

Ольшанський В. П.

Бурлака В. В.

Малець О. М.

*Харківський  
національний технічний  
університет сільського  
господарства  
ім. П. Василенка*

Olshanskii V. P.

Burlaka V. V.

Malec O. M.

*Kharkiv Petro Vasilenko  
National Technical  
University of Agriculture*

УДК 539.3:534.1

## ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ З КОМБІНОВАНИМ ТЕРТЯМ

*Розглянуто малі нелінійні коливання системи з одним ступенем вільності при спільній дії сил в'язкого опору, сухого тертя ковзання і позиційного тертя. Методом припасовування розв'язків задач Коші виведено формули для обчислення амплітуд вільних затухаючих коливань, спричинених початковим відхиленням системи від положення стійкої рівноваги. Досліджено вплив різних чинників на темп затухання коливань.*

*Ключові слова:* амплітуда коливань, комбіноване тертя, диференціальне рівняння, метод припасовування розв'язків.

**Вступ.** У техніці коливання елементів машин часто проходять при одночасній дії дисипативних сил різного походження. Тому дослідження закономірностей коливань в умовах комбінованого опору відноситься до актуальних прикладних задач. Враховуючи це, в роботі [1] розглядали вільні коливання механічної системи при спільній дії сил в'язкого лінійного опору та тертя Кулона. Спільний вплив сухого тертя та позиційного сухого тертя на темп затухання коливань досліджували в [2]. На відміну від перелічених публікацій, тут розглядаємо затухаючі коливання при одночасній дії трьох видів дисипативних сил, а саме: тертя Кулона, в'язкого лінійного опору та позиційного сухого тертя. Зазначимо, що окремий вплив позиційного тертя на коливальний процес висвітлено в [3], [4], а в'язкого та сухого в [3], [5].

**Метою даної роботи** є одержання та перевірка на адекватність формул для обчислення амплітуд затухаючих коливань механічної системи, спричинених спільною дією трьох дисипативних сил різного походження.

Для досягнення вказаної мети обрано метод припасовування розв'язків диференціальних рівнянь руху.

**Побудова розрахункових формул.** Горизонтальне переміщення системи  $x(t)$  у коливальному русі описуємо рівнянням

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + (c + \Delta c \cdot \text{sign}x \cdot \text{sign}\dot{x})x + F_T \cdot \text{sign}\dot{x} = 0 \quad (1)$$

при початкових умовах

$$x(0) = -a_0 < 0; \dot{x}(0) = 0. \quad (2)$$

В (1) і (2)  $m$  – маса системи з коефіцієнтом жорсткості  $c$ ;  $\Delta c$  – коефіцієнт позиційного тертя;  $k$  – коефіцієнт в'язкого тертя;  $F_T$  – сила тертя ковзання (Кулона);  $a_0$  – стартове відхилення системи вліво від положення рівноваги  $x = 0$ ; точкою над  $x$  позначено похідну за часом  $t$ .

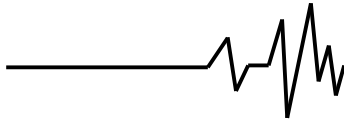
Розглянемо перший напівцикл (розмах) коливань, коли, внаслідок початкового відхилення системи вліво від положення рівноваги, вона рухається у додатньому напрямі вісі  $Ox$ . Цей напівцикл поділимо на два етапи: перший, де  $\dot{x} \geq 0$ ,  $x \leq 0$ , і другий, де  $\dot{x} \geq 0$ ,  $x \geq 0$ .

Дослідимо спочатку рух на першому етапі, який, у відповідності з (1), описуємо рівнянням

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + c_1x = -F_T, \quad (3)$$

у якому  $c_1 = c - \Delta c$ .

