених рухомих інерційних навантажень. Являє теоретичний та практичний інтерес дослідження коливань балки Тимошенко [3] під дією рухомого розподіленого інерційного навантаження, де математична модель містить непарну за часом змішану похідну не тільки у основному операторі диференціального рівняння руху а і у крайових умовах [3,4]. Математична модель задачі побудована на основі уточненої механічної моделі балки з урахуванням сил інерції повороту поперечних перерізів та деформацій зсуву, сил інерції рухомого навантаження, дія пружної основи, зовнішнього опору та осьової стискуючої сили. На основі класичної моделі згину Бернуллі-Ейлера, як відомо, рівняння поперечних коливань однорідного стержня має вигляд

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = q(x, t). \quad (1)$$

Граничні умови для шарнірно обіпертого по краям стержня запишуться наступним чином

$$\begin{cases} u|_{x=0,l} = 0, \\ \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=0,l} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

В наближенні Релея рівняння (1) набирає вигляду (3), а граничні умови залишаються без змін

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \rho I \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = q(x, t). \quad (3)$$

$$\text{Доданок} - \rho I \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} \text{ в рівнянні (3)}$$

дозволяє врахувати інерцію повороту поперечних перерізів балки. Некласична теорія згину Тимошенко дозволяє врахувати як



інерцію повороту перерізів, так і деформацію зсуву. Система рівнянь, які описують поперечні коливання стержня за уточненою моделлю Тимошенко, записується у вигляді [3,4]

$$\begin{cases} \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{GF}{k} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = q(x, t), \\ EI \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \rho I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{GF}{k} \left(\theta - \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Граничні умови для даної задачі не можуть бути записані в класичному вигляді (2), тому що в такому випадку вони були б некоректними і не відповідали б моделі Тимошенко [3]. Граничні умови для даної моделі запишуться у вигляді

$$\begin{cases} u|_{x=0,l} = 0, \\ \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{k\rho}{G} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{k}{GF} q(x, t) \right) \Big|_{x=0,l} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

В виразах (4)-(5) $k = \left(\frac{FS^*}{bI} \right)^2$ -

коефіцієнт зсуву, залежить від форми поперечного перерізу, $\theta(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma$ - повний кут повороту поперечного перерізу балки, де γ - додатковий кут повороту перерізу балки, який пов'язаний з деформацією зсуву.

Таким чином представлені три моделі коливань балки, яка знаходиться під дією рухомого навантаження $q(x, t)$. В рівняннях (1), (3) та системах (4)-(5) функція $q(x, t)$ без урахування сил інерції Коріоліса має вигляд

$$q(x, t) = -q_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right). \quad (6)$$

Тобто рухоме навантаження є сумою сил інерції, що викликані безпосередньо поперечними коливаннями стержня, та

відцентрових сил інерції, що викликані кривизною осі zdeформованого стержня. Серед них немає сил інерції Коріоліса і ця обставина суттєво впливає на вибір методу розв'язування поставлених задач незалежно від обраної моделі коливань балки. Дійсно, в цьому випадку можна обрати класичний спосіб розділення змінних – метод Фур'є, який полягає у представленні невідомої функції для шарнірно обіпертої балки у вигляді

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^N X_n(x) T_n(t) = \\ &= \sum_{n=1}^N \left(A_n \cos \frac{n\pi}{l} \omega t + B_n \sin \frac{n\pi}{l} \omega t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x \end{aligned} \quad (7)$$

Таким чином розв'язки таких задач можна достатньо просто знайти класичним методом розділення змінних, підпорядковуючи відповідним граничним умовам.

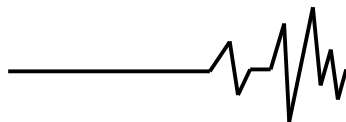
У випадку врахування сил інерції Коріоліса вираз для дії рухомого масового навантаження (6) переписеться наступним чином

$$q(x, t) = -q_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \quad (8)$$

Після підставки виразу (8) замість (6) у будь-яку математичну модель з поставлених задач, отримуємо рівняння з непарною за часом похідною від u , що зробить неможливим пряме використання методу Фур'є та викликає необхідність пошуку нового методу побудови розв'язку таких задач.

