

Зиньковский А. П.

Круц В. А.

Синенко Е. А.

*Институт проблем
прочности
имени Г.С. Писаренко
НАН Украины*

Zinkovskii A. P.

Kruts V. A.

Synenko E. A.

*G.S. Pisarenko Institute
for Problems of Strength
of the National Ac. Sci.
of Ukraine*

УДК 620.178, 620.179

КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ С «ДЫШАЩЕЙ» ТРЕЩИНОЙ УСТАЛОСТИ

Описана трехмерная конечноэлементная модель стержня постоянного поперечного сечения с «дышащей» трещиной усталости, которая представляется в виде математического разреза. Приведены результаты её апробации на примере решения задачи по определению влияния точки приложения вынуждающей силы на амплитудный спектр изгибных колебаний стержня при супергармоническом резонансе порядка 2/1. Результаты исследований сравниваются с существующими в литературе.

Ключевые слова: «дышащая» трещина, конечноэлементная модель стержня, супергармонический резонанс.

Введение. Разработка неразрушающих методов диагностики поврежденных конструктивных элементов, в особенности таких как рабочие лопатки турбомашин, остается актуальной проблемой в современном машиностроении. Основным и наиболее распространенным видом их повреждений являются трещины усталости, которые возникают в результате их циклического деформирования под действием широкого спектра динамических нагрузок.

Наличие трещин усталости в конструктивном элементе вызывает локальное изменение жесткости системы и может существенно повлиять на характеристики ее колебаний. Так, например, в работах [1,2] установлены закономерности влияния такого повреждения на изменение собственных частот и форм колебаний стержня. Однако это явление существенно проявляется лишь для трещин, глубина которых достигает 20% высоты сечения стержня [3], что ограничивает возможности его использования для диагностики наличия повреждения. В последнее время интенсивно разрабатываются методы неразрушающей диагностики наличия трещин усталости, которые базируются на возникновении нелинейных резонансов в механических системах [3-5].

Следует отметить, что в большинстве работ, посвященных изучению колебаний систем с трещинами усталости, рассматривается полностью открытая трещина [6] или «дышащая» трещина усталости [1,3,5,7], которую моделируют как полностью открытую на одном полуцикле колебаний и закрытую на другом. При условии динамического нагружения такой подход не вполне обоснованный, поскольку открытие и закрытие трещины в этом случае не происходит мгновенно. Поэтому в последние годы все чаще «дышащую» трещину моделируют в виде контактного взаимодействия ее берегов, что позволяет учесть их взаимное непроникновение [8,9].

В работах В.В. Матвеева [3] предложено аналитическое решение колебаний стержня с «дышащей» трещиной усталости при условии неизменности собственной формы его колебаний на полуциклах деформирования. Численное решение этой задачи с использованием балочной конечноэлементной (КЭ) модели стержня при учете только резонирующей формы колебаний рассмотрено в [10,11].

Учитывая результаты проведенного анализа состояния решения задачи о колебаниях стержневых элементов с



«дышащей» трещиной усталости, целью данной работы является разработка трехмерной КЭ модели стержня постоянного поперечного сечения с рассматриваемым типом повреждения, её апробация на примере решения задачи по определению влияния точки приложения вынуждающей силы на амплитудный спектр его изгибных колебаний при супергармоническом резонансе и сравнение полученных результатов расчета с известными из литературы.

Трехмерная КЭ модель стержня с «дышащей» трещиной усталости. Для достижения поставленной цели, как и [3,10], рассматриваются изгибные колебания модели консольного стержня длиной $L = 230$ мм постоянного поперечного сечения размерами $b \times h = 4 \times 20$ мм, который представлен на рис. 1. Предполагается что на расстоянии L_c от заземления имеет место «дышащая» трещина усталости, глубина которой $a = 4$ мм при деформировании стержня не изменяется.

