Ольшанский В. П.

Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства им. П. Василенко

Ольшанский С. В.

Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»

Olshanskii V. P.

Kharkiv Petro Vasylenko National Technical University of Agriculture

Olshanskii S. V.

National Technical University “Kharkiv Polytechnic Institute”

УДК 534.1

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОСЦИЛЛЯТОРА ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ С УЧЁТОМ ВЯЗКОГО ТРЕНИЯ

В функциях Куммера получено решение уравнения свободных колебаний осциллятора, масса которого изменяется по экспоненциальному закону. Учтено влияние вязкого трения и реактивной силы. Проанализированы особенности колебаний, обусловленные изменением массы осциллятора. В результате компьютерных расчётов построены графики нестационарных колебаний осцилляторов возрастающей и убывающей массы с учётом и без учёта действия реактивной силы.

Ключевые слова: *осциллятор, колебания, переменная масса, вязкое трение, реактивная сила, функции Куммера.*

Введение. Многообразие современных машин в промышленности даёт множество примеров, когда масса машины может изменяться в процессе работы. Сюда относятся землеройные машины в горнорудной и угольной промышленности, вибрационные и виброударные машины типа конвейеров, сепараторов, классификаторов, вращающиеся грохоты, оборудование для скрининга, сельскохозяйственные машины, центрифуги, намоточные машины и пр.

Одним из первых, кто изучал колебательное движение тела переменной массы, был И.В. Мещерский [1]. Он в аналитическом виде получил решение уравнения малых свободных колебаний математического маятника, допуская, что масса маятника, является линейной функцией времени. Движение маятника описано с помощью функций Бесселя. Рассмотрены случаи асимптотического поведения движения во времени. Аналогичные задачи колебаний маятника с постоянной массой, но линейно-переменной длины, решены в [2]. Нестационарные колебания осциллятора линейно переменной массы также рассматривали в [3], [4]. Решения уравнений движения получены в функциях Бесселя.

Среди современных учёных значительное внимание исследованию динамики механизмов с переменной массой звеньев уделяет Livija Cveticanin. Ей принадлежит аналитический обзор работ по динамике систем с переменной массой [5]. Она рассматривает колебания нелинейного осциллятора с переменными во времени параметрами [6,7].

При моделировании изменения массы задают различные законы. Одним из распространённых является показательный закон. Его в своих работах, при исследовании динамики тел переменной массы, использовали К.Э. Циолковский [8], В.П. Марченко [9] и др. Показательный закон также задавали в [10], при моделировании нестационарных колебаний осциллятора без учёта вязкого сопротивления среды. Свободные колебания осциллятора, у которого менялась по экспоненциальному закону жёсткость пружины, кратко рассмотрены в [11]. Показано, что решение уравнения движения выражается в цилиндрических функциях.

Целью данной работы является изучение особенностей колебательного движения осциллятора, обусловленных непрерывным изменением массы и действием вязкого сопротивления.

Ставится задача обобщения результатов, полученных в [10]

1. КОЛЕБАНИЯ ОСЦИЛЛЯТОРА ВОЗРАСТАЮЩЕЙ МАССЫ

1.1. *Свободные колебания с учётом реактивной силы.* Уравнение свободных колебаний осциллятора, с учётом реактивной силы и вязкого сопротивления среды, имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\left(M\frac{dx}{dt}\right)+\mu\frac{dx}{dt}+cx=0,$$

где M – масса осциллятора; μ – коэффициент вязкого трения; c – коэффициент жёсткости пружины; x – перемещение осциллятора относительно положения статического равновесия; t – время.

Рассмотрим задачу возрастания массы по закону

$$M=m_0\exp(\lambda t),$$

где m_0 – начальная масса осциллятора; λ – коэффициент характеризующий скорость изменения M, $\lambda>0$.