Розглянемо коливання елемента, який крім вже описаних раніше умов знаходиться в умовах дії осьової стискуючої сили N , сил опору зовнішнього середовища пропорційним швидкості поперечного руху перерізу з коефіцієнтом α та пружної основи з коефіцієнтом жорсткості c . Математична модель такої задачі зводиться до дослідження системи двох зв'язаних диференціальних рівнянь з частинними похідними

$$\begin{cases} \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{GF}{k} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) - N \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} + cu = q(x, t), \\ EI \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \rho I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{GF}{k} \left(\theta - \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0. \end{cases} \quad (9)$$



Розв'язок цієї системи підпорядковується граничними умовам (5). Дана задача при використанні виразу (8) є досить загальною, але не враховує прискорення руху рівномірного

навантаження. Щоб врахувати це прискорення, необхідно записати вираз для навантаження $q(x, t)$ наступним чином

$$q(x, t) = -q_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (10)$$

де $a = \frac{\partial v}{\partial t}$ - прискорення рухомого навантаження.

диференціальних рівняннях відповідної математичної моделі.

Виключаючи з системи (9) невідому функцію $\theta(x, y)$ отримуємо одне диференціальне рівняння відносно однієї невідомої функції прогину балки $u(x, t)$

Таким чином, математична модель (9) - (5) при використанні виразу (10) є найбільш загальною. Щоб отримати результати часткових випадків, необхідно буде покласти рівними нулю відповідні доданки у відповідних

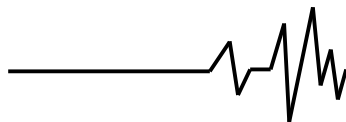
$$\begin{aligned} & \left(EI + kN \frac{EI}{GF} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \left(k\rho \frac{EI}{G} + \rho I + k\rho N \frac{I}{GF} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + k\rho^2 \frac{I}{G} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} - \\ & - \alpha k \frac{EI}{GF} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + \alpha k\rho \frac{I}{GF} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - \left(ck \frac{EI}{GF} + N \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\rho F + ck\rho \frac{I}{GF} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \\ & + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} + cu = q(x, t) - k \frac{EI}{GF} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + k \frac{\rho I}{GF} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Граничні умови (5) перепишемо у вигляді

$$\begin{cases} u|_{x=0,l} = 0, \\ \left(-GF \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k\rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - kq(x, t) \right) \Big|_{x=0,l} = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Після підстановки в диференціальне рівняння (11) та граничні умови (12) виразу для $q(x, t)$ з (10) матимемо

$$\begin{aligned} & \left(EI + kN \frac{EI}{GF} - kq_0 v^2 \frac{EI}{GF} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - 2kq_0 v \frac{EI}{GF} \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial t} - \\ & - \left(k\rho \frac{EI}{G} + kq_0 \frac{EI}{GF} + \rho I + k\rho N \frac{I}{GF} - k\rho q_0 v^2 \frac{I}{GF} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + 2kq_0 v \rho \frac{I}{GF} \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial t^3} + \\ & + \left(k\rho^2 \frac{I}{G} + k\rho q_0 \frac{I}{GF} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} - kq_0 a \frac{EI}{GF} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \alpha k \frac{EI}{GF} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + k\rho q_0 a \frac{I}{GF} \frac{\partial^3 q}{\partial x \partial t^2} + \\ & + \alpha k\rho \frac{I}{GF} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \left(q_0 v^2 - ck \frac{EI}{GF} - N \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2q_0 v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \\ & + \left(\rho F + q_0 + ck\rho \frac{I}{GF} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + q_0 a \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} + cu = 0 \end{aligned} \quad (13)$$



$$\left\{ \begin{aligned} &u|_{x=0,l} = 0, \\ &\left((kq_0v^2 - GF) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2kq_0v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + (k\rho F + kq_0) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + kq_0a \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=0,l} = 0 \end{aligned} \right. \quad (14)$$

Рівняння (13) є диференціальним рівнянням четвертого порядку з частинними похідними при однорідних граничних умовах (14). Введемо наступні безрозмірні функцію y , змінні z та τ ,

