

Бовсуновський А. П.

*Національний  
університет харчових  
технологій*

Bovsunovsky A. P.

*National University of  
Food Technologies*

УДК 373:534.1:620.193

## ВІБРОДІАГНОСТИКА ПОШКОДЖЕНЬ ТИПУ ТРІЩИНИ, ЩО ЗАКРИВАЄТЬСЯ. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

*Огляд ілюструє основні досягнення міжнародної наукової спільноти у дослідженнях нелінійних ефектів, що зумовлені періодичним закриванням-відкриванням тріщини, а також у розробці на основі нелінійних ефектів вібраційних методів діагностики пошкодження в найбільш поширених типах конструкційних елементів, таких як стрижні і пластини. Показано перспективи їхнього використання на практиці.*

*Розробка вібраційних методів діагностики пошкодження, чутливих до наявності тріщин докритичного розміру в різного роду конструкціях і машинах є важливою з точки зору можливості подовження їхнього ресурсу через контроль за розвитком тріщини, а також з точки зору запобігання катастрофічних руйнувань. Основна потенційна перевага вібродіагностики, заснованої на використанні нелінійних ефектів, таких як нелінійність коливань при супер- і субгармонічних резонансах, є відносно висока чутливість до пошкодження типу тріщини, що закривається. Водночас існують певні проблеми застосування такої вібродіагностики на практиці, які потребують свого вирішення.*

**Ключові слова:** *вібродіагностика, тріщина, що закривається, супергармонічні і субгармонічні резонанси, нелінійні коливання.*

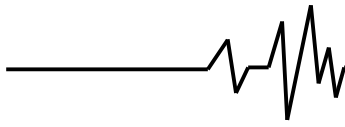
**Вступ.** Перші дослідження впливу локальних дефектів на модальні характеристики (власні частоти і форми коливань, модальне демпфірування) конструктивних елементів були виконані Кірмшером [1] у 1944 році і Томсоном [2] у 1949 році. Головна ідея цих досліджень полягала у врахуванні впливу тріщини на жорсткість тіла і, отже, на його власні частоти і форми коливань.

Однак зумовлена появою і ростом тріщини зміна власних частот і форм коливань виявилася недостатньою для надійного діагностування невеликих тріщин [3]. Пошук більш чутливих до наявності пошкоджень і зручних у використанні вібраційних характеристик триває до теперішнього часу. Серед цих характеристик поява так званих нелінійних резонансів (суб- і супергармонічних), нелінійне спотворення коливань при головному і нелінійних резонансах, спотворення фазових траєкторій, антирезонансні частоти, механічний імпеданс і т.п. [4].

У багатьох дослідженнях тріщина моделювалась фізичним розрізом (проріз).

Вважалося, що береги такої тріщини не контактують між собою при деформуванні тіла, тобто вона залишається постійно відкритою (так звана відкрита тріщина). У цьому випадку характеристика відновлювальної сили  $R$  є лінійною (рис. 1, а). Однак таке спрощене уявлення про поведінку тріщини при деформуванні тіла приводить до завищення розрахункових значень зміни власних частот і форм коливань в порівнянні з впливом реальної тріщини [5, 6]. Крім того, моделі з відкритою тріщиною не придатні для дослідження нелінійних коливань конструкцій, оскільки не здатні виявити так звані нелінійні ефекти, зокрема, суб- і супергармонічні резонанси, а також нелінійність коливань при цих резонансах.

Реальні тріщини зазвичай утворюються в результаті втоми металу, корозії або з інших причин. Такі тріщини мають властивість відкриватись і закриватись при знакозмінному циклічному деформуванні, тому їх прийнято називати тріщинами, що закриваються, або дихаючими тріщинами. Вважається, що



жорсткість тіла з закритою тріщиною така ж, як і жорсткість непошкодженого тіла. При відкриванні тріщини жорсткість тіла зменшується. Характеристику відновлювальної сили у випадку деформування тіла з тріщиною, що закривається, найчастіше представляють як асиметричну кусково-лінійну (рис. 1, б).

Особливістю тріщини, що закривається, є раптова зміна жорсткості тіла в момент закриття та відкриття тріщини, що призводить до суттєвої нелінійності коливань механічної системи і, як наслідок, до прояву нелінійних ефектів.

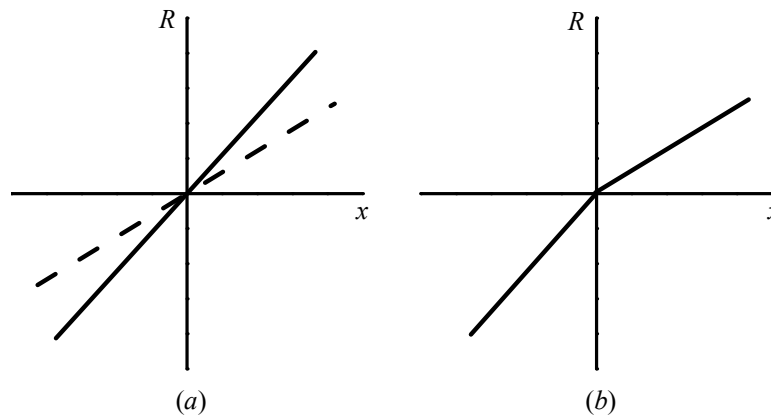


Рис. 1. Характеристики відновлювальної сили стрижня: (а) – без тріщини (суцільна лінія), з відкритою тріщиною (штрихова лінія); (б) – з тріщиною, що закривається

Очевидно, що моделі тіл з тріщиною, що закривається, є значно складнішими, ніж моделі з відкритою тріщиною, але вони більш точні у відтворенні динамічної поведінки механічних систем, а також дозволяють досягнути більш високих рівнів вібродіагностики пошкоджень [7].

Величезна кількість робіт, присвячених дослідженню впливу тріщини на частоти і форми коливань пружних тіл і конструкцій, відображена у ряді ґрунтовних оглядів [3, 4, 8, 9]. Однак вони не висвітлюють проблему нелінійної поведінки конструкцій з тріщиною. В той же час відтоді, коли Масзава представив результати аналітичного дослідження супергармонічних коливань механічної системи з кусково-лінійною пружною характеристикою [10] минуло 44 роки. За цей період було опубліковано багато книг і статей з різних аспектів використання нелінійних ефектів для діагностики тріщин. Тому головною ідеєю даного огляду було продемонструвати основні досягнення науковців у дослідженні нелінійних коливань найбільш розповсюджених конструкційних елементів, а саме стрижнів і

пластин, які мають пошкодження, а також оцінити перспективи використання нелінійних ефектів для вібраційної діагностики пошкоджень типу тріщини в томи у конструктивних елементах такого типу.

#### Моделювання тріщини у стрижнях.

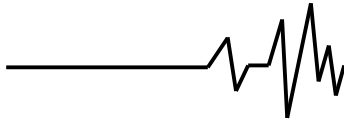
Важливу роль при розробці вібраційних методів діагностики тріщин грає моделювання впливу тріщини на жорсткість (піддатливість) тіла або механічної системи. Локальне зменшення жорсткості стрижня моделювали у вигляді вирізу квадратної [11], прямокутної [1, 12, 13] і трикутної [14, 15] форми, а також умовним зменшенням моменту інерції [16, 17] або модуля пружності [18, 19, 20] невеликої області в околі тріщини. Крім того вплив тріщини на піддатливість стрижня імітували прикладанням пари згинальних моментів [2, 21], або пари врівноважених сил [22].

Принципово інший підхід до моделювання тріщини базується на врахуванні розподілу напружень в околі тріщин за допомогою експоненційної функції виду [23]

$$f(x, y) = \left[ y - \frac{I}{I_c} \cdot y \cdot H\left(\frac{h}{2} - a - |y|\right) \right] \exp\left[-\frac{2\alpha|x - L_m|}{h}\right], \quad (1)$$

де  $x$  і  $y$  – відповідно поздовжня і поперечна координата;  $I$  та  $I_c$  – відповідно моменти інерції поперечного перерізу без тріщини і з тріщиною;  $a$  – глибина тріщини;  $h$  – висота поперечного

перерізу стрижня;  $H$  – функція Хевісайда;  $L_m$  – місцеположення тріщини;  $\alpha$  – параметр, що визначається експериментально.



Недоліком цієї моделі є необхідність визначення параметра  $\alpha$  для різних граничних умов і геометрії стрижнів. Було встановлено, що для пари симетричних тріщин  $\alpha=0,667$  [23], для однієї тріщини у консольному стрижні  $\alpha=1,936$  [24], для тріщини в консолі і стрижні на двох опорах  $\alpha=1,276$  [25, 26].