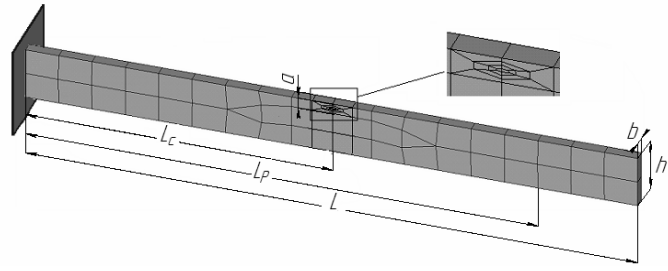


Рис. 1. Общий вид консольного стержня с «дышащей» трещиной и нанесенной КЭ сеткой

При решении задачи о колебаниях рассматриваемого стержня с использованием МКЭ определяющим моментом, как известно, является разработка его КЭ модели, которая бы позволяла в полной мере учитывать геометрию объекта исследования и его физико-механические свойства. В данном случае, для

создания КЭ сетки стержня использовался линейный восьмиузловой конечный элемент Solid 45 и его модификации (рис. 2), который позволяет при сравнительно большой скорости расчета получить достаточную точность решения.

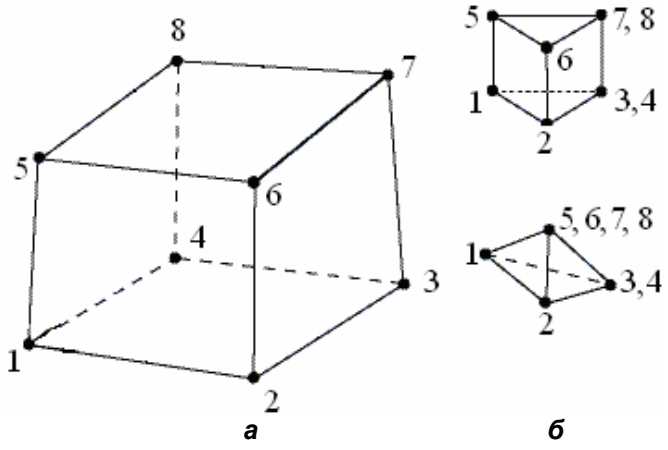


Рис. 2. Линейный 8-узловой конечный элемент (а) и его модификации (б)

Пример вида КЭ сетки приведен на рис. 1. Видно, что вдали от расположения трещины она носит равномерный характер, а в окрестности трещины КЭ сетка сгущается. Переход к более мелкой сетке выполнен с помощью модифицированных конечных элементов (рис. 2,б).

«Дышащая» трещина усталости

представляется как математический разрез, а взаимное непроникновение её берегов, как и в работах [8,9], обеспечивается с помощью решения контактной задачи. Для этого контактные поверхности моделировались поверхностными 4-х узловыми контактными элементами Conta 174, которые показаны на рис. 3.

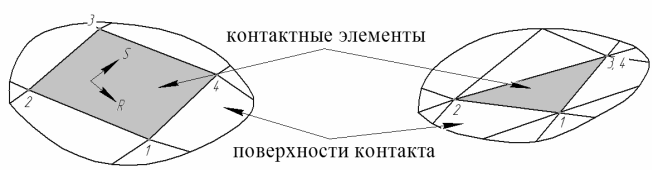
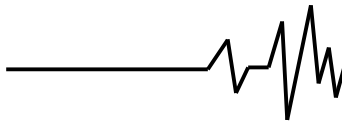


Рис. 3. Поверхностный 4-узловой контактный элемент и его модификация

Контакт определяется взаимным положением узлов контактирующих поверхностей, а контактные элементы используются для отслеживания относительных положений этих поверхностей. При этом исключается соударение берегов трещины.

Методика расчета. Колебания КЭ модели стержня описываются нелинейным дифференциальным уравнением:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [D]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F(t)\}, \quad (1)$$

где $[M]$, $[D]$ и $[K]$ – инерционная, диссипативная и упругая матрицы системы

соответственно, $\{u\}$ – вектор-столбец перемещений, $\{F(t)\}$ – вектор-столбец внешних нагрузок, действующих на систему.