коефіцієнти a_{ij} та b_k

$$y(z, \tau) = \frac{u(x, t)}{l}, \quad z = \frac{x}{l}, \quad \tau = \frac{t}{t_0},$$

$$a_{4,0} = \frac{GF + kN - kq_0v^2}{GF},$$

$$a_{4,1} = -\frac{2kq_0v l}{GF t_0},$$

$$a_{4,2} = -\frac{k\rho EF + kq_0E + \rho GF + k\rho N - k\rho q_0v^2 l^2}{EGF t_0^2}$$

$$, a_{4,3} = \frac{2kq_0v\rho l^3}{EGF t_0^3},$$

$$a_{4,4} = \frac{k\rho^2 F + k\rho q_0 l^4}{EGF t_0^4}, \quad a_{3,0} = -\frac{kq_0a l}{GF},$$

$$a_{3,1} = -\frac{\alpha k l^2}{GF t_0}, \quad a_{3,2} = \frac{k\rho q_0a l^3}{EGF t_0^2},$$

$$a_{3,3} = \frac{\alpha k\rho l^4}{EGF t_0^3},$$

$$a_{2,0} = \frac{q_0v^2 EI - ck - NEI}{EIGF} l^2,$$

$$a_{2,1} = \frac{2q_0v l^3}{EI t_0},$$

$$\begin{aligned} &[a_{4,0} \varphi^{IV} + a_{3,0} \varphi^{III} + a_{4,1} \omega \varphi^{III} + (a_{2,0} - a_{4,2} \omega^2) \varphi^{II} + a_{3,1} \omega \varphi^{II} + (a_{1,0} - a_{3,2} \omega^2) \varphi^I - \\ &- (a_{4,3} \omega^3 - a_{2,1} \omega) \varphi^I + (a_{4,4} \omega^4 - a_{2,2} \omega^2) \varphi - (a_{3,3} \omega^3 - a_{1,1} \omega + a_{0,0}) \varphi] \cos \omega \tau + \\ &+ [a_{4,0} \varphi^{IV} + a_{3,0} \varphi^{III} - a_{4,1} \omega \varphi^{III} + (a_{2,0} - a_{4,2} \omega^2) \varphi^{II} - a_{3,1} \omega \varphi^{II} + (a_{1,0} - a_{3,2} \omega^2) \varphi^I + \\ &+ (a_{4,3} \omega^3 - a_{2,1} \omega) \varphi^I + (a_{4,4} \omega^4 - a_{2,2} \omega^2) \varphi + (a_{3,3} \omega^3 - a_{1,1} \omega + a_{0,0}) \varphi] \sin \omega \tau = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

$$a_{2,2} = \frac{\rho GF^2 + q_0 GF + ck\rho l l^4}{EIGF t_0^2},$$

$$a_{1,0} = \frac{q_0a}{EI} l^3, \quad a_{1,1} = \frac{\alpha l^4}{EI t_0}, \quad a_{0,0} = \frac{c}{EI} l^4,$$

$$b_0 = \frac{kq_0v^2 - GF}{GF}, \quad b_1 = \frac{2kq_0v l}{GF t_0},$$

$$b_2 = \frac{k\rho F + kq_0 l^2}{GF t_0^2}, \quad b_3 = \frac{kq_0a l}{GF}.$$

Крайову задачу (13)-(14) можна переписати у наступному більш компактному вигляді

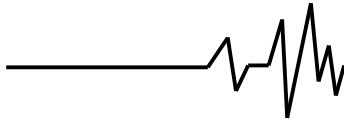
$$\sum_{i=0}^4 \sum_{j=0}^i a_{ij} \frac{\partial^i y}{\partial z^{i-j} \partial \tau^j} = 0, \quad (15)$$

$$\left\{ \begin{aligned} &y|_{z=0,1} = 0, \\ &\left(b_0 \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + b_1 \frac{\partial^2 y}{\partial z \partial \tau} + b_2 \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} + b_3 \frac{\partial y}{\partial z} \right) \Big|_{z=0,1} = 0 \end{aligned} \right. \quad (16)$$

Шукану функцію представимо у вигляді

$$y(z, \tau) = \varphi(z) \cos \omega \tau + \phi(z) \sin \omega \tau. \quad (17)$$