У роботі [16] параметр  $\alpha$  представлено як функцію відносної глибини тріщини  $\alpha(\gamma) = 0,683 + 0,152\gamma^{-1}$ , де  $\gamma=a/h$  – відносна глибина тріщини. Крім того у цій роботі запропоновано функцію, яка описує розподіл напружень на протилежній до тріщини поверхні стрижня

$$f(x, \gamma) = 1 + [\beta(\gamma) - 1] \exp \left[ - \left( \frac{L_m - x}{\nu(\gamma)h} \right)^2 \ln \beta(\gamma) \right], \quad (2)$$

де  $\beta(\gamma) = 0,123 + 0,813 \exp(\gamma) + 0,064 \exp(7\gamma)$ ;  $\nu(\gamma) = 0,063 + 0,45 \cdot \gamma$ .

Найбільш поширеним способом визначення еквівалентної жорсткості локальної області стрижня є використання підходів механіки руйнувань, теореми Кастильяно, а також взаємозв'язку між швидкістю вивільнення енергії деформації та коефіцієнтом інтенсивності напружень (КІН) [3]. Однак формули для визначення КІН, отримані різними авторами, дають дещо відмінні значення, що впливає на результати розрахунків власних частот коливань стрижнів з тріщиною [7, 27] і зумовлює необхідність експериментального обґрунтування вибору тієї або іншої формули. Для більш точного прогнозування динамічної поведінки стрижня з тріщиною було запропоновано використовувати динамічний, а не статичний КІН [28].

У скінчено-елементних моделях (СЕМ) стрижнів локальна піддатливість у місці тріщини зазвичай моделюється за допомогою особливого елемента шляхом зменшення його модуля пружності [18, 19], моменту інерції [29] або висоти поперечного перерізу [17]. В більшості робіт зміна піддатливості особливого елемента визначається на основі підходів механіки руйнувань [3].

**Моделі стрижнів з тріщиною.** Стрижні з тріщиною найчастіше моделюють системами с багатьма степенями вільності. Це дає можливість враховувати більше форм коливань і точніше прогнозувати динамічну поведінку системи. Наприклад, балка на трьох опорах з декількома тріщинами була представлена у вигляді системи з двома степенями вільності [30], а стрижень з тріщиною – системою з десятьма степенями вільності [31, 32], в якій тріщина моделювалась зменшенням жорсткості одного з пружних елементів на 20 ... 80%.

Одним з варіантів системи з багатьма степенями вільності є СЕМ пружного тіла. Представлені в літературі СЕМ стрижнів з тріщиною розрізняються за кількістю елементів

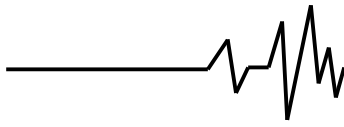
і за розмірністю матриці локальної піддатливості. Моделі стрижнів складались з 5 елементів [33, 34], 10 елементів [35-38], 15 елементів [18], 20 елементів [17, 39-41], 21 елемента [42], 32 елементів [19], 50 елементів [43]. У роботі [44] кількість елементів варіювали від 4 до 704. При цьому результати розрахунків власних частот коливань стрижня практично перестали змінюватися, коли число елементів перевищило 192.

Таким чином, точність прогнозування динамічної поведінки стрижня прямо пропорційна кількості елементів СЕМ. Крім того, чим коротший елемент, тим точніше задається місцеположення тріщини і тим меншому об'єму стрижня приписується зменшена жорсткість. Збільшення точності задання місцеположення тріщини може досягатися за рахунок зменшення довжини лише особливого елемента [42].

Крім двовимірних СЕМ використовують і тривимірні моделі. Таким чином моделювався стрижень з крайовою тріщиною [45], а також лопатки турбіни з поверхневою тріщиною [46].

Повна 6×6 матриця локальної піддатливості вперше була отримана для стрижня Тимошенко з поперечною крайовою тріщиною за допомогою підходів механіки руйнувань [47]. Частіше використовується більш проста матриця 4×4, що враховує тільки згинальний момент і поперечну силу [34].

Точність моделювання коливань конструкцій з тріщиною, що закривається, залежить від правильності відображення стану тріщини (відкрита чи закрита). Так процес відкриття та закриття тріщини при дослідженні вимушених коливань СЕМ стрижня Тимошенко моделювався одиничною функцією, яка змінювала жорсткість елемента жорсткості з частотою змушувальної сили [48]. Однак така функція описує поведінку тріщини неправильно при частотах коливань близьких до



супергармонічних резонансів, коли тріщина може змінювати свій стан більше одного разу за період коливань [41]. Уникнути цієї проблеми можна розглядаючи так званий слабкий супергармонічний резонанс [14], який має місце у випадку відносно невеликої тріщини та/або високого рівня демпфірування, коли додаткові зміни стану тріщини протягом періоду коливань вочевидь не відбувається.

Найчастіше для контролю за станом тріщини використовується знак згинального моменту в особливому елементі [49]. Зміна знаку моменту означає зміну стану тріщини. Стан тріщини також контролюється кутом між поверхнями тріщини при згині [50], або за допомогою одиначної функції, яка приймає значення  $-1$  (тріщина відкрита) або  $1$  (тріщина закрита) і залежить від знаку кривизни особливого елемента [41]. При поздовжніх коливаннях стрижня тріщина вважається закритою, якщо осьова деформація в перерізі з тріщиною є від'ємною, і відкритою в іншому випадку [22]. Аналогічний підхід був застосований для моделювання закриття тріщини втомі при циклічному згині [26]. Тріщина, що закривається, моделювалась також за допомогою дельта-функції Дірака [51], що дозволило отримати замкнену форму рішення для форм коливань стрижня.

Стрижень з тріщиною розглядається також як такий, що складається з двох лінійних складових [52]. Коли тріщина відкрита, то ці складові поєднуються матрицею зв'язку, яка залежить від сил взаємодії між ними, а коли закрита – стрижень вважається суцільним.

**Вільні і резонансні коливання стрижня.** Дослідження вільних і резонансних коливань стрижнів з тріщиною, що закривається, виявили відносно невисокий рівень їх нелінійності. Для досягнення найбільшого впливу тріщини на спектр коливань було запропоновано збуджувати коливання з частотою дещо нижчою за власну частоту коливань стрижня [22]. Але навіть при цьому амплітуда другої гармоніки, яка є найбільш чутливою до присутності тріщини, складала 1% від основної гармоніки. Навіть у випадку великої тріщини ( $\gamma=0,36$ ) друга гармоніка спектру вільних коливань консольної балки є незначною [53]. Амплітуда другої гармоніки практично не змінюється при варіюванні рівня демпфірування [54]. При резонансних і вільних коливаннях стрижня зміна їх нелінійності в залежності від розміру тріщини є одного порядку з зміною власних частот стрижня, і ці зміни є недостатньо значними для надійного виявлення тріщин.

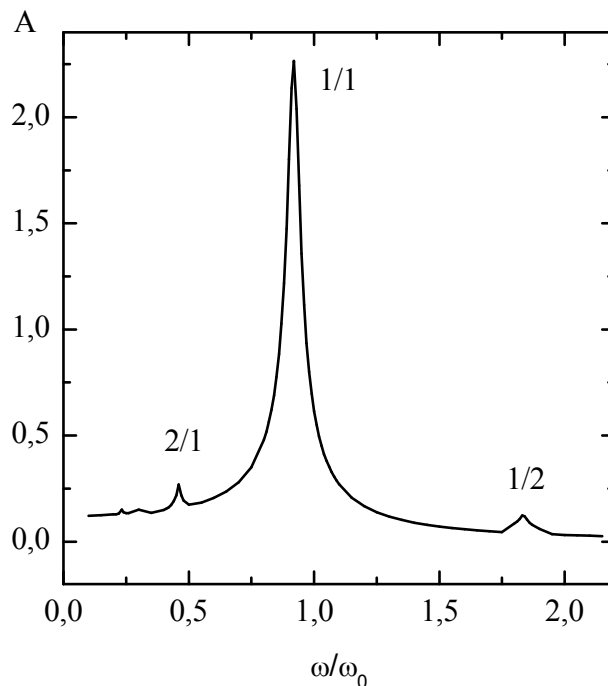
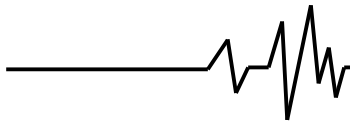
Тріщина, що закривається, спричиняє виникнення супутніх форм коливань в моменти розкриття або закриття тріщини при вільних незатухаючих коливаннях консольного стрижня Бернуллі-Ейлера [16]. Ці форми коливань є причиною додаткової нелінійності коливань стрижня. Найбільш чутливою ознакою пошкодження у випадку вільних і резонансних коливань було визнано коефіцієнт гармонік, який визначався на основі вищих гармонік спектра коливань [55]. Оскільки цей коефіцієнт залежить від точки вимірювання уздовж стрижня, його можна використовувати також і для визначення місцеположення тріщини.

**Суб- і супергармонічні коливання стрижня.** Дослідження нелінійних резонансів тіл з тріщиною продемонстрували їхній високий потенціал для створення чутливих вібраційних методів діагностики тріщин незважаючи на ту обставину, що практична реалізація таких методів пов'язана з деякими труднощами.