Тогда свободные колебания будут описываться уравнением:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\left(\lambda+\frac{\mu}{m_0}e^{-\lambda t}\right)\frac{dx}{dt}+\frac{c}{m_0}e^{-\lambda t}x=0. \quad (1)$$

Его дополняем начальными условиями:

$$x(0)=0;\quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=\dot{x}_0, \quad (2)$$

считая, что колебания вызваны начальной скоростью $\dot{x}_0$, переданной осциллятору.

Для нахождения решения уравнения (1) вводим новую безразмерную переменную

$$\xi=\exp(-\lambda t);\quad \frac{d\xi}{dt}=-\lambda\xi.$$

Учитывая, что

$$\frac{d}{dt}=\frac{d}{d\xi}\frac{d\xi}{dt}=-\lambda\xi\frac{d}{d\xi},$$

$$\frac{d^2}{dt^2}=\lambda^2\xi\left[\frac{d}{d\xi}+\xi\frac{d^2}{d\xi^2}\right],$$

представляем (1) в виде

$$\frac{d^2x}{d\xi^2}-\frac{\mu}{m_0\lambda}\frac{dx}{d\xi}+\frac{c}{\lambda^2m_0}\frac{1}{\xi}x=0. \quad (3)$$

Уравнение (3) решаем при начальных условиях:

$$x|_{\xi=1}=0,\quad \left.\frac{dx}{d\xi}\right|_{\xi=1}=-\frac{\dot{x}_0}{\lambda}. \quad (4)$$

Представим перемещение осциллятора x произведением

$$x=\xi y. \quad (5)$$

Подставив (5) в (3), получаем

$$\xi\frac{d^2y}{d\xi^2}+\left(2-\frac{\mu}{m_0\lambda}\xi\right)\frac{dy}{d\xi}+ \\ +\left(\frac{c}{\lambda^2m_0}-\frac{\mu}{\lambda m_0}\right)y=0. \quad (6)$$

Введением новой переменной $\eta=\dfrac{\mu\xi}{m_0\lambda}$, уравнение (6) преобразуем к форме:

$$\eta\frac{d^2y}{d\eta^2}+(2-\eta)\frac{dy}{d\eta}-\left(1-\frac{c}{\lambda\mu}\right)y=0. \quad (7)$$

Это вырожденное гипергеометрическое уравнение.

При $a=1-\dfrac{c}{\lambda\mu}\neq -n$, где n – натуральное число, общим решением (7) является [12]:

$$y=c_1M(a,2,\eta)+c_2U(a,2,\eta), \quad (8)$$

где $M(a,2,\eta)$, $U(a,2,\eta)$ – функции Куммера; c_1,c_2 – произвольные постоянные.

Если $a=-n$, то общее решение (7) выражается через многочлены Лагерра. (Этот частный случай здесь опускаем из рассмотрения.)

В силу (5) и (8):

$$x(t)=\xi\left[c_1M(a,2,\eta)+c_2U(a,2,\eta)\right]. \quad (9)$$

Подставляя (9) в (4), получаем систему:

$$c_1M(a,2,\eta_0)+c_2U(a,2,\eta_0)=0,$$

$$(10)$$

$$c_1\frac{dM(a,2,\eta)}{d\xi}\bigg|_{\xi=1}+c_2\frac{dU(a,2,\eta)}{d\xi}\bigg|_{\xi=1}=-\frac{\dot{x}_0}{\lambda},$$

в которой $\eta_0=\dfrac{\mu}{\lambda m_0}$.