При колебаниях стержня с «дышащей» трещиной происходит поочередное её открытие и закрытие, вследствие чего имеет место изменение жесткости тела на каждом полцикле деформирования, что приводит к нелинейности его динамического поведения и является причиной возбуждения высших гармоник колебаний. Поэтому решение уравнения (1) осуществляется интегрированием по времени с использованием схемы Ньюмарка:

$$\begin{cases} \{\dot{u}\}_{t+\Delta t} = \{\dot{u}\}_t + [(1-\gamma)\{\ddot{u}\}_t + \gamma\{\ddot{u}\}_{t+\Delta t}]\Delta t; \\ \{u\}_{t+\Delta t} = \{u\}_t + \{\dot{u}\}_t\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \{\ddot{u}\}_t + \beta\{\ddot{u}\}_{t+\Delta t} \right] \Delta t^2, \end{cases} \quad (2)$$

где β и γ – параметры интегрирования Ньюмарка, определяющие точность и устойчивость интегрирования; $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ – шаг по времени.

При использовании данного метода очень важно подобрать шаг по времени Δt , от которого существенно зависит точность решения. Для этого была проведена серия расчетов по определению зависимости

максимального перемещения u неповрежденного стержня от шага по времени Δt (рис. 4). Видно, что величина шага Δt оказывает существенное влияние на u . Однако, с уменьшением Δt меньше 0,000015с это влияние снижается. Поэтому в дальнейшем все расчеты проводились при таком шаге по времени.

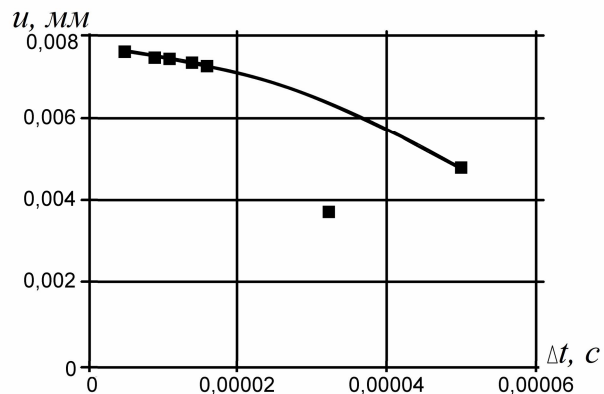


Рис. 4. Зависимость максимального перемещения неповрежденного стержня от шага по времени Δt



Следующим шагом решения задачи является Фурье-анализ полученных результатов расчета в виде зависимости максимального перемещения от времени, что позволяет провести ее гармонический анализ. Для обработки полученных зависимостей $u(t)$ использовалась процедура быстрого преобразования Фурье (FFT), в соответствии с которой массив обрабатываемых значений должен быть кратным 2^N , где N – целое число, а количество периодов указанной функции – не менее трёх. В данном случае это достигалось путем интерполяции зависимости $u(t)$, соответствующей установившемуся режиму вынужденных колебаний, и представления её трёх периодов в виде 8192 точек.

По результатам гармонического анализа получаем амплитуды гармоник перемещения.

Результаты исследований. Был проведен комплекс вычислительных экспериментов по апробации трехмерной КЭ модели стержня с «дышащей» трещиной усталости на примере решения задачи по определению влияния точки приложения вынуждающей силы на спектр амплитуд его изгибных колебаний при супергармоническом режиме колебаний.