Загальний розв'язок (3) знаходимо у вигляді



$$x = \exp(-\beta t)(b_1 \cos \omega_1 t + b_2 \sin \omega_1 t) - \frac{F_T}{c_1}, \quad (4)$$

де  $\beta = \frac{k}{2m}$ ;  $\omega_1 = \sqrt{\frac{c_1}{m} - \beta^2}$ ;  $b_1, b_2$  – довільні сталі.

$$\begin{aligned} \dot{x} = \exp(-\beta t)[-(b_1 \omega_1 + \beta b_2) \sin \omega_1 t + \\ + (b_2 \omega_1 - \beta b_1) \cos \omega_1 t] \end{aligned} \quad (5)$$

Підставивши (4) і (5) в (2), одержуємо систему двох алгебраїчних рівнянь, що має розв'язок:

$$b_1 = \frac{F_T}{c_1} - a_0; \quad b_2 = b_1 \cdot \frac{\beta}{\omega_1}.$$

Враховуючі ці значення констант, виразам (4) і (5) надаємо вигляд:

$$x = b_1 \exp(-\beta t) \left( \cos \omega_1 t + \frac{\beta}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) - \frac{F_T}{c_1};$$

$$\dot{x} = -b_1 \omega_1 \left( 1 + \frac{\beta^2}{\omega_1^2} \right) \exp(-\beta t) \sin \omega_1 t. \quad (6)$$

Щоб визначити момент часу  $t = t_1$ , коли закінчиться перший етап руху, покладемо в (6)  $x(t_1) = 0$ . Це приводить до трансцендентного рівняння

$$\cos \omega_1 t_1 + \frac{\beta}{\omega_1} \sin \omega_1 t_1 = \frac{F_T}{b_1 c_1} \exp(\beta t_1). \quad (7)$$

Можливі різні способи наближеного розв'язання (7). Розглянемо деякі з них.

Спосіб перший, що відноситься до найбільш простих. Виразимо невідоме  $\omega_1 t_1$  через невідоме  $\varepsilon$  сумою

$$\omega_1 t_1 = \frac{\pi}{2} + \varepsilon. \quad (8)$$

Тоді, при малих значеннях  $\varepsilon$  мають місце наближення:

$$\cos \omega_1 t_1 = -\sin \varepsilon \approx -\varepsilon;$$

$$\sin \omega_1 t_1 = \cos \varepsilon \approx 1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2;$$

$$\exp(\beta t_1) \approx \exp \frac{\pi \beta}{2 \omega_1} \left( 1 + \frac{\beta}{\omega_1} \varepsilon + \frac{1}{2} \frac{\beta^2}{\omega_1^2} \varepsilon^2 \right).$$

Враховуючі їх, з похибкою порядку  $\varepsilon^3$ , (7) зводимо до квадратного рівняння, що має розв'язок

$$\varepsilon = \frac{\omega_1}{\beta} \left[ \sqrt{1 - \frac{2(B - \beta/\omega_1)}{B + \omega_1/\beta}} - 1 \right], \quad (9)$$

$$\text{де } B = \frac{F_T}{b_1 c_1} \exp\left(\frac{\pi \beta}{2 \omega_1}\right).$$

Зауважимо, що в кінці коливального процесу, біля зони застою, значення  $b_1 \ll 1$  і розв'язок (8), (9) втрачає сенс, бо  $\varepsilon$  перестає бути малою величиною.

Спосіб другий, що ґрунтується на методі ітерцій. Після підстановки (8) в (7), одержуємо

$$\sin \varepsilon - \frac{\beta}{\omega_1} \cos \varepsilon = -B \exp\left(\frac{\beta}{\omega_1} \varepsilon\right). \quad (10)$$

Елементарним перетворенням рівнянню (10) надаємо вигляд

$$\begin{aligned} \varepsilon = \arcsin \left[ -\frac{B \cdot \exp(\beta \varepsilon / \omega_1)}{\sqrt{1 + (\beta / \omega_1)^2}} \right] + \\ + \arcsin \frac{\beta / \omega_1}{\sqrt{1 + (\beta / \omega_1)^2}} \end{aligned} \quad (11)$$

Користуючись (11), обчислення  $\varepsilon$  можна проводити методом простих ітерацій. За початкове наближення слід брати  $\varepsilon = 0$ , або обчислювати його по формулі (9).