Функції $\varphi(z)$ та $\phi(z)$ є формами поперечних коливань стержня: $\varphi(z)$ - форма власних коливань, $\phi(z)$ - супровідних. Після підстановки (17) в (15)-(16) отримаємо наступну систему зв'язаних диференціальних рівнянь відносно функцій власних та супровідних коливань



$$\begin{cases} \varphi \cos \omega \tau + \phi \sin \omega \tau \Big|_{z=0,1} = 0, \\ (b_0 \varphi^{II} + b_3 \varphi^I + b_1 \omega \varphi^I - b_2 \omega^2 \varphi) \cos \omega \tau + (b_0 \phi^{II} + b_3 \phi^I - b_1 \omega \phi^I - b_2 \omega^2 \phi) \sin \omega \tau \Big|_{z=0,1} = 0 \end{cases} \quad (19)$$

Прирівнявши до нуля множники при наступні системи звичайних зв'язаних $\cos \omega \tau$ та $\sin \omega \tau$ в (18)-(19) отримуємо диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \alpha_4 \varphi^{IV} + \alpha_3 \varphi^{III} - \beta_3 \varphi^{III} + \alpha_2 \varphi^{II} - \beta_2 \varphi^{II} + \alpha_1 \varphi^I - \beta_1 \varphi^I + \alpha_0 \varphi - \beta_0 \phi = 0, \\ \alpha_4 \phi^{IV} + \alpha_3 \phi^{III} + \beta_3 \varphi^{III} + \alpha_2 \phi^{II} + \beta_2 \varphi^{II} + \alpha_1 \phi^I + \beta_1 \varphi^I + \alpha_0 \phi + \beta_0 \varphi = 0, \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} \varphi \Big|_{z=0,1} = 0, \\ \phi \Big|_{z=0,1} = 0, \\ b_0 \varphi^{II} + b_3 \varphi^I + b_1 \omega \varphi^I - b_2 \omega^2 \varphi \Big|_{z=0,1} = 0, \\ b_0 \phi^{II} + b_3 \phi^I - b_1 \omega \phi^I - b_2 \omega^2 \phi \Big|_{z=0,1} = 0, \end{cases} \quad (21)$$

де $\alpha_4 = a_{4,0}$, $\beta_4 = 0$, $\alpha_3 = a_{3,0}$,

$\beta_3 = -a_{4,1} \omega$, $\alpha_2 = a_{2,0} - a_{4,2} \omega^2$,

$\beta_2 = -a_{3,1} \omega$, $\alpha_1 = a_{1,0} - a_{3,2} \omega^2$,

$\beta_1 = a_{4,3} \omega^3 - a_{2,1} \omega$,

$\alpha_0 = a_{4,4} \omega^4 - a_{2,2} \omega^2$,

$\beta_0 = a_{3,3} \omega^3 - a_{1,1} \omega + a_{0,0}$

Використовуючи комплексну згортку помножимо друге рівняння (20) на $i = \sqrt{-1}$ та додамо до першого, аналогічно зробимо і в системі рівнянь (21).

$$\begin{aligned} & \alpha_4 (\varphi^{IV} + i \phi^{IV}) + (\alpha_3 + i \beta_3) (\varphi^{III} + i \phi^{III}) + (\alpha_2 + i \beta_2) (\varphi^{II} + i \phi^{II}) + \\ & + (\alpha_1 + i \beta_1) (\varphi^I + i \phi^I) + (\alpha_0 + \beta_0) (\varphi + i \phi) = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

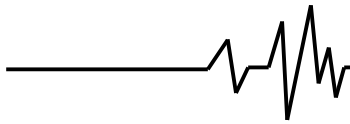
$$\begin{cases} \varphi + i \phi \Big|_{z=0,1} = 0, \\ b_0 (\varphi^{II} + i \phi^{II}) + (b_3 - i b_1 \omega) (\varphi^I + i \phi^I) - b_2 \omega^2 (\varphi + i \phi) \Big|_{z=0,1} = 0 \end{cases} \quad (23)$$

Ввівши комплексні коефіцієнти $\gamma_j = \alpha_j + i \beta_j$ та комплексну функцію дійсного аргументу $\Phi(z) = \varphi(z) + i \phi(z)$ отримаємо одне звичайне диференціальне рівняння (24) з граничними умовами (25) відносно цієї функції $\Phi(z)$

$$\sum_{j=0}^4 \gamma_j \frac{d^j \Phi}{dz^j} = 0, \quad (24)$$

$$\begin{cases} \Phi(z) \Big|_{z=0,1} = 0, \\ b_0 \Phi^{II}(z) + (b_3 - i b_1 \omega) \Phi^I(z) - b_2 \omega^2 \Phi(z) \Big|_{z=0,1} = 0. \end{cases} \quad (25)$$