Определитель Вронского системы (10) выражается через Γ – функцию и элементарные функции [12]:

$$\Delta=-\frac{\Gamma(2)e^{\eta_0}}{\Gamma(a)\eta_0}.$$

Другие определители выражаются в виде:

$$\Delta_1=\frac{\dot{x}_0U(a,2,\eta_0)}{\lambda};\ \Delta_2=-\frac{\dot{x}_0M(a,2,\eta_0)}{\lambda}.$$

Тогда решение (9) удовлетворяет начальным условиям (4), при

$$c_1=-\frac{\dot{x}_0\eta_0\Gamma(a)U(a,2,\eta_0)}{\lambda e^{\eta_0}};$$

$$(11)$$

$$c_2=\frac{\dot{x}_0\eta_0\Gamma(a)M(a,2,\eta_0)}{\lambda e^{\eta_0}}.$$

1.2. ***Свободные колебания без учёта реактивной силы.*** Выясним, как поменяется решение задачи динамики без учёта реактивной силы. В такой постановке колебания осциллятора описываются уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\mu}{m_0}e^{-\lambda t}\frac{dx}{dt}+\frac{c}{m_0}e^{-\lambda t}x=0.$$

Переходя к переменной ξ ему придаём вид

$$\lambda^2\xi^2\frac{d^2x}{d\xi^2}+\left(\lambda\xi-\frac{\mu}{m_0}\lambda\xi^2\right)\frac{dx}{d\xi}+$$

$$+\frac{c}{m_0}\xi x=0.$$

Далее введением переменной η получаем

$$\eta\frac{d^2x}{d\eta^2}+(1-\eta)\frac{dx}{d\eta}+\frac{c}{\lambda\mu}x=0.$$

Снова приходим к вырожденному гипергеометрическому уравнению. При $\dfrac{c}{\lambda\mu}\neq n$, его общее решение имеет вид

$$x(t)=c_3M(a,1,\eta)+c_4U(a,1,\eta). \quad (12)$$

Здесь $a=-\dfrac{c}{\lambda\mu}$; c_3,c_4 произвольные постоянные; $M(a,1,\eta),U(a,1,\eta)$ – функции Куммера.

Решению (12) соответствует определитель [12]

$$\Delta=-\frac{\Gamma(1)e^{\eta}}{\eta\Gamma(a)}\eta_0.$$

Подставив (12) в (4), находим постоянные

$$c_3=-\frac{\dot{x}_0\Gamma(a)}{\lambda e^{\eta_0}}U(a,1,\eta_0);$$

$$c_4=\frac{\dot{x}_0\Gamma(a)}{\lambda e^{\eta_0}}M(a,1,\eta_0),$$

что позволяет провести расчёт свободных колебаний осциллятора.

2. КОЛЕБАНИЯ ОСЦИЛЛЯТОРА УБЫВАЮЩЕЙ МАССЫ

2.1. ***Свободные колебания с учётом реактивной силы.*** Рассмотрим задачу убывания массы по закону

$$M=m_0\exp(-\lambda t),\ \lambda>0.$$

Тогда свободные колебания будут описываться уравнением:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\left(\frac{\mu}{m_0}e^{\lambda t}-\lambda\right)\frac{dx}{dt}+\frac{c}{m_0}e^{\lambda t}x=0. \quad (13)$$

Его дополняем начальными условиями (2).

Для нахождения решения уравнения (13) вводим новую безразмерную переменную

$$\tau=\tau_0\exp(\lambda t);\ \tau_0=\frac{\mu}{m_0\lambda},$$

согласно которой

$$\frac{d}{dt}=\lambda\tau\frac{d}{d\tau};\ \frac{d^2}{dt^2}=\lambda^2\tau^2\frac{d^2}{d\tau^2}+\lambda^2\tau\frac{d}{d\tau}.$$

Преобразовав уравнение (13) и начальное условие (2) к новой переменной, получаем

$$\tau\frac{d^2x}{d\tau^2}+\tau\frac{dx}{d\tau}+\frac{c}{\lambda\mu}x=0; \qquad (14)$$

$$x(\tau_0)=0;\ \left.\frac{dx}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_0}=\frac{\dot{x}_0}{\lambda\tau_0}. \qquad (15)$$

Функцию $x(\tau)$ представляем произведением

$$x=\tau\cdot\exp(-\tau)\cdot y. \qquad (16)$$

Подставив (16) в (14), приходим к вырожденному гипергеометрическому уравнению

$$\tau\frac{d^2y}{d\tau^2}+(2-\tau)\frac{dy}{d\tau}-by=0, \qquad (17)$$

в котором $b=1-c/(\lambda\mu)$.