Для пошуку кореня рівня (10) придатні й інші числові методи [6].

Обчислене таким чином значення  $t_1$  та другий вираз в (6), дають можливість знайти величину швидкості  $v$ , з якою осцилятор проходить положення рівноваги в кінці першого етапу, бо

$$v = \dot{x}(t_1) = -b_1 \omega_1 \left( 1 + \frac{\beta^2}{\omega_1^2} \right) \exp(-\beta t_1) \sin \omega_1 t_1.$$

Подальший рух осцилятора на другому етапі описується рівнянням

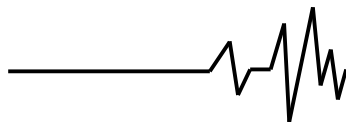
$$m\ddot{x} + k\dot{x} + c_2 x = -F_T, \quad (12)$$

у якому  $c_2 = c + \Delta c$ .

Початковими умовами до нього приймаємо:

$$x(0) = 0; \quad \dot{x}(0) = v. \quad (13)$$

Задача Коші, подана виразами (12) і (13), має розв'язок



$$x = \exp(-\beta t)(d_1 \cos \omega_2 t + d_2 \sin \omega_2 t) - \frac{F_T}{c_2}, \quad (14)$$

де  $\omega_2 = \sqrt{\frac{c_2}{m} - \beta^2}$ ;  $d_1 = \frac{F_T}{c_2}$ ;

$$d_2 = \frac{1}{\omega_2}(v + \beta d_1).$$

При цьому швидкість руху на другому етапі

$$\dot{x} = \exp(-\beta t)[v \cos \omega_2 t - (d_1 \omega_2 + \beta d_2) \sin \omega_2 t].$$

Цей вираз дає можливість знайти час  $t = t_2$ , коли зупиниться осцилятор в кінці першого розмаху. Значення  $t_2$  є коренем рівняння

$$v \cdot \cos \omega_2 t_2 - (d_1 \omega_2 + \beta d_2) \sin \omega_2 t_2 = 0.$$

Обчислення  $t_2$  зводиться до використання формули

$$t_2 = \frac{1}{\omega_2} \operatorname{arctg} \frac{v}{d_1 \omega_2 + \beta d_2}. \quad (15)$$

Підставивши значення  $t = t_2$  в (14), одержимо амплітудне відхилення системи  $a_1$  в кінці першого розмаху

$$a_1 = \exp(-\beta t_1)(d_1 \cos \omega_2 t_2 + d_2 \sin \omega_2 t_2) - \frac{F_T}{c_2}. \quad (16)$$

Щоб знайти наступну амплітуду коливань  $a_2$ , в одержані формули треба замість  $a_0$  підставити  $a_1$ . При обчисленні  $a_3$  треба замість  $a_1$  підставити  $a_2$  і т.д. Отже, розрахунок параметрів коливань зводиться до послідовного обчислення амплітуд.

Зазначимо, що одержані розв'язки можна використати також для розрахунку амплітуд коливального руху, спричиненого початковою швидкістю  $v$ , що миттєво надана системі, коли вона знаходиться в положенні  $x = 0$ . Для цього треба спочатку по формулах (14), (15), (16) знайти перше відхилення  $a_1$ , а наступні  $a_2$ ,  $a_3$  і т.д. обчислити як при початкових відхиленнях  $a_1$ ,  $a_2$  і т.д.

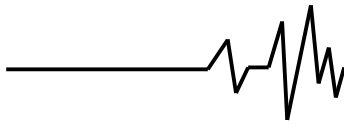
**Аналіз результатів розрахунків.**

В табл.1. наведено значення  $\varepsilon$ , одержані при розв'язанні рівняння (10) різними способами. Обчислення проведено при  $m = 3 \text{ кг}$ ;  $c_1 = 4300 \text{ Н/м}$ ;  $F_T = 10 \text{ Н}$ ;  $k = 10 \text{ кг/с}$ ;  $x_0 = 0,06 \text{ м}$ . Значення  $\varepsilon$  у другій колонці одержано по формулі (9). У третій і четвертій колонках записано значення  $\varepsilon$ , до яких приводить формула (11) відповідно при одній і п'яти ітераціях. У останній п'ятій колонці вказано значення  $\varepsilon$ , одержані на комп'ютері числовим методом дихотомії. У межах вказаної точності маємо повну збіжність результатів у четвертій і п'ятій колонках при різних номерах розмахів  $n$ .