Розв'язки диференціального рівняння (24) шукаємо у вигляді $\Phi(z) = \sum_{j=1}^4 C_j e^{k_j z}$, де k_j - корені характеристичного рівняння



$\sum_{j=0}^4 \gamma_j k^j = 0$, що є алгебраїчним рівнянням четвертого порядку з комплексними коефіцієнтами, розв'язки якого були знайдені за допомогою методу градієнтного спуску, котрий запропонований Воєводіним. C_j - невідомі сталі, що визначаються за граничними умовами (25), які перепишемо у вигляді (26)

$$\begin{cases} \Phi(0) = 0, \\ \Phi(1) = 0, \\ b_0 \Phi''(0) + (b_3 - ib_1 \omega) \Phi'(0) - b_2 \omega^2 \Phi(0) = 0, \\ b_0 \Phi''(1) + (b_3 - ib_1 \omega) \Phi'(1) - b_2 \omega^2 \Phi(1) = 0 \end{cases} \quad (26)$$

Після підстановки $\Phi(z) = \sum_{j=1}^4 C_j e^{k_j z}$ в

систему рівнянь (26) отримаємо систему алгебраїчних рівнянь відносно чотирьох невідомих C_i

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0, \\ C_1 e^{k_1} + C_2 e^{k_2} + C_3 e^{k_3} + C_4 e^{k_4} = 0, \\ d_1 C_1 + d_2 C_2 + d_3 C_3 + d_4 C_4 = 0, \\ d_1 e^{k_1} C_1 + d_2 e^{k_2} C_2 + d_3 e^{k_3} C_3 + d_4 e^{k_4} C_4 = 0, \end{cases} \quad (27)$$

де $d_j = b_0 k_j^2 + (b_3 - ib_1 \omega) k_j - b_2 \omega^2$.

Система (27) є системою однорідних алгебраїчних лінійних рівнянь з комплексними коефіцієнтами, нетривіальні розв'язки якої будуть існувати тільки у випадку, коли визначник цієї системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{k_1} & e^{k_2} & e^{k_3} & e^{k_4} \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ d_1 e^{k_1} & d_2 e^{k_2} & d_3 e^{k_3} & d_4 e^{k_4} \end{vmatrix} \quad (28)$$

дорівнюватиме нулю, тобто треба розв'язати рівняння $\Delta(\omega) = 0$, що вимагає розв'язання

$$\text{системи рівнянь} \begin{cases} \text{Re}(\Delta(\omega)) = 0, \\ \text{Im}(\Delta(\omega)) = 0, \end{cases} \text{ корені}$$

рівнянь якої, якщо співпадатимуть, будуть власними значеннями крайової задачі та власними частотами коливань балки Тимошенко з рухомим інерційним навантаженням а, відповідні, функції $\varphi(z)$ власними та $\phi(z)$ супровідними формами її коливань.

2. Аналіз отриманих результатів.

Для чисельної реалізації алгоритму методу двохвильового подання при дослідженні динаміки пружного елемента під дією рухомого інерційного навантаження була складена програма в середовищі Delphi [4]. Метою чисельного експерименту було з'ясування залежності між власними частотами поперечних коливань стержня та швидкістю руху навантаження. Залежність між власними частотами ω та швидкістю руху v встановлена таким чином: розв'язувалась задача про знаходження власних значень системи при одних і тих самих вихідних даних окрім швидкості, яка змінювалась, тобто було розв'язано велику кількість подібних задач і встановлена дискретна залежність між власними значеннями та швидкістю, що зображена на рис.1, де наведено залежності перших восьми власних значень.