При $b\neq-n$, где n натуральное число, общим решением (17) является

$$y=c_5M(b,2,\tau)+c_6U(b,2,\tau). \qquad (18)$$

В (18) $M(b,2,\tau)$ и $U(b,2,\tau)$ – функции Куммера; c_5,c_6 – произвольные постоянные.

Учитывая (16) и (18), находим перемещения осциллятора

$$x(t)=\tau\left[c_5M(b,2,\tau)+c_6U(b,2,\tau)\right]\exp(-\tau), \qquad (19)$$

с точностью до произвольных постоянных.

Если $b=-n$, то общее решение (17) выражается через многочлены Лагерра. Этот частный случай здесь опускаем из рассмотрения.

Подставляя (19) в (15), получаем систему:

$$c_5M(b,2,\tau_0)+c_6U(b,2,\tau_0)=0,$$
$$c_5\left.\frac{dM(b,2,\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_0}+c_6\left.\frac{dU(b,2,\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=\tau_0}=\frac{\dot{x}_0e^{\tau_0}}{\lambda\tau_0^2}. \qquad (20)$$

Определитель Вронского системы (20) выражается через Γ – функцию и элементарные функции [12]:

$$\Delta=-\frac{e^{\tau_0}}{\tau_0^2\,\Gamma(b)}.$$

Другие определители выражаются в виде:

$$\Delta_1=-\frac{\dot{x}_0e^{\tau_0}U(b,2,\tau_0)}{\lambda\tau_0^2};$$

$$\Delta_2=\frac{\dot{x}_0e^{\tau_0}M(b,2,\tau_0)}{\lambda\tau_0^2}.$$

Тогда решение (19) удовлетворяет начальным условиям (15), при

$$c_5=\frac{\dot{x}_0\Gamma(b)U(b,2,\tau_0)}{\lambda};$$
$$c_6=-\frac{\dot{x}_0\Gamma(b)M(b,2,\tau_0)}{\lambda}. \qquad (21)$$

Расчёт колебаний осциллятора сводится к применению формул (19) и (21).

2.2. *Свободные колебания без учёта реактивной силы.* Выясним, как поменяется решение задачи динамики без учёта реактивной силы. В такой постановке колебания осциллятора описываются уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\mu}{m_0}e^{\lambda t}\frac{dx}{dt}+\frac{c}{m_0}e^{\lambda t}x=0.$$

Переходя к переменной τ ему придаём вид

$$\tau\frac{d^2x}{d\tau^2}+(1+\tau)\frac{dx}{d\tau}+\frac{c}{\lambda\mu}x=0. \qquad (22)$$

Представляя x произведением $x=y\exp(-\tau)$, вместо (22), получаем вырожденное гипергеометрическое уравнение

$$\tau\frac{d^2y}{d\tau^2}+(1-\tau)\frac{dy}{d\tau}-b\cdot y=0. \qquad (23)$$

Общее решение уравнения (23), при $b\neq-n$, выражается через функции Куммера $M(b,1,\tau)$ и $U(b,1,\tau)$. В итоге находим функцию $x(\tau)$ с точностью до произвольных постоянных c_7 и c_8:

$$x(t)=\left[c_7 M\left(b,1,\tau\right)+c_8 U\left(b,1,\tau\right)\right]\exp\left(-\tau\right). \tag{24}$$

Решению (24) соответствует определитель [12]

$$\Delta=-\frac{e^{\tau_0}}{\tau_0 \Gamma(b)}.$$

Подставив (24) в (15), находим постоянные

$$c_7=\frac{\dot{x}_0 \Gamma(b)}{\lambda} U\left(b,1,\tau_0\right);$$

$$c_8=-\frac{\dot{x}_0 \Gamma(b)}{\lambda} M\left(b,1,\tau_0\right),$$

что позволяет провести расчёт свободных колебаний осциллятора, когда $b \neq -n$.