**Таблиця 1**

**Значення  $\varepsilon$ , одержані різними способами**

$n$	формула (9)	формула (11), 1 ітерація	формула (11), 5 ітерацій	метод дихотомії
1	0,076673	0,076637	0,076749	0,076749
2	0,088434	0,088385	0,088550	0,088550
3	0,105396	0,105333	0,105594	0,105594
4	0,131617	0,131556	0,132006	0,132006
5	0,176837	0,176892	0,177796	0,177796
6	0,271799	0,272958	0,275392	0,275392
7	0,591031	0,618441	0,634669	0,634669



Для проведення обчислень амплітуд приймаємо:  $m = 5 \text{ кг}$ ;  $c = 4500 \text{ Н/м}$ ;  $\Delta c = 200 \text{ і } 400 \text{ Н/м}$ ;  $F_T = 10 \text{ і } 20 \text{ Н}$ ;  $k = 5; 10; 20 \text{ кг/с}$ ;  $x_0 = 0,06 \text{ м}$ .

Результати обчислень амплітуд коливань при  $F_T = 10 \text{ Н}$  записано в табл.2, а при  $F_T = 20 \text{ Н}$  - в табл.3.

Таблиця 2

Значення  $100 a_n$ , м при  $F_T = 10 \text{ Н}$

n	$\Delta c = 200 \text{ Н/м}$			$\Delta c = 400 \text{ Н/м}$		
	$k = 5 \text{ кг/с}$	$k = 10 \text{ кг/с}$	$k = 20 \text{ кг/с}$	$k = 5 \text{ кг/с}$	$k = 10 \text{ кг/с}$	$k = 20 \text{ кг/с}$
1	5,021	4,753	4,254	4,790	4,532	4,053
2	4,132	3,678	2,901	3,739	3,323	2,610
3	3,326	2,753	1,852	2,827	2,327	1,542
4	2,593	1,955	1,038	2,034	1,506	0,749
5	1,928	1,268	0,407	1,346	0,829	0,156
6	1,325	0,676	-	0,747	0,268	-
7	0,776	0,163	-	0,222	-	-
8	0,275	-	-	-	-	-

Таблиця 3

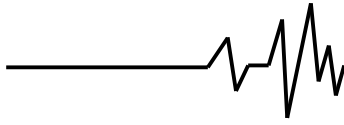
Значення  $100 a_n$ , м при  $F_T = 20 \text{ Н}$

n	$\Delta c = 200 \text{ Н/м}$			$\Delta c = 400 \text{ Н/м}$		
	$k = 5 \text{ кг/с}$	$k = 10 \text{ кг/с}$	$k = 20 \text{ кг/с}$	$k = 5 \text{ кг/с}$	$k = 10 \text{ кг/с}$	$k = 20 \text{ кг/с}$
1	4,595	4,337	3,858	4,370	4,122	3,661
2	3,320	2,904	2,196	2,954	2,574	1,962
3	2,161	1,669	0,906	1,723	1,296	0,635
4	1,107	0,601	-	0,646	0,230	-
5	0,142	-	-	-	-	-

**Висновки.** Одержані вище формули дають можливість розрахувати затухання вільних коливань при спільній дії сил в'язкого, позиційного та сухого тертя. Розрахунки підтверджують, що зростання кожної із цих сил прискорює спадання амплітуд коливань. Та найбільш суттєвий вплив у комбінованому опорі має сила сухого тертя, бо при її дії утворюється зона застою, рух системи стає обмеженим у часі і вона здійснює обмежену кількість коливальних циклів до повної зупинки.