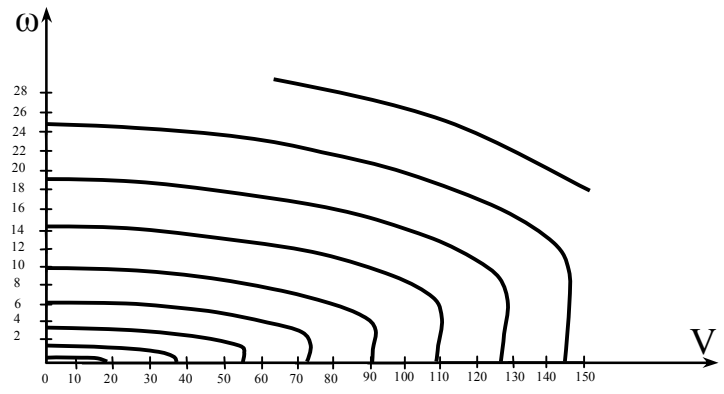


Рис. 1. Залежність власних частот від швидкості рухомого навантаження

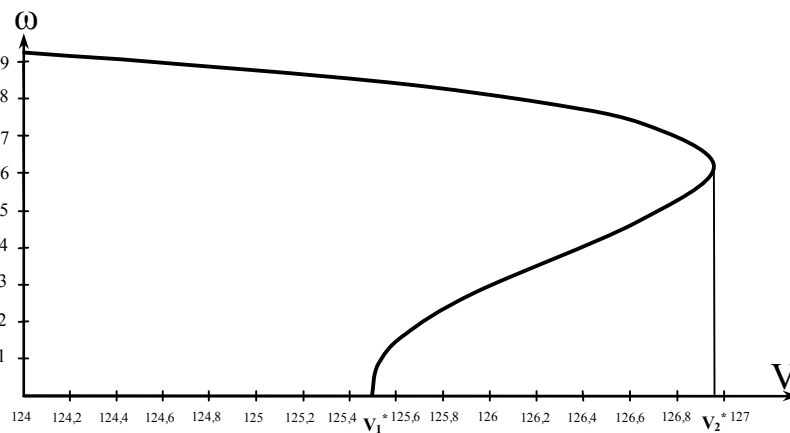
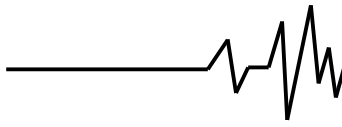


Рис.2. Залежність власної частоти ω_7 від швидкості рухомого навантаження

Розглянемо детально одну з них. На рис.2 наведено графік для сьомої власної частоти коливань, звідки видно, що при збільшенні швидкості руху навантаження частота зменшується. Але при досягненні певного значення V_1^* раптово з'являється нова основна власна частота, і залежність цієї частоти від швидкості вже є зростаючою. На деякому проміжку мають місце початкова та нова власні частоти, і при цьому вони наближуються одна до одної. При V_2^* вони стають рівними. Значення швидкості V_1^* назвемо першою критичною швидкістю, при досягненні якої відбуваються статична втрата стійкості, тобто у балки з'являється нова рівноважна форма, відносно якої в подальшому відбуваються коливання. Значення швидкості V_2^* назвемо другою критичною швидкістю, при досягненні якої відбувається динамічна втрата

стійкості, коли дві власні частоти співпадають або близькі до цього. В нашому випадку при досягненні V_2^* будуть спостерігатися значні збільшення амплітуд коливань, що є небезпечним для конструкції. Зауважимо, що такий результат якісної поведінки балки не вдається отримати наближеними методами при розгляді спрощених механічних моделей без урахування сил інерції Коріоліса, що наведено на рис.3, де криві 1,2,3 відповідають моделям Тимошенко, Релея та Бернуллі-Ейлера без врахування, відповідно криві 4,5,6 з врахуванням сил інерції Коріоліса. Що ж стосується пружних об'єктів змінної за часом довжини то ці задачі взагалі виходять за рамки традиційних класичних крайових задач математичної фізики. В таких задачах фундаментальні поняття власних частот і власних функцій виходять за рамки загальноприйнятих в математичній фізиці бо стають деякими функціями часу [1,2].