Амплітуди коливань при нелінійних резонансах є незначними порівняно з амплітудою основного резонансу, але в той же час спектр коливань при супер- і субгармонічних резонансах складається з значних за амплітудою субгармонік і вищих гармонік, які можна легко виявити. Саме тому більшість стратегій діагностики пошкодження засновані на використанні спектрального аналізу коливань (переміщення, прискорення, деформація) з частотами, близькими до того чи іншої нелінійного резонансу.

Так, за допомогою СЕМ консольного стрижня з тріщиною ( $\gamma=0,2$ ) було показано, що його амплітуда коливань при супергармонічному резонансі другого порядку приблизно у 5 разів менша за амплітуду основного резонансу [36]. Використовуючи аналогічну модель стрижня, але з відносною глибиною тріщини  $\gamma=0,4$ , було показано, що амплітуди коливань при супергармонічних резонансах порядку  $3/1$  і  $2/1$  і субгармонічному резонансі порядку  $1/2$  відповідно у 160, 80 і 20 разів менші за амплітуду основного резонансу [56]. На рис. 2 показана типова амплітудно-частотна характеристика стрижня з тріщиною, що закривається, характерною особливістю якої є наявність супергармонічного порядку  $2/1$  і субгармонічного порядку  $1/2$  резонансів.

Таким чином, діагностика пошкодження на підставі вимірювання амплітуд коливань при нелінійних резонансах є малоперспективною. Крім того, ширина резонансної кривої супергармонічних резонансів приблизно на порядок менша, ніж головного резонансу, що зменшує точність вимірювання амплітуди коливань при нелінійних резонансах.



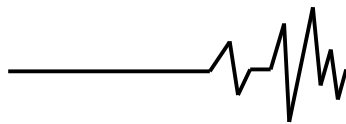
**Рис. 2. Амплітудно-частотна характеристика стрижня з тріщиною, що закривається ( $\gamma=0.6$ )**

Разом з тим була виявлена суттєва нелінійність коливань консольного стрижня з тріщиною при супергармонічних резонансах [37]. Друга гармоніка було особливо помітною в спектрі супергармонічних резонансних коливань другого порядку у випадках  $\gamma=0,3\dots0,4$ . Аналогічні результати були отримані за допомогою СЕМ вільного стрижня ( $\gamma=0,4$ ): спектр супергармонічних резонансних коливань другого порядку складався з значної другої гармоніки і невеликих третьої та четвертої гармонік [38]. Спектри коливань при супергармонічних резонансах порядку  $1/4$ ,  $1/3$  і  $1/2$  стрижня з тріщиною ( $\gamma=0,5$ ) склалися головним чином з четвертої, третьої і другої гармоніки, відповідно [57]. При субгармонічному резонансі другого порядку субгармоніка  $1/2$  є домінуючою. Був виявлений прямий і істотний зв'язок між глибиною тріщини в стрижні і амплітудою другої гармоніки в спектрі його супергармонічних резонансних коливань другого порядку [14].

Порівняння чутливості нелінійних резонансів до наявності тріщини показало, що нелінійність коливань при супергармонічному резонансі порядку  $2/1$  більш чутлива до невеликих тріщин ( $\gamma<0,07$ ), але у випадку більш глибоких тріщин більш чутливою є нелінійність коливань при субгармонічному резонансі порядку  $1/2$  [56].

Проблемою практичного використання нелінійних ефектів для діагностики тріщин є наявність різних типів нелінійності у механічній системі водночас: пружна нелінійність, пов'язана з відкриттям-закриттям тріщини, геометрична нелінійність та нелінійне демпфірування.

Один із способів вирішення цієї проблеми продемонстровано на прикладі в в'язкопружного гнучкого консольного стрижня Бернуллі-Ейлера з невеликою геометричною нелінійністю (коли поздовжнє переміщення стрижня є незначним у порівнянні з переміщенням від згину) і тріщиною з відносною глибиною  $\gamma=0,072$  [50]. Виявилось, що спектр коливань при супергармонічному порядку  $3/1$  резонансі неушкодженого стрижня складається з ряду непарних гармонічних складових ( $1/1$ ,  $3/1$ ,  $5/1$ ), які зумовлені виключно геометричною нелінійністю. Зародження і ріст тріщини зумовлює появу і збільшення другої гармоніки в спектрі коливань, що дає можливість відокремити вплив на спектр коливань геометричної і пружної нелінійності, пов'язаною з наявністю тріщини. У той же час, спектр коливань при супергармонічному порядку  $2/1$  і субгармонічному порядку  $1/2$  резонансів складається з парних і непарних гармонік (змішаний спектр). Наявність тріщини не змінює спектр якісно, тому в цих випадках немає можливості ідентифікувати тріщину за



зміною спектра. Таким чином, супергармонічний резонанс порядку 3/1 був визнаний найкращим для виявлення тріщин в разі наявності двох типів нелінійності.

Уникнути впливу геометричної нелінійності можна також за рахунок застосування відносно невеликої змушувальної сили [38]. Це спрощує процедуру діагностики тріщини, оскільки відносна величина другої гармоніки спектру супергармонічного резонансу порядку 2/1 є інваріантною до зміни амплітуди змушувальної сили [50].

Збудження супер- і субгармонічних коливань можливе лише після досягнення змушувальною силою певного порогового значення. З збільшенням тріщини порогове значення зменшується практично до нуля [50]. У випадку субгармонічних коливань порогове значення дещо вище, ніж у випадку супергармонічних коливань. Існування порогового значення при збудженні супер- і субгармонічних резонансів було підтверджено експериментально [58].

Іншою проблемою при збудженні нелінійних резонансів є вага конструкції, яка може спричинити її значну статичну деформацію, тим самим частково або повністю відкривши або закрити тріщину [30]. В цьому випадку нелінійні ефекти стають неефективними для виявлення тріщин.

На прикладі моделі крила літака з поверхневою тріщиною, що закривається, було запропоновано підхід до вирішення цієї проблеми [59]. Щоб компенсувати вагу конструкції, і тим самим завадити повному закриттю або відкриттю тріщини, був прикладений додатковий статичний компонент сили. Таким чином виникла можливість збуджувати суб- і супергармонічні коливання і використовувати їх для виявлення тріщин у крупногабаритних і масивних конструкціях. У роботі [60] також було показано вплив статичного навантаження на нелінійність коливань стрижня з тріщиною і запропоновано спосіб для визначення локального згинального моменту, необхідного для повного закриття тріщини.

З іншого боку зміна нелінійності коливань при супер- або субгармонічних резонансах в процесі зміни статичного компонента змушувальної сили може служити в якості індикатора тріщин [61]. Найбільша нелінійність коливань спостерігається у відсутності статичного компонента. При його збільшенні (незалежно від його знака) нелінійність коливань зменшується до нульового значення.

Послідовне прикладання змушувальної сили в різних точках вздовж стрижня може бути

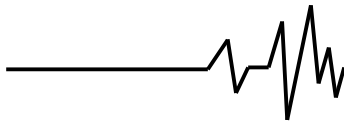
використано для визначення місцеположення тріщини [42]. Виявилось, що нелінійність коливань стрижня з тріщиною при супергармонічному резонансі порядку 2/1 і субгармонічному резонансі порядку 1/2 суттєво залежить від точки прикладання змушувальної сили. При цьому різка зміна нелінійності коливань виразно вказує на розташування тріщини, а за рівнем нелінійності можна визначити розмір тріщини за умови, що демпфіруюча здатність стрижня відома. При цьому нелінійність коливань при нелінійних резонансах практично не залежить від точки вимірювання (місцезнаходження датчика) уздовж стрижня.

Деякі спеціальні методи обробки коливань були запропоновані для підвищення чутливості методу вібродіагностики тріщини [29, 62]. Найчастіше з цією метою застосовують вейвлет-перетворення [63], яке призначене для аналізу нестационарних процесів.

Для визначення місцерозташування тріщини за методикою [42] необхідно виконати значний об'єм вимірювань для визначення рівня нелінійності коливань при суб- або супергармонічного резонансу вздовж стрижня. Але згідно з методом, запропонованим у [58], достатньо лише двох вимірювань, коли стрижень збуджується в двох різних точках, оскільки відносна зміна нелінійності коливань при нелінійних резонансах стрижня з тріщиною залежить лише від точки прикладання сили і не залежить від розміру тріщини.

Тріщина втоми зумовлює істотне збільшення характеристик демпфірування коливань конструкцій [7, 64, 65]. У той же час високий рівень демпфірування може частково або повністю поглинути прояв нелінійності коливань при супер- і субгармонічних резонансах [54, 60]. Так збільшення декременту коливань консольного стрижня з поперечною краєвою тріщиною на два порядки зумовлює зниження амплітуди другої гармоніки спектра коливань при супергармонічному резонансі порядку 2/1 до 8 разів у випадку відносної глибини тріщини  $\gamma=0,1$  і до 5,4 разів у випадку  $\gamma=0,3$  [54]. Таким чином, рівень демпфірування слід завжди враховувати в методах виявлення ушкоджень, що базуються на використанні нелінійних ефектів.