**Список використаних джерел**

1. Бурлака В.В. До розрахунку коливань механізмів при спільній дії сил сухого і в'язкого тертя / В.В. Бурлака, В.П. Ольшанський, О.М. Малець // Вісник ХНТУСГ. Серія: Механізація сільськогосподарського виробництва – Х.: ХНТУСГ, 2014. Вип. 148. – С. 19-24.
2. Бурлака В.В. До розрахунку коливань механізмів з комбінованим сухим тертям / В.В. Бурлака, В.П. Ольшанський, О.М. Малець //



Вісник ХНТУСГ. Серія: Проблеми надійності машин та засобів механізації сільськогосподарського виробництва. – Х.: ХНТУСГ, 2014. Вип. 151. – С. 384-390.

3. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний / В.Л. Бидерман, М.: „Высшая школа”, 1980. – 408 с.

4. Сурьянинов Н.Г. Теоретические основы динамики машин / Н.Г. Сурьянинов, А.Ф. Дащенко, П.А. Белоус. – Одесса: ОГПУ, 2000. – 306 с.

5. Панавко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний / Я.Г. Панавко. – М.: Наука, 1980. – 270 с.

6. Калиткин Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. – М.: Наука, 1978. – 512 с.

#### Список джерел в транслітерації

1. Burlaka V.V. Do rozrakhunku kolyvan mekhanizmiv pry spilnii dii syl sukhooho i viazkooho tertia / V.V. Burlaka, V.P. Olshanskyi, O.M. Malets // Visnyk KhNTUSG. Seriya: Mekhanizatsiia silskogospodarskogo vyrobnytstva – Ch.: KhNTUSG, 2014. Vyp. 148. – S. 19-24.

2. Burlaka V.V. Do rozrakhunku kolyvan mekhanizmiv z kombinovanyim suchym tertiam / V.V. Burlaka, V.P. Olshanskyi, O.M. Malets // Visnyk KhNTUSG. Seriya: Problemy nadiinosti mashyn ta zasobiv mekhanizatsii silskogospodarskogo vyrobnytstva. – Ch.: KhNTUSG, 2014. Vyp. 151. – S. 384-390.

3. Biderman V.L. Teoriya mekhanicheskikh kolebaniy / V.L. Biderman, M.: „Vysshaya shkola”, 1980. – 408 s.

4. Suryaninov N.G. Teoreticheskie osnovy dinamiki mashin / N.G. Suryaninov, A.F. Daschenko, P.A. Belous. – Odessa: OGPU, 2000. – 306 s.

5. Panavko Ya.G. Vvedenie v teoriyu mekhanicheskikh kolebaniy / Ya.G. Panavko. – M.: Nauka, 1980. – 270 s.

6. Kalitkin N.N. Chislennyye metody / N.N. Kalitkin. – M.: Nauka, 1978. – 512 s.

#### СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С КОМБИНИРОВАННЫМ ТРЕНИЕМ

**Аннотация.** Рассмотрены малые нелинейные колебания системы с одной степенью свободы при совместном действии сил вязкого сопротивления, сухого трения скольжения и позиционного трения. Методом припасовывания решений задач Коши выведено формулы для вычисления амплитуд свободных затухающих колебаний, вызванных начальным отклонением системы от положения устойчивого равновесия. Исследовано влияние различных факторов трения на темп затухания колебаний.

**Ключевые слова:** амплитуда колебаний, комбинированное трение, дифференциальное уравнение, метод припасовывания решений.

#### THE FREE VIBRATIONS OF THE MECHANICAL SYSTEM WITH MULTIFUNCTION FRICTION

**Annotation.** Small nonlinear system vibrations are considered with one degree of the freedom under joint action of power of the viscous resistance, dry friction of the slide and positional friction. By means of the method of splicing decisions of Koshi problems the formulas were obtained for calculation of the amplitudes free fading vibrations, caused by initial deflection of the system from position of the stability equilibrium. The influence of different factor friction on the rate of fading of vibrations was explored.

**Key words:** amplitude of the vibrations, multifunction friction, differential equation, method of splicing decisions.