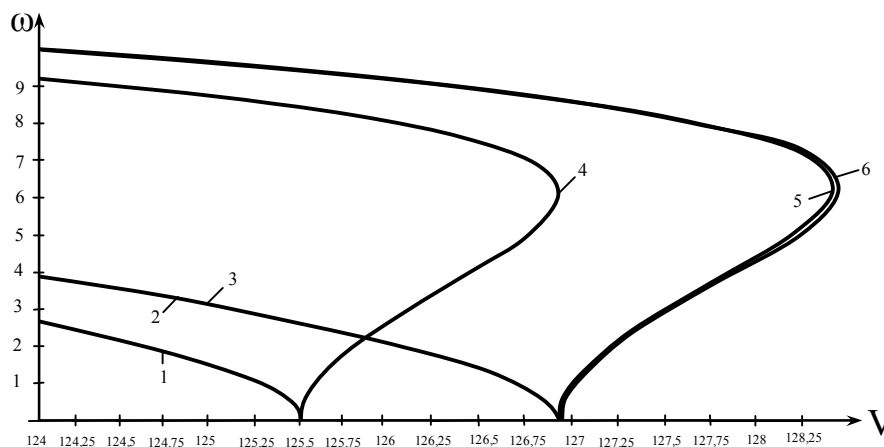


Рис.3. Залежність власної частоти ω від швидкості рухомого навантаження для різних моделей коливань



Що ж стосується пружних об'єктів змінної за часом довжини то ці задачі взагалі виходять за рамки традиційних класичних крайових задач математичної фізики. В таких задачах фундаментальні поняття власних частот і власних функцій виходять за рамки загальноприйнятих в математичній фізиці бо стають деякими функціями часу [1,2]. Цей неklasичний розділ математичної фізики чекає на додаткові дослідження, узагальнення та розвиток. У цілому, задачі динаміки пружних систем під дією рухомого інерційного навантаження та задачі, які приводяться до такої математичної моделі в межах певних аналогій, по постановці, методам дослідження, якісним та кількісним результатам, важливості для практики побудови і експлуатації інженерних конструкцій та споруд, складають самостійний науковий напрямок у будівельній механіці пружних деформованих систем. Основною ознакою такого роду систем є наявність у математичній моделі у тому чи іншому вигляді інерційного диференціального оператора. Причому при проектуванні і експлуатації інженерних конструкцій і споруд такого типу треба не забувати, що критичні швидкості руху навантаження, при яких можлива втрата їх стійкості, можуть бути достатньо малими, особливо у випадках дії на елементи конструкцій та споруд стискуючих сил, близьких за значенням до критичних за Ейлером.

Список використаних джерел

1. Горошко О. А. Собственные и сопровождающие колебания в системе с подвижными инерционными нагрузками / О. А. Горошко // Труды V Международной конференции по нелинейным колебаниям: 1970 г. – Киев : – С. 215–219.
2. Горошко О.А. Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины / О.А. Горошко, Г.Н. Савин. – К: Наукова думка, 1973. – 224 с.
3. Григолюк Э.И. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. Итоги науки и техники. Серия «Механика твердых деформируемых тел»/ Э.И. Григолюк, И.Т. Селезов. – М: Наука, 1973. – 272 с.
4. Евстратенко Д. Исследование динамики одномерных упругих объектов с подвижной инерционной нагрузкой на основе уточненной модели / Д. Евстратенко, А. Демьяненко //Theoretical Foundation of Civil Engineering. Warsaw, 2009. V.17, C. 63–68.

5. Доценко П.Д. Динамика трубопроводных систем / П.Д.Доценко. – Харьков.: Основа, 1998. – 223 с.
6. Пановко Я. Г. Исторический очерк развития теории динамического действия подвижной нагрузки / Я.Г. Пановко // Труды ЛКВВИА. – 1948. – Л, – С. 8–38.
7. Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем / Я. Г.Пановко, И. И Губанова. – М.: Наука, 1987 – 352 с.
8. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле/ С.П. Тимошенко. – М.: Наука, 1967. – 444 с.
9. Housner G. W. Bending Vibrations of a Pipe Line Containing Flowing Fluid. Journal of Applied Mechanics. / G. W.Housner // Trans ASME – 1952. – vol.19, №2, – P. 205–209.
10. Stending H. Die Schwingung von Trager bei bewegten Lasten / H. Stending // Jng.Acch. – 1934. – P.275–305.