**Вимушені коливання стрижня вдалині від резонансу.** У ряді досліджень при моделюванні поперечних коливань консольної балки [26, 34] та балки на двох опорах [21, 30] було показано, що їх вимушені коливання ставали негармонічними при наявності тріщини, що закривається, але рівень нелінійності цих коливань є незначним. Крім того вплив тріщин



такого типу проявляється в появі вищих форм коливань [21].

Незвичайний нелінійний ефект було виявлено при дослідженні вимушених коливань балки на двох опорах з тріщиною ( $\gamma=0,1$ ) посередині [60]. Коливання балки збуджувались двома гармонічними силами з однаковою амплітудою, прикладених в різних точках стрижня. Було показано, що за такого навантаження збуджуються коливання на частоті, що дорівнює різниці між частотами двох сил. Однак експериментального підтвердження ефекту отримати не вдалось.

Аналіз спектру вимушених коливань стрижня, виконаний в багатьох його точках, дозволяє визначити місцеположення тріщини за різкою зміною другої гармоніки спектру тріщини [66].

Особливість дослідження [67] полягало у тому, що стрижень був виготовлений з десятишарового композиту. Пошкодження моделювалось за допомогою розшарування з різною довжиною і розташуванням по довжині і глибині стрижня. Частоти гармонічної змушувальної були 1 і 2 кГц, що набагато перевищувало першу власну частоту коливань стрижня. Спектральний аналіз вимушених коливань показав, що розшарування зумовлює виникнення вищих гармонік, які виникають в результаті періодичного відкриття і закриття розшарування. Амплітуда цих гармонік залежить від розміру розшарування і його розташування.

Для підвищення чутливості вібраційної діагностики пошкодження застосовують вейвлет перетворення для виділення нелінійних складових у спектрі вимушених коливань конструкцій [68]. Дані про спектр коливань, визначені в багатьох точках стрижня, дозволяють визначити як розміри, так і місцезнаходження тріщини. Ще один метод підвищення чутливості вібродіагностики тріщин полягає у виявленні відмінностей у параметрах коливань конструкції з часом в результаті розвитку пошкодження [69]. Теоретично метод дозволяє виявляти відносно малі тріщини ( $\gamma=0,1$ ), але його суттєвим недоліком є те, що його застосування потребує багато часу.

**Фазова траєкторія.** Тріщина, що закривається, впливає також і на фазову траєкторію. Так для механічної системи з кусково-лінійною відновлювальною силою при вільних згасаючих коливаннях було показано [7, 70], що її фазовий портрет, на відміну від фазового портрета лінійної системи, складається з фрагментів різних еліпсів. Таким чином зміни фазових траєкторій можуть слугувати діагностичною ознакою тріщини.

Спотворення фазового портрету є більш суттєвим при нелінійних резонансах стрижня з тріщиною [57].

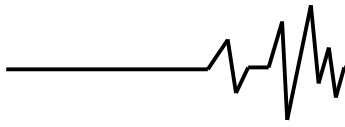
**Вібродіагностика тріщин у пластинах.** Існує значна кількість робіт, присвячених вібраційній діагностиці пошкоджень в конструкціях з композитних матеріалів [71]. Ці методи базуються головним чином на взаємозв'язку між пошкодженням (розшаруванням) і зміною форм коливань, власних частот або імпедансу. В той же час обмежене число робіт присвячене нелінійним коливанням пластин з тріщиною або розшаруванням, що закриваються.

Так в [72-74] представлено результати досліджень вимушених нелінійних коливань прямокутних пластин однакової товщини з різними типами поверхневих тріщин, що закриваються. Тріщини вважалися відносно невеликим, щоб нехтувати зміною форми коливань пластини, зумовленою наявністю тріщини. З використанням підходів механіки руйнувань були отримані аналітичні вирази для визначення зміни власної частоти коливань пластини, а також параметрів нелінійних спотворень коливань при основному резонансі і при слабкому супергармонічному резонансі другого порядку. Було показано, що у разі тріщини постійної глибини по ширині пластини відносна зміна другої гармоніки спектру коливань при супергармонічному резонансі другого порядку на один-два порядки перевищує відносну зміну власних частот коливань пластини. Водночас напівеліптична поверхнева тріщина проявляється набагато слабкіше.

Дослідження вимушених поперечних коливань прямокутної пластини постійної товщини з кінцевим числом поверхневих дефектів типу тріщин на основі принципу Остроградського-Гамільтона і методу Рітца виявили сильний супергармонічний резонанс другого порядку пластини [75].

Тривимірне СЕМ квадратної пластини з композитного матеріалу, що містить розшарування, яке може бути відкритим або закритим повністю або частково, була використана для дослідження її вимушених коливань [76]. Гармонічна сила з частотою 25 Гц прикладалась у певній точці пластини перпендикулярно до поверхні. У спектрі коливань пластини було виявлено субгармоніку і вищі гармоніки, амплітуди яких до деякої міри залежали від місця вимірювання коливань.

Чисельні дослідження вимушених коливань восьмишарової композитної пластини на основі графіту і епоксидної смоли з розшарування в середній площині показали, що



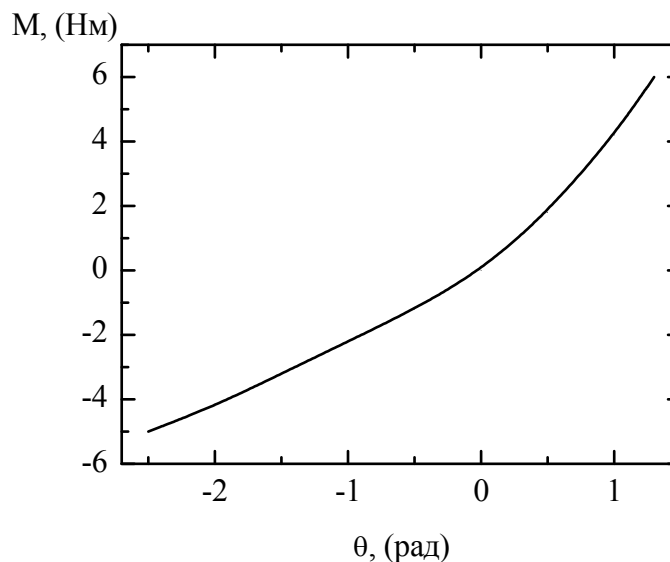
при імпульсному збудженні коливань у спектрі коливань з'являються гармоніки, пов'язані з додатковими формами коливань, а у випадку гармонічної змушувальної сили спостерігався комбінований резонанс [77].

Поверхневі тріщини в металевих пластинах і розшарування композитних пластин призводять до збільшення їхньої демпфіруючої здатності [73, 78-81]. Зміна характеристик демпфірування коливань може бути хорошим індикатором згаданих вище видів пошкоджень в пластинах. У той же час високий рівень демпфірування заважає прояву нелінійних ефектів, що знижує їх ефективність для виявлення пошкоджень [72, 73, 77].

**Експериментальні дослідження нелінійних коливань.** Перевірити ефективність будь-якої теорії можна лише

експериментально. На жаль, експериментальних досліджень нелінійних коливань конструкцій чи конструкційних елементів небагато.

Велике значення для проблеми нелінійних коливань тіл з пошкодженням типу тріщини, що закривається, має експериментальне визначення відновлювальної сили. Для цього використовували чотириточковий згин зразка з вимірюванням розкриття тріщини [53, 82]. На рис. 3  $\theta$  – це кут розкриття тріщини, а  $M$  – згинальний момент. Як видно крива складається з двох прямих ліній, які з'єднані перехідною кривою. Ліва сторона цієї кривої відповідає повністю відкритій тріщині, а права – повністю закритій.



**Рис. 3. Залежність між кутом розкриття тріщини і величиною згинального моменту ( $a/h=0.36$ )**

Поява тріщини у конструкційних елементах зумовлює не тільки прояв нелінійних ефектів, але і зростання рівня демпфірування коливань. Так випробування зразків з титанового сплаву [64] і вуглецевої сталі [58] показали, що ріст тріщини втомі в діапазоні  $\gamma=0\dots0,4$  зумовлює збільшення логарифмічного декременту коливань до 10 і 6 разів, відповідно. Збільшення характеристики демпфірування

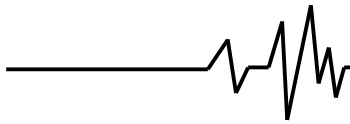
пустотілого сталевго стрижня досягало 60 разів [7]. На основі експериментальних досліджень було показано, що абсолютне значення енергії, розсіяної крайовою тріщиною втомі нормального відриву  $\Delta U_m$  суттєво залежить від розмаху КІН ( $\Delta K_I$ ) і не залежить від початкового рівня демпфіруючої здатності зразка [65]

$$\Delta U_m = 3,45387 \times 10^{-7} \Delta K_I + 1,54926 \times 10^{-6} \Delta K_I^2 - 5,19304 \times 10^{-8} \Delta K_I^3. \quad (3)$$

Вільні коливання можуть бути використані не тільки для визначення демпфіруючої характеристики об'єкта діагностики, але і для оцінки власних частот і

спектра коливань. Порівняння чутливості двох останніх до тріщини втомі розміром  $\gamma=0,4$  при вільних коливаннях призматичних консольних зразків показали, що відносно зменшення





першої власної частоти і збільшення другої гармоніки у спектрі коливань майже однакові і не перевищують 20% [64]. Незначна друга гармоніка у спектрі вільних коливань стрижня з вуглецевої сталі ( $\gamma=0,36$ ) і полікарбонату ( $\gamma=0,5$ ) була виявлена у дослідженнях [53, 83].