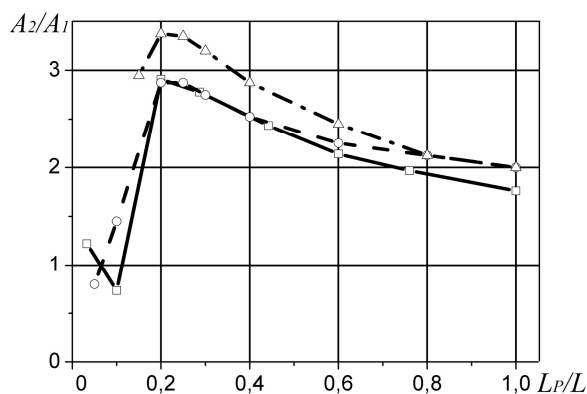
Для решения этой задачи варьировалось положение точки приложения L_p гармонической вынуждающей силы $P_0 \sin \omega t$, которая была приложена на нейтральной линии неповрежденного стержня, по длине стержня в плоскости его изгиба. Расчеты проводились

для двух положений трещины усталости, определяемого L_c , равного $0,1L$ и $0,5L$, при таких характеристиках стержня: модуль упругости E и плотность материала ρ равны 200 ГПа, 7800 кг/м³ соответственно, а логарифмический декремент колебаний $\delta = 0,01$.

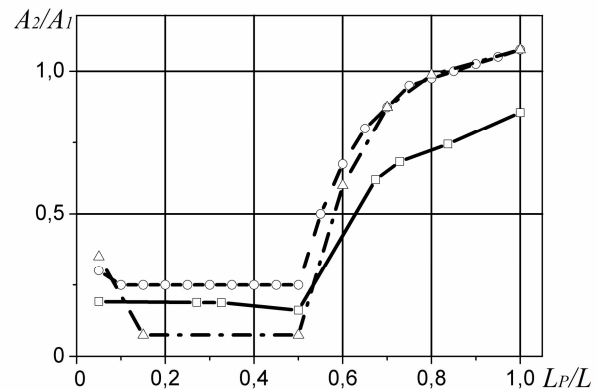
По результатам проведенных численных экспериментов были определены зависимости отношения амплитуд перемещения от места приложения вынуждающей силы, которые приведены на рис. 5. Здесь же представлены аналогичные зависимости, полученные в [3] аналитическим методом, и в [10] – по результатам численного решения задачи.

Анализ полученных результатов позволяет сделать такие выводы:

Во-первых, подтверждены сделанные в [3] выводы о том, что нелинейность колебательного процесса, обусловленная наличием «дышащей» трещины усталости, существенно зависит от точки приложения вынуждающей силы, что может быть использовано для определения места нахождения трещины, расположение которой может быть определено по характеру изменения указанной зависимости. Так, в данном случае, при возбуждении супергармонического резонанса, месту положения трещины соответствует минимальное значение отношения перемещений.



а)



б)

Рис. 5. Зависимость отношения амплитуд перемещения A_2/A_1 при супергармоническом резонансе от места приложения вынуждающей силы при L_c равном $0,1L$ (а) и $0,5L$ (б): сплошные линии – трехмерная КЭ модель; штриховые – аналитическое решение [3]; штрих-пунктирные – численный расчет [10]



Во-вторых, полученные зависимости качественно совпадают с известными из литературы. Показано, что для положения трещины усталости вблизи заделки они хорошо согласуются с результатами, полученными аналитическим методом [3] и отличаются от таковых, полученных численным расчетом [10], а при положении трещины усталости по середине стержня – немного занижены. Указанные различия в результатах исследования можно объяснить тем, что в отличие от численного решения, которое оценивает напряженное состояние стержня только по резонирующей форме колебаний без учета деформирования по остальным возбуждаемым формам, предложенная КЭ модель стержня учитывает все формы колебаний, а также их изменение при открытии трещины, в отличие от аналитического решения.

Выводы

1. Разработана трехмерная КЭ модель стержня с «дышащей» трещиной усталости, которая позволяет учитывать напряженное состояние стержня по всем возбуждаемым собственным формам колебаний и их изменении при открытии трещины.