Список джерел в транслітерації

1. Horoshko O.O. Sobstvenie i soprovozhdayushchie kolebania v sisteme s podvizhimi inertsionimi naghruzkami / O.O. Horoshko // Trudi V mezhdunarodnoi konferentsii po nelineynim kolebaniiam.:1970, Kiev: – s. 215–219.
2. Horoshko O.O. Vvedenie v mekhanichu deformiruemikh odnomernikh tel peremenoj dlini / O.O. Horoshko, H.N.Savin. – K; Naukova dumka, 1973. – 224 s.
3. Grigolyuk E.I. Neklasicheskie teorii kolebanij stержney, plastin i obolochek / E.I. Grigolyuk, I.T. Selezov. – M: Nauka, 1973.– 272 s.
4. Eyvstratenko D.A. Issledovanie dinamiki odnomernikh uprugikh ob'ektov s podvizhnoy inertsionoy naghruzkoy na osnove utochnenoy modeli / D. Eyvstratenko, A.Demianenko // Theoretical Foundation of Civil Engineering. Warsaw, 2009. V.17, s. 63–68.
5. Dotsenko P.D. Dinamika truboprovodnikh system / P.D. Dotsenko. Kharkov,: Osnova, 1998, – 223 s.
6. Panovko Ia.G. Istoricheskiy ocherk razvitiia teorii dinamicheskogo deystviia podvizhoj naghruzki / Ia.G. Panovko // Trudi LKVVIA. – 1948. – L, – s. 8–38.
7. Panovko Ia.G. Ustoychivost i kolebaniiia uprugikh system/ Ia.G.Panovko, I.I.Hubanova. – М.: Nauka, 1987 – 352 s.
8. Timoshenko S.P. Vibration problems in engineering / S.P. Timoshenko. – М.: Nauka, 1967. – 444 s.
9. Housner G. W. Bending Vibrations of a Pipe Line Containing Flowing Fluid. Journal of



Applied Mechanics. / G. W. Housner // Trans ASME – 1952. – vol. 19, №2, – P. 205–209.

10. Stending H. Die Schwingung von Trager bei bewegten Lasten / H. Stending // Jng. Acch. – 1934. – P. 275–305.

**МЕХАНИЧЕСКИЕ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
МОДЕЛИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ
УПРУГИХ СИСТЕМ С ПОДВИЖНОЙ
ИНЕРЦИОННОЙ НАГРУЗКОЙ И ИХ
ИССЛЕДОВАНИЯ**

Аннотация. Рассмотрены основные механические и, соответствующие им, математические модели некоторых задач динамики упругих систем под действием подвижной инерционной нагрузки и некоторые другие механические системы, приводящиеся к таким математическим моделям. Основное внимание уделено исследованию математической модели динамики сжатого одномерного упругого объекта на упругом основании под действием подвижной нагрузки, построенной на основе уточненной механической модели Тимошенко с полным учетом сил инерции подвижной нагрузки, действием упругого основания, внешнего сопротивления и осевой сжимающей силы. Решение задачи отыскивается с помощью метода двухволнового представления движения, который, в некоторых случаях, позволяет получить точные решения. Исследовано влияние скорости движения нагрузки на динамику объекта, определены критические значения скорости движения нагрузки. На основе численной реализации

метода возможно изучение влияния уточненной Релея, Тимошенко и сил инерции Кориолиса на динамику системы.

Ключевые слова: динамика, инерция, сила, частота, критическая скорость.

**MECHANICAL AND MATHEMATICAL MODELS
IN THE STRUCTURAL MECHANICS FOR THE
ELASTIC ELEMENTS WITH MOVABLE LOAD
AND ANALYSIS**

Annotation. This paper describes features of the mathematical models for the elastic elements with movable load and for the elastic elements of changeable length. In these systems two forms of own oscillations - the own component and the accompanying one, displaced in phase to the right angle correspond to every frequency of the system. The accompanying component is caused by the mobile inertia load or by the changeable length and they are not trivial only when this factor exists. The oscillations occur in the linearly elastic simply supported beam which is simulated by the Timoshenko's equations. The aim of the investigation is determination of the load critical speed values. The problem of characteristic frequencies finding is solved. Dependences of the first six characteristic frequencies on the load motion speed were obtained after the numerical experiment implementation. The received results can be used at a design of bridges, pipelines and other structures which experience the moving loads action.

Key words: frequency, mobile, inertia load, critical speed, dynamics.