Порівняння фазових портретів, отриманих при вільних затухаючих коливаннях стрижня для різних довжин тріщин, показало, що вони помітно відрізняються один від одного і цю відмінність можна використовувати для виявлення пошкоджень [7].

Таким чином, чутливість вищих гармонік спектра вільних коливань не є достатньою для надійного виявлення відносно невеликих тріщин. Цей висновок підтверджують результати теоретичного аналізу, згідно з яким використання нелінійних резонансів є набагато перспективнішим для виявлення пошкоджень.

Експериментальні дослідження нелінійних резонансів сталевих консольних

призматичних зразків з тріщиною, що закривається, виявили існування супергармонічних резонансів порядку 2/1 і 4/1 і субгармонічного резонансу порядку 1/2 [84]. Тест стрижня з тріщиною ( $\gamma=0,4$ ) при супергармонічному резонансі другого порядку показав, що спектр коливань (прискорення) містив другу гармоніку з відносною амплітудою приблизно 0,4 [38]. При випробуваннях полімерного стрижня з тріщиною було виявлено сильний субгармонічний резонанс другого порядку і субгармонічний резонанс третього порядку [85], а також спостерігали істотне спотворення фазових портретів при супергармонічних резонансах порядку 4/2 і 3/2 [86].

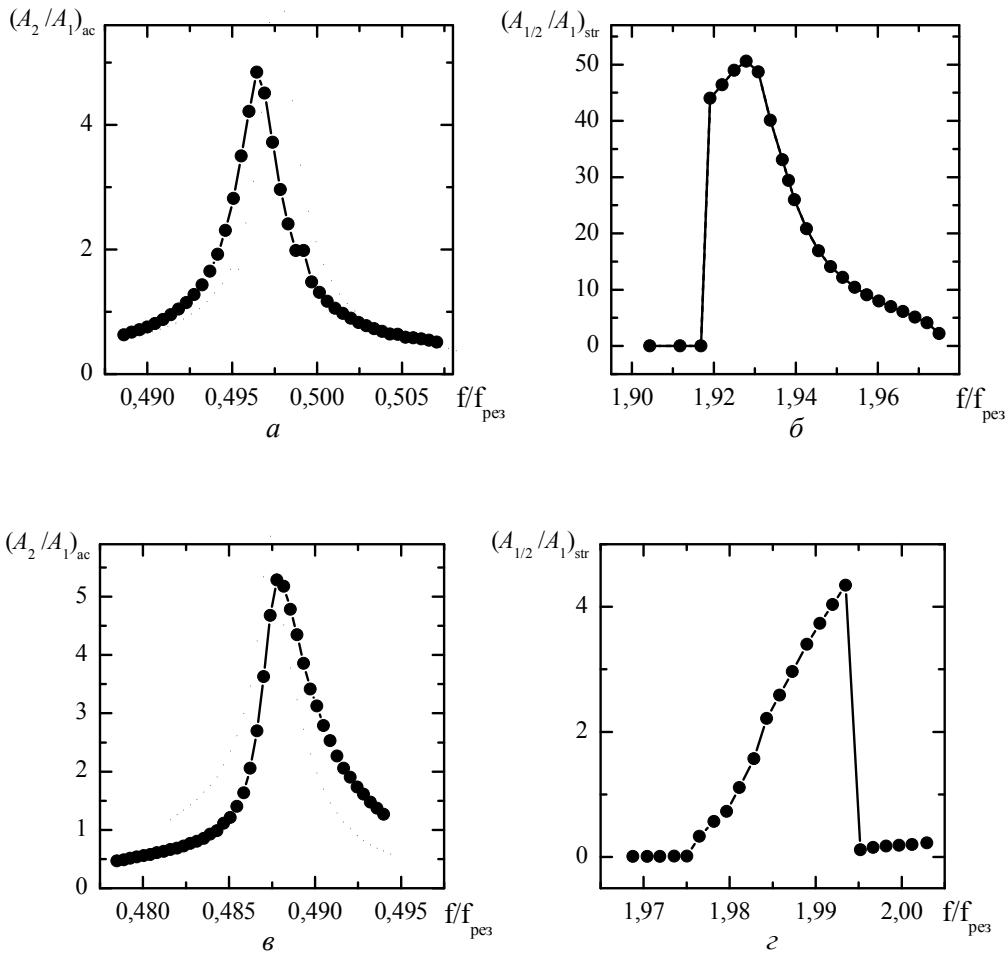
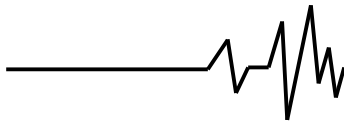


Рис. 4. Супергармонічний резонанс порядку 2/1 (а, в) і субгармонічний резонанс порядку 1/2 (б, г) зразків з титанового сплаву (а, б) і вуглецевої сталі (в, г): (а)  $\gamma=0,11$ ; (б)  $\gamma=0,24$ ; (в)  $\gamma=0,26$ ; (г)  $\gamma=0,41$



Сильний супергармонічний резонанс другого порядку і субгармонічний резонанс порядку  $1/2$  було виявлено при експериментальних дослідженнях консольних призматичних зразків з титанового сплаву і вуглецевої сталі [58]. За допомогою акселерометра вимірювали прискорення вільного кінця зразків, а за допомогою тензорезистора – деформацію біля защемлення. На рис. 4 представлені відносні значення другої гармоніки спектру прискорення  $(A_2/A_1)_{ac}$  і субгармоніки спектру деформації  $(A_{1/2}/A_1)_{str}$ . Було встановлено, що для збудження субгармонічних коливань необхідна значно потужність, ніж для збудження супергармонічних коливань. Цей висновок узгоджується з результатами аналітичних досліджень [50, 87]. Крім того субгармонічні коливання вкрай нестабільні: вони можуть з'являтися і зникати несподівано (рис 4, б, г).

Нелінійність коливань з частотами, близькими до частот суб- і супергармонічних резонансів, суттєво залежить від розміру тріщини і точки прикладання сили вздовж стрижня, і не залежить від амплітуди сили і точки вимірювання вздовж стрижня [58, 88]. Чутливість спектру коливань при нелінійних резонансах до наявності тріщини на один-три порядки перевищує чутливість зміни власних частот коливань стрижня [58]. Було показано також, що фазовий портрет є також чутливим до наявності тріщини при нелінійних резонансах [88].

Звичайною практикою при аналітичних дослідженнях змущених коливань є вважати змущувальну силу гармонічною. Однак на практиці неможливо генерувати чисто гармонічне збудження. Насправді спектр змущувальної сили містить вищі гармоніки. Як наслідок, якщо частота збудження у декілька разів нижча за частоту основного резонансу, це може призвести до виникнення так званого псевдосупергармонічного резонансу, який схожий на вигляд з супергармонічним, але збуджується у відсутності тріщини. Один з можливих практичних способів уникнути псевдосупергармонічного резонансу продемонстрований у [54].

Можливість виявлення тріщин в компресорній лопатці газотурбінного двигуна за допомогою супергармонічного резонансу була показана в [89]. Поверхнева тріщина площею у 10% від площі поперечного перерізу лопатки зумовила виникнення другої гармоніки у спектрі прискорення і деформації при супергармонічному резонансі другого порядку, амплітуда яких відповідно у 4,3 і 2,1 рази перевищувала амплітуду основної гармоніки.

Для порівняння, при головному резонансі ці значення склали всього 0,024 і 0,044. Зміна характеристики демпфірування також була визнана чутливим індикатором втоми тріщини, але тільки для матеріалів з низькою демпфіруючою здатністю. У випадку лопатки збільшення декременту коливань, зумовлене тріщиною, досягло 2,2 рази.

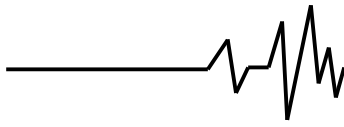
**Заключення.** В даний час у розпорядженні промисловості є велика кількість різноманітних методів діагностики пошкоджень. Кожен з цих методів має свої переваги, недоліки та обмеження при використанні. Проте жоден з них не є універсальним, тобто таким, що може бути застосованим для діагностики різних видів пошкоджень в конструкціях і машинах різного типу.