2. С использованием разработанной КЭ модели стержня получены закономерности влияния точки приложения вынуждающей силы по длине стержня на отношение амплитуд перемещения при супергармоническом резонансе порядка $2/1$, которые хорошо согласуются с существующими в литературе, что свидетельствует о ее достоверности. Установлено, что для силы, приложенной в сечении стержня с повреждением, наблюдается минимум отношения амплитуд перемещений при супергармоническом резонансе, что позволяет установить местонахождение трещины.

Список использованных источников

1. Chondros T. G. Vibration of a beam with a breathing crack / T. G. Chondros, A. D. Dimarogonas, J. Yao // J. Sound and Vibr. – 2001. – Vol. 239, No. 1. – P. 57-67.

2. Li Q. S. Free vibration analysis of non-uniform beams with an arbitrary number of cracks and concentrated masses / Q. S. Li // J. Sound and Vibr. – 2002. – Vol. 252, No. 3. – P. 509-525.

3. Матвеев В. В. Приближенные методы и результаты определения вибродиагностических параметров наличия трещины в стержневых элементах при супер-

субгармоническом резонансах / В. В. Матвеев, О. Е. Богинич, А. П. Яковлев // Прочность материалов и элементов конструкций: Тр. Междунар. науч.-техн. конф.– Киев: Институт проблем прочности им. Г.С. Писаренко, 2011. – С. 59-77.

4. Tsyfansky S.L. Nonlinear vibration method for detection of fatigue cracks in aircraft wings / S.L. Tsyfansky, V.I. Beresnevich // J. Sound and Vibr. – 2000. – Vol. 236, No. 1. – P. 49-60.

5. Матвеев В. В. К вопросу приближенного определения вибродиагностического параметра нелинейности упругого тела, обусловленной наличием дышащей трещины, при субгармоническом резонансе / В. В. Матвеев, О. Е. Богинич // Пробл. прочности. – 2012. – № 3. – С. 37-49.

6. Krawczuk M. Elastic beam finite element with a transverse elasto-plastic crack / M. Krawczuk, A. Zak, W. Ostachowicz // Finite Elements in Analysis and Design. – 2000. – Vol. 34, No. 1. – P. 61-73.

7. Sholeh K. Online detection of the breathing crack using an adaptive tracking technique / K. Sholeh, A. Vafai, A. Kaveh // Acta Mechanica. – 2007. – Vol. 188, No. 3-4. – P. 139-154.

8. Bouboulas A. S. Three-dimensional finite element modeling of a vibrating beam with a breathing crack / A. S. Bouboulas, N. K. Anifantis // Archive of Applied Mechanics. – 2013. – Vol. 83. – P. 207-223.

9. Andreas Ugo Cracked beam identification by numerically analysing the nonlinear behaviour of the harmonically forced response / Ugo Andreas // J. Sound and Vibr. – 2011. – Vol. 330, No. 4. – P. 721-742.

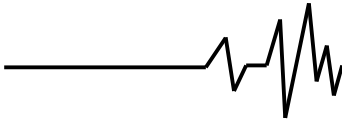
10. Бовсуновский А. П. Использование нелинейных резонансов для диагностики закрывающихся трещин в стержневых элементах / А. П. Бовсуновский, О. А. Бовсуновский // Пробл. прочности. – 2010. – № 3. – С. 125-141.

11. Бовсуновский О. А. Конечноэлементная модель для исследования стержня с закрывающейся трещиной / О. А. Бовсуновский // Пробл. прочности. – 2008. – № 5. – С. 114-120.

Список источников в транслитерации

1. Chondros T. G. Vibration of a beam with a breathing crack / T. G. Chondros, A. D. Dimarogonas, J. Yao // J. Sound and Vibr. – 2001. – Vol. 239, No. 1. – P. 57-67.

2. Li Q. S. Free vibration analysis of non-



uniform beams with an arbitrary number of cracks and concentrated masses / Q. S. Li // J. Sound and Vibr. – 2002. – Vol. 252, No. 3. – P. 509-525.

3. Matveev V. V. Approximate methods and the results of calculation of vibrodiagnostic parameters of crack availability in rod elements under super- and subharmonic resonances / V. V. Matveev, O. E. Boginich, A. P. Yakovlev // International conference «Strength of materials and structural elements»: Proceedings.– Kyiv: G. S. Pisarenko Institute for Problems of Strength, 2011. – P. 59-77.

4. Tsyfanskyy S. L. Nonlinear vibration method for detection of fatigue cracks in aircraft wings / S. L. Tsyfanskyy, V. I. Beresnevich // J. Sound and Vibr. – 2000. – Vol. 236, No. 1. – P. 49-60.

5. Matveev V. V. Approximate determination of vibrodiagnostic parameter of nonlinearity for an elastic body due to the presence of a breathing crack at a subharmonic resonance / V. V. Matveev, O. E. Boginich // Strength of Materials. – 2012. – Vol. 44, No. 3. – P. 250-258.

6. Krawczuk M. Elastic beam finite element with a transverse elasto-plastic crack / M. Krawczuk, A. Zak, W. Ostachowicz // Finite Elements in Analysis and Design. – 2000. – Vol. 34, No. 1. – P. 61-73.

7. Sholeh K. Online detection of the breathing crack using an adaptive tracking technique / K. Sholeh, A. Vafai, A. Kaveh // Acta Mechanica. – 2007. – Vol. 188, No. 3-4. – P. 139-154.

8. Bouboulas A. S. Three-dimensional finite element modeling of a vibrating beam with a breathing crack / A. S. Bouboulas, N. K. Anifantis // Archive of Applied Mechanics. – 2013. – Vol. 83. – P. 207-223.

9. Andreas Ugo Cracked beam identification by numerically analysing the nonlinear behaviour of the harmonically forced response / Ugo Andreas // J. Sound and Vibr. – 2011. – Vol. 330, No. 4. – P. 721-742.

10. Bovsunovskii A. P. Application of nonlinear resonances for the diagnostics of closing cracks in rodlike elements / A. P. Bovsunovskii, O.

A. Bovsunovskii // Strength of Materials. – 2010. – Vol. 42, No. 3. – P. 331-343.

11. Bovsunovskii O. A. A finite-element model for the study of vibration of a beam with a closing crack / O. A. Bovsunovskii // Strength of Materials. – 2008. – Vol. 40, No. 5. – P. 584-589.

СКІНЧЕННОЕЛЕМЕНТНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗГІНАЛЬНИХ КОЛИВАНЬ СТРИЖНЯ З «ДИХАЮЧОЮ» ТРІЩИНОЮ ВТОМИ

Анотація. Описана тривимірна скінченноелементна модель стрижня постійного поперечного перерізу з «дихаючою» тріщиною втоми, яка представляється у вигляді математичного розрізу. Наведено результати її апробації на прикладі розв'язання задачі по визначенню впливу точки прикладання збуджуючої сили на амплітудний спектр згинальних коливань стрижня при супергармонічному резонансі порядку 2/1. Результати досліджень порівнюються з існуючими в літературі.

Ключові слова: «дихаюча» тріщина, скінченноелементна модель стрижня, супергармонічний резонанс.

FINITE-ELEMENT MODELING OF FLEXURAL VIBRATIONS OF BEAM WITH A «BREATHING» FATIGUE CRACK

Annotation. A three-dimensional finite element model of the beam of constant cross-section with a breathing fatigue crack in the form of the mathematical cut is described. The results of its approbation are demonstrated with solution of the problem on determination of the influence of the driving force application point on the amplitude spectrum of the beam flexural vibrations at superharmonic resonance of 2/1 order. The results of investigations are compared with those ones from literature.

Key words: «breathing» crack, finite element model of the beam, superharmonic resonance.