Як показує практика, вибір методу діагностики визначається насамперед об'єктом діагностики. З цієї точки зору вібраційна діагностика пошкодження на основі використання нелінійних ефектів є перспективною стосовно стрижнеподібних конструкцій.

Використання нелінійної вібродіагностики пошкоджень пластин істотно обмежені особливостями розвитку в них тріщин. Тріщини в металевих пластинах зазвичай є наскрізними, які не належать до типу тих, що закриваються. Розшарування композитних пластин не завжди призводить до зміни жорсткості при згині. Тому в даний час нелінійні ефекти не є широко вживаними для виявлення пошкоджень в пластинах і знаходяться у стадії пошуку кращих теоретичних і практичних рішень.

Головною перевагою вібродіагностики пошкоджень на основі використання нелінійних ефектів є відносно висока чутливість до пошкоджень типу тріщини, що закривається. Моделі тіла з такою тріщиною більш точно описують його динамічну поведінку. Вони здатні виявляти нелінійні резонанси і точніше прогнозувати зміни власних частот і форм коливань.

Однак нелінійна вібродіагностика пошкоджень має певні проблеми, які потребують свого вирішення і які стримують використання такої діагностики на практиці. Перш за все основним недоліком моделей тіла з тріщиною, що закривається, є їх відносна складність, розрахунки вимагають більше комп'ютерного часу, а рішення в деяких випадках є нестійкими. При використанні нелінійних методів вібродіагностики необхідно враховувати можливість прояву інших типів нелінійності (нелінійне демпфірування, геометрична нелінійність). У разі наявності різних типів нелінійності вплив кожного з них на



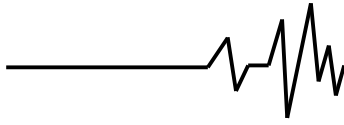
сумарний прояв нелінійності коливань конструкційного елемента повинен бути відокремленим за допомогою спеціальних методів.

Використання супергармонічних резонансів для вібродіагностики пошкоджень стикається також з проблемою уникнення псевдогармонічних резонансів. Крім того при використанні нелінійних ефектів для виявлення пошкоджень необхідно постійно контролювати рівень демпфірування в механічній системі, тому що нелінійні ефекти можуть бути повністю придушені високим рівнем демпфірування навіть у разі наявності відносно великих тріщин.

Важливим способом підвищення чутливості і надійності нелінійної вібродіагностики є розробка спеціальних математичних методів обробки сигналу, такі як вейвлет перетворення, метод виявлення відмінностей та інші. Перспективним є також розвиток методів нелінійної вібродіагностики тріщин у валах з використанням додаткового збудження, такого як прикладання короткотривалого крутного моменту або осьового збудження одним або багатьма періодичними імпульсами.

#### Список використаних джерел

1. Kirmscher P.G. The effect of discontinuities on the natural frequency of beams / P.G. Kirmscher // Proc. of the ASTM. - 1944. - Vol. 44. - P. 897-904.
2. Thomson W.T. Vibration of slender bars with discontinuities in stiffness / W.T. Thomson // J. of Applied Mechanics. - 1949.- Vol. 16.- P. 203-207.
3. Dimarogonas A.D. Vibration of cracked structures: a state of the art review / A.D. Dimarogonas // Eng. Fracture Mechanics. - 1996. - Vol. 55. - P. 831-857.
4. Krawczuk M. Damage indicators for diagnostic of fatigue cracks in structures by vibration measurements - a survey / M. Krawczuk, W. Ostachowicz // J. of Theoretical and Applied Mechanics. - 1996.- Vol. 34. - P. 307-326.
5. Cawley P. A comparison of the natural frequency changes produced by cracks and slots / P. Cawley, R. Ray // J. of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design. - 1988.- Vol. 110.- P. 366-370.
6. Gudmundson P. Eigenfrequency changes of structures due to cracks, notches or other geometrical changes / P. Gudmundson // J. of Mechanics and Physics of Solids. - 1982.- Vol. 30.- P. 339-353.
7. Rytter A. Vibrational based inspection of civil engineering structures / A. Rytter // PhD Thesis, Fractura & Dynamics, Department of Building Technology and Structural Engineering, University of Aalborg, Denmark, 1993, Paper No.44, 193 p.
8. Doebling S.W. A summary review of vibration-based damage identification methods / S.W. Doebling, C.R. Farrar, M.B. Prime // The Shock and Vibration Digest. - 1998. - Vol. 30. - P. 91-105.
9. Salawu O.S. Detection of structural damage through changes in frequency: a review / O.S. Salawu // Eng. Structures. - 1997. - Vol. 19. - P. 718-723.
10. Maezawa S. Superharmonic resonance in piecewise linear system with unsymmetrical characteristics / S. Maezawa // Proc. of the 5<sup>th</sup> Int. Conf. on Nonlinear Oscillations. - Kiev: Inst. of mathematics AS of USSR, 1970. - Vol. 1. - P. 401-422.
11. Grabowski B. The vibrational behaviour of a turbine rotor containing a transverse crack / B. Grabowski // J. of Mechanical Design. - 1980.- Vol. 102.- P. 140-146.
12. Osegueda R.A. A modal strain energy distribution method to localize and quantify damage / R.A. Osegueda, C. Carrasco, R. Meza // Proc. of the 15th IMAC, Orlando, Florida, USA. - 1997. - Vol. 2. - P. 1298-1304.
13. Springer W.T. Damage assessment based on the structural frequency response function / W.T. Springer, K.L. Lawrence, T.J. Lawley // Experimental Mechanics. - 1988.- Vol. 28.- P. 34-37.
14. Plakhtienko N.P. Resonance of second order in vibrations of a beam containing a transverse crack / N.P. Plakhtienko, S.A. Yasinskii // Strength of Materials. - 1995. - Vol. 27. P. 146-152.
15. Sinha J.K. Simplified models for the location of cracks in beam structures using measured vibration data / J.K. Sinha, M.I. Friswell, S. Edwards // J. of Sound and Vibration. - 2002.- Vol. 251.- P. 13-38.
16. Bovsunovsky A.P. Analytical approach to the determination of dynamic characteristics of a beam with a closing crack / A.P. Bovsunovsky, V.V. Matveev // J. of Sound and Vibration. - 2000. - Vol. 235. - P. 415-434.
17. Ratcliffe C.P. Damage detection using a modified Laplacian operator on mode shape data / C.P. Ratcliffe // J. of Sound and Vibration. - 1997.- Vol. 204.- P. 505-517.
18. Yuen M.M.F. A numerical study of the eigenparameters of damaged cantilever beam / M.M.F. Yuen // J. of Sound and Vibration. - 1985. - Vol. 103.- P. 301-310.
19. Pandey A.K. Damage detection in structures using changes in flexibility / A.K.



Pandey, M. Biswas M. // *J. of Sound and Vibration*. - 1994. - Vol. 169. - P. 3-17.

20. Nandwana B.P. Detection of the location and size of a crack in stepped cantilever beams based on measurements of natural frequencies / B.P. Nandwana, S.K. Maiti // *J. of Sound and Vibration*. - 1997. - Vol. 203. - P. 435-446.

21. Petroski H.J. Simple static and dynamic models for the cracked elastic beam / H.J. Petroski // *Int. J. of Fracture*. - 1981. - Vol. 17. - P. 71-76.

22. Collins K.R. Free and forced longitudinal vibrations of a cantilevered bar with a crack / K.R. Collins, R.H. Plaut, J. Wauer // *J. of Vibration and Acoustics*. - 1992. - Vol. 114. - P. 171-177.

23. Christides S. One-dimensional theory of cracked Bernoulli-Euler beams / S. Christides, A.D.S. Barr // *Int. J. of the Mechanical Sciences*. - 1984. - Vol. 26. - P. 639-648.

24. Shen M.-H.H. Natural modes of Bernoulli-Euler beams with symmetric cracks / M.-H.H. Shen, C. Pierre // *J. of Sound and Vibration*. - 1990. - Vol. 138. - P. 115-134.

25. Qunli Wu. Reconstruction of integrated crack function of beams from eigenvalue shifts / Wu Qunli // *J. of Sound and Vibration*. - 1994. - Vol. 173. - P. 279-282.

26. Shen M.-H.H. Vibrations of beams with a fatigue crack / M.-H.H. Shen, Y.C. Chu // *Computers and Structures*. - 1992. - Vol. 45. - P. 79-93.

27. Tomasel F.G. Detection of cracks in cantilever beams: experimental set-up using optical techniques and theoretical modelling / F.G. Tomasel, H.A. Larrondo // *J. of Sound and Vibration*. - 1999. - Vol. 228. - P. 1195-1204.

28. Pye C.J. A vibration method for the determination of stress intensity factors / C.J. Pye, R.D. Adams // *Eng. Fracture Mechanics*. - 1982. - Vol. 16. - P. 433-445.

29. Casini P. Nonlinear harmonic identification of breathing cracks in beams / O. Giannini, P. Casini, F. Vestroni // *Computers & Structures*. - 2013. - Vol. 129. - P. 166-177.

30. Zastrau B. Vibration of cracked structures / B. Zastrau // *Archiv of Mechanics*. - 1985. - Vol. 37. - P. 731-743.

31. Ismail F. Identification of fatigue cracks from vibration testing / F. Ismail, A. Ibrahim, H.R. Martin // *J. of Sound and Vibration*. - 1990. - Vol. 140. - P. 305-317.

32. Sampaio R.P.C. Damage detection using the frequency-response-function curvature method / R.P.C. Sampaio, N.M.M. Maia, J.M.M. Silva // *J. of Sound and Vibration*. - 1999. - Vol. 226. - P. 1029-1042.

33. Kam T.Y. Detection of cracks in structures using modal test data / T.Y. Kam, T.Y. Lee // *Eng. Fracture Mechanics*. - 1992. - Vol. 42. - P. 381-387.

34. Qian G.-L. The dynamic behaviour and crack detection of a beam with a crack / G.-L. Qian, S.-N. Gu, J.-S. Jiang // *J. of Sound and Vibration*. - 1990. - Vol. 138. - P. 233-243.

35. Krawczuk M. Modelling and identification of cracks in truss constructions / M. Krawczuk // *J. of Finite Element in Analysis and Design*. - 1992. - Vol. 12. - P. 41-50.

36. Pugno N. Analysis of the harmonic vibrations of a beam with a breathing crack / N. Pugno, R. Ruotolo, C. Surace // *Proc. of the 15<sup>th</sup> IMAC, Tokyo, Japan*. - 1997. - P. 409-413.

37. Pugno N. Evaluation of the non-linear dynamic response to harmonic excitation of a beam with several breathing cracks / N. Pugno, R. Ruotolo, C. Surace // *J. of Sound and Vibration*. - 2000. - Vol. 235(5). - P. 749-762.

38. Saavedra P.N. Crack detection and vibration behavior of cracked beams / P.N. Saavedra, L.A. Cuitiño L.A. // *Computers & Structures*. - 2001. - Vol. 79. - P. 1451-1459.

39. Pandey A.K. Damage detection from changes in curvature mode shapes / A.K. Pandey, M. Biswas, M.M. Samman // *J. of Sound and Vibration*. - 1991. - Vol. 145. - P. 321-332.

40. Sinou J.-J. On the use of non-linear vibrations and the anti-resonances of Higher-Order Frequency Response Functions for crack detection in pipeline beam / J.-J. Sinou. // *Mechanics Research Communications*. - Vol. 43. - 2012. - P. 87-95.

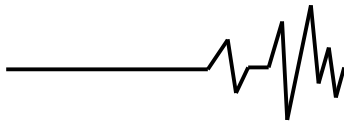
41. Ruotolo R. Harmonic analysis of the vibrations of a cantilevered beam with a closing crack / R. Ruotolo, C. Surace, P. Crespo, D. Storer // *Computers and Structures*. - 1996. - Vol. 61. - P. 1057-1074.

42. Bovsunovsky A. Crack detection in beams by means of the driving force parameters variation at non-linear resonance vibrations / A. Bovsunovsky, O. Bovsunovsky // *Key Engineering Materials*. - 2007. - Vol. 347. - P. 413-420.

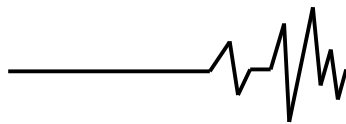
43. Hassiotis S. Damage detection using impulse response moments and natural frequencies / S. Hassiotis, K.M. Grigoriadis // *Proc. of the 15th IMAC, Orlando, USA*. - 1997. - Vol. 2. - P. 1110-1116.

44. Chati M. Modal analysis of cracked beam / M. Chati, R. Rand, S. Mukherjee // *J. of Sound and Vibration*. - 1997. - Vol. 207. - P. 249-270.

45. Krawczuk M. Hexahedral finite element with an open crack / M. Krawczuk, W. Ostachowicz // *Finite Element in Analysis and Design*. - 1993. - Vol. 13. - P. 225-235.



46. Neogy S., Ramamurti V. Effect of partial depth cracks on the natural frequency of twisted blades: a 3-D finite element analysis / S. Neogy, V. Ramamurti // *J. of Sound and Vibration*. - 1997. - Vol. 205. - P. 33-55.
47. Dimarogonas A.D. Analytical methods in rotor dynamics / A.D. Dimarogonas, S.A. Paipetis // London: Elsevier, Applied Science Publishers, 1983. - 488 p.
48. Krawczuk M. Coupled longitudinal and bending forced vibration of Timoshenko cantilever beam with a closing crack / M. Krawczuk // *J. of Theoretical and Applied Mechanics*. - 1994. - Vol. 32. - P. 463-482.
49. Actis R. Non-linear effects due to closing cracks in vibrating beams / R. Actis, A.D. Dimarogonas // *Proc. of the 12th ASME Conf. on Mechanical Engineering, Vibration and Noise*, Montreal, Canada. - 1989. - P. 99-104.
50. Tsyfansky S.L. Detection of fatigue cracks in flexible geometrically non-linear bars by vibration monitoring / S.L. Tsyfansky, V.I. Beresnevich // *J. of Sound and Vibration*. - 1998. - Vol. 213. - P. 159-168.
51. Caddemi S. The non-linear dynamic response of the Euler-Bernoulli beam with an arbitrary number of switching cracks / S. Caddemi, I. Calio, M. Marletta. // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. - 2010. - Vol. 45. - P. 714-726.
52. Abraham O.N.L. A piece wise linear approach for modelling of a breathing crack / O.N.L. Abraham, J.A. Brandon // *Proc. of the 17th Int. Seminar on Modal Analysis*, Leuven, Belgium. - 1992. - Vol. 1. - P. 417-431.
53. Rezaee M. A new approach to free vibration analysis of a beam with a breathing crack based on mechanical energy balance method / M. Rezaee, R. Hassannejad. // *Acta Mechanica Solida Sinica*. - 2011. - Vol. 24. - P. 185-194.
54. Bovsunovsky A.P. Considerations regarding superharmonic vibrations of a cracked beam and the variation in damping caused by the presence of the crack / A.P. Bovsunovsky, C. Surace // *J. of sound and vibration*. - 2005. - Vol. 288. - P. 865-886.
55. Matveev V.V. Vibration-based diagnostics of fatigue damage of beam-like structures / V.V. Matveev, A.P. Bovsunovsky // *J. of Sound and Vibration*. - 2002. - Vol. 249. - P. 23-40.
56. Bovsunovsky A.P. The effect of damping and force application point on the non-linear dynamic behaviour of a cracked beam at sub- and super-resonance vibrations / A.P. Bovsunovsky, C. Surace, O.A. Bovsunovsky // *Strength of Materials*. - 2006. - Vol. 38. - P. 492-497.
57. Andraus U. Non-linear dynamics of a cracked cantilever beam under harmonic excitation / U. Andraus, P. Casini, F. Vestroni // *Int. J. of Non-Linear Mechanics*. - 2007. - Vol. 42. - P. 566-575.
58. Bovsunovskii A.P. Application of nonlinear resonances for the diagnostics of closing cracks in rodlike elements / A.P. Bovsunovskii, O.A. Bovsunovskii // *Strength of Materials*. - 2010. - Vol. 42. - P. 331-343.
59. Tsyfansky S.L. Non-linear vibration method for detection of fatigue cracks in aircraft wings / S.L. Tsyfansky, V.I. Beresnevich // *J. of Sound and Vibration*. - 2000. - Vol. 236. - P. 49-60.
60. Sundermeyer J.N. On crack identification and characterization in a beam by non-linear vibration analysis / J.N. Sundermeyer, R.L. Weaver // *J. of Sound and Vibration*. - 1995. - Vol. 183. - P. 857-871.
61. Bovsunovskii A.P. Diagnostics of closing cracks in rodlike elements at nonlinear resonances by the method of variation of the asymmetry of driving forces / A.P. Bovsunovskii, O.A. Bovsunovskii // *Strength of Materials*. - 2010. - Vol. 42. - P. 397-405.
62. Peng Z.K. Crack detection using nonlinear output frequency response functions / Z.K. Peng, Z.Q. Lang, S.A. Billings // *J. of Sound and Vibration*. - 2007. - Vol. 301. - P. 777-788.
63. Surace C. Crack detection of a beam using the wavelet transform / C. Surace, R. Ruotolo // *Proc. of the 12th IMAC*, Honolulu, USA. - 1994. - Vol. 2. - P. 1141-1147.
64. Bovsunovsky A.P. Comparative analysis of sensitivity of vibration damage indicators by the results of laboratory tests / A.P. Bovsunovsky // *Proc. of the 17<sup>th</sup> IMAC*, Kissimmee, USA. - 1999. - Vol. 2. - P. 1909-1915.
65. Bovsunovsky A.P. The mechanisms of energy dissipation in the non-propagating fatigue cracks in metallic materials / A.P. Bovsunovsky // *Eng. fracture mechanics*. - 2004. - Vol. 71. - P. 2271-2281.
66. Asnaashari E. Development of residual operational deflection shape for crack detection in structures / E. Asnaashari, J. K. Sinha // *Mechanical Systems and Signal Processing*. - 2014. - Vol. 43. - P. 113-123.
67. A. Żak. Non-linear Vibration of a Delaminated Composite Beam // *Proc. of the 6<sup>th</sup> Int. Conf. on Damage Assessment of Structures*, Krakow, Poland. - 2005. - P. 607-614.
68. Viet Khoa Nguyen. Wavelet based method for remote monitoring of structural health by analyzing the nonlinearity in dynamic response of damaged structures caused by the crack-breathing phenomenon / Viet Khoa Nguyen, Oluremi A. Olatunbosun, Tien Khiem Nguyen //



Technische Mechanik. - 2008. - Vol. 28. - P. 289-298.

69. Surace C. A novelty detection approach to diagnose damage in a cracked beam / C. Surace, K. Worden, G. Tomlinson // Proc. of the 15<sup>th</sup> IMAC, Orlando, USA. - 1997. - P. 947-953.

70. Brandon J.A. Counter-intuitive quasi-periodic motion in the autonomous vibration of cracked Timoshenko beam / J.A. Brandon, O.N.L. Abraham // J. of Sound and Vibration. - 1995. - Vol. 185. - P. 415-430.

71. Zou Y. Vibration-based model-dependent damage (delamination) identification and health monitoring for composite structures - a review / Y. Zou, L. Tong, G.P. Steven // J. of Sound and Vibration. - 2000. - Vol. 230. - P. 357-378.

72. Matveev V.V. Vibrodiagnostic parameters of fatigue damage in rectangular plates. Part 1. A procedure of determination of damage parameters / V.V. Matveev, O.E. Boginich // Strength of Materials. - 2004. - Vol. 36. - P. 549-557.

73. Matveev V.V. Vibrodiagnostic parameters of fatigue damage in rectangular plates. Part 2. Straight cracks of constant depth / V.V. Matveev, O.E. Boginich // Strength of Materials. - 2005. - Vol. 37. - P. 30-42.

74. Matveev V.V. Vibrodiagnostic parameters of fatigue damage in rectangular plates. Part 3. Through-the-thickness and surface semi-elliptical cracks / V.V. Matveev, O.E. Boginich // Strength of Materials. - 2006. - Vol. 38. - P. 466-480.

75. Plakhtienko N.P. Second-Order Resonance of a Plate with Long Defects of Integrity / N.P. Plakhtienko // Strength of Materials. - 2001. - Vol. 33. - P. 66-73.

76. Delrue S. Three-dimensional finite element simulation of closed delaminations in composite materials / S. Delrue, K. Van Den Abeele // Ultrasonics. - 2012. - Vol. 52. - P. 315-324.

77. Žak A. Vibration of a laminated composite plate with closing delamination / A. Žak, M. Krawczuk, W. Ostachowicz // Proc. of the Int. Conf. on Damage Assessment of Structures, Dublin, Ireland. - 1999. - P. 17-26.

78. Saravanos D.A. Effect of delaminations on the damped dynamic characteristic of composite laminates: analysis and experiments / D.A. Saravanos, D.A. Hopkins // J. of Sound and Vibration. - 1996. - Vol. 192. - P. 977-993.

79. Adams R.D. Vibration testing as a nondestructive test tool for composite materials / R.D. Adams, D. Walton, J.E. Flitcroft, D. Short // Composite Reliability. - 1975. - Vol. 580. - P. 159-175.

80. Peroni I. Effect of debonding damage on the modal damping of a sandwich panel / I. Peroni, A. Paolozzi, A. Bramante // Proc. of the 9<sup>th</sup> IMAC, Florence, Italy. - 1991. - P. 1617-1622.

81. Keye S., Rose M., Sachau D. Localizing delamination damages in aircraft panels from modal damping parameters / S. Keye, M. Rose, D. Sachau // Proc. of the 19<sup>th</sup> IMAC, Kissimmee, USA. - 2001. - Vol. 1. - P. 412-417.

82. Clark R. The effect of crack closure on the reliability of NDT predictions of crack size / R. Clark, V.D. Dover, L.J. Bond // NDT International. - 1987. - Vol. 20. - P. 269-275.

83. Prime M.B. Linear and nonlinear methods for detecting cracks in beams / M.B. Prime, D.W. Shevitz // Proc. of the 14<sup>th</sup> IMAC, Dearbon, USA. - 1996. - Vol. 2. - P. 1437-1443.

84. Tsyfanskii S.L. Using nonlinear effects to detect cracks in the rod element of structures / S.L. Tsyfanskii, M.A. Magone, V.M. Ozhiganov // The Soviet Journal of Nondestructive Testing. - 1985. - Vol. 21. - P. 224-229.

85. Brandon J.A. An experimental investigation into the topological stability of a cracked cantilever beam / J.A. Brandon, C. Sudraud // J. of Sound and Vibration. - 1998. - Vol. 211. - P. 555-569.

86. Brandon J.A. Regular orbits exhibiting multiple impact characteristics from a cracked beam under sinusoidal excitation / J.A. Brandon, A.E. Stephens, E.M.O. Lopes, A.S.K. Kwan // Chaos, Solitons & Fractals. - 1998. - Vol. 9. - P. 1473-1480.

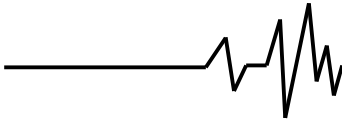
87. Wu J.J. A generalized harmonic balance method for forced nonlinear oscillations: the subharmonic cases / J.J. Wu // J. Sound Vibration. - 1992. - Vol. 159. - P. 503-525.

88. Andreaus U. Experimental damage detection of cracked beams by using nonlinear characteristics of forced response / U. Andreaus, P. Baragatti // Mechanical Systems and Signal Processing. - 2012. - Vol. 31. - P. 382-404.

89. Bovsunovsky A.P. The effect of damping on the non-linear dynamic behaviour of a cracked beam at resonance and super-resonance vibrations / A.P. Bovsunovsky, C. Surace, R. Ruotolo // Proc. of the 5<sup>th</sup> Int. Conf. on Damage Assessment of Structures, Southampton, UK. - 2003. - P. 97-105.

#### **ВИБРОДІАГНОСТИКА ПОВРЕЖДЕНІЙ ТИПА ЗАКРІВЛЮЮЩОЇ ТРЕЩИНИ. ОБЗОР ЛІТЕРАТУРИ**

**Анотація.** *Обзор иллюстрирует основные достижения международного научного сообщества в исследовании нелинейных эффектов, обусловленных*



периодическим закрытием-открытием трещины, а также в разработке на основе нелинейных эффектов вибрационных методов диагностики повреждения в наиболее распространенных типах конструктивных элементов, таких как стержни и пластины. Показаны перспективы их использования на практике.

Разработка вибрационных методов диагностики повреждения, чувствительных к наличию трещин докритического размера в разного рода конструкциях и машинах является важной с точки зрения возможности продления их ресурса посредством контроля за развитием трещины, а также с точки зрения предотвращения катастрофических разрушений. Основным потенциальным преимуществом вибродиагностики, основанной на использовании нелинейных эффектов, таких как нелинейность колебаний при супер- и субгармонических резонансах, является относительно высокая чувствительность к повреждению типа закрывающейся трещины. Вместе с тем существуют определенные проблемы применения такой вибродиагностики на практике, требующие своего решения.

**Ключевые слова:** вибродиагностика, закрывающаяся трещина, супергармонический и субгармонический резонансы, нелинейные колебания.

#### VIBRATION DIAGNOSTICS OF DAMAGE OF CLOSING CRACK TYPE. THE STATE OF THE ART REVIEW

**Annotation.** The review illustrates the main achievements of the international scientific community in the study of non-linear effects due to the periodic closure-opening of a crack, as well as in the development on the basis of non-linear effects of vibration methods of damage detection in the most common types of structural elements, such as beams and plates. The prospects of their utilization in practice are shown.

The development of vibration methods of damage detection that are sensitive to the presence of crack of subcritical size in different structures and machines is important from the point of view of the possibility of extending their life by controlling the crack growth, as well as from the point of view of preventing catastrophic destructions. The main potential advantage of vibration diagnostics, based on the use of non-linear effects, such as nonlinearity of vibrations at super- and subharmonic resonances, is a relatively high sensitivity to the damage of closing crack type. However, there are some problems of application of such a vibration diagnostics to be solved.

**Key words:** vibration diagnostics, closing crack, superharmonic and subharmonic resonances, nonlinear oscillations.