3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ АНАЛИЗ

3.1. ***Колебания осциллятора возрастающей массы.*** Рассмотрим колебания осциллятора при следующих исходных данных: $m_0=100$ кг; $\lambda=0,05$ с$^{-1}$; $c=85$ кг/с^2, $\dot{x}_0=0,1$ м/с и разных значениях коэффициента вязкого трения μ. На рис. 1 представлено зависимости перемещений от времени, цифры 1,2,3 соответствуют значениям $\mu=3;6;9$ кг/с.

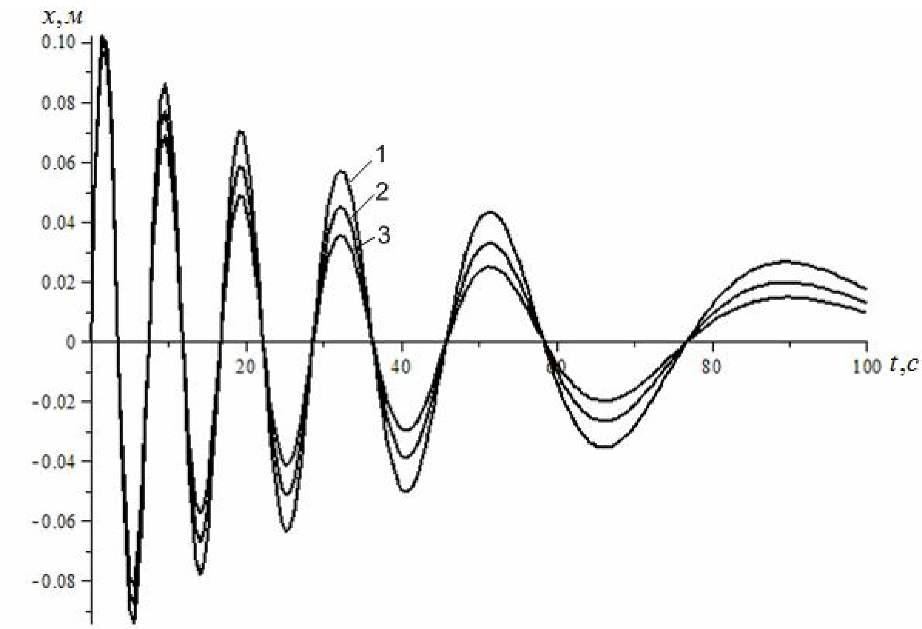

Рис. 1. Зависимости перемещений x от времени t для разных μ с учётом реактивной силы

При возрастании вязкого трения, уменьшаются амплитуды колебаний и увеличивается период колебаний.

Рассмотрим, как влияет скорость нарастания массы на колебания. Для этого примем прежние исходные данные и $\mu=6$ кг/с. На рис. 2 представлено зависимости перемещений от времени, цифры 1,2,3 соответствуют значениям $\lambda=0,05;0,1;0,15$ с$^{-1}$.

Из рис. 2 видно, что с увеличением скорости нарастания массы осциллятора, колебания затухают более интенсивно, а с течением времени режим движения становится апериодическим.

Проведём расчёты колебаний осциллятора без учёта реактивной силы. Для этого примем следующие исходные данные: $m_0=100$ кг; $\lambda=0,05$ с$^{-1}$; $c=85$ кг/с^2, $\dot{x}_0=0,1$ м/с и разные значения коэффициента вязкого трения μ. На рис. 3 представлено зависимости перемещений от времени, где цифры 1,2,3 соответствуют значениям $\mu=3;6;9$ кг/с. Без учёта реактивной силы, увеличение массы осциллятора сопровождается ростом амплитуд колебаний, несмотря на действие силы вязкого сопротивления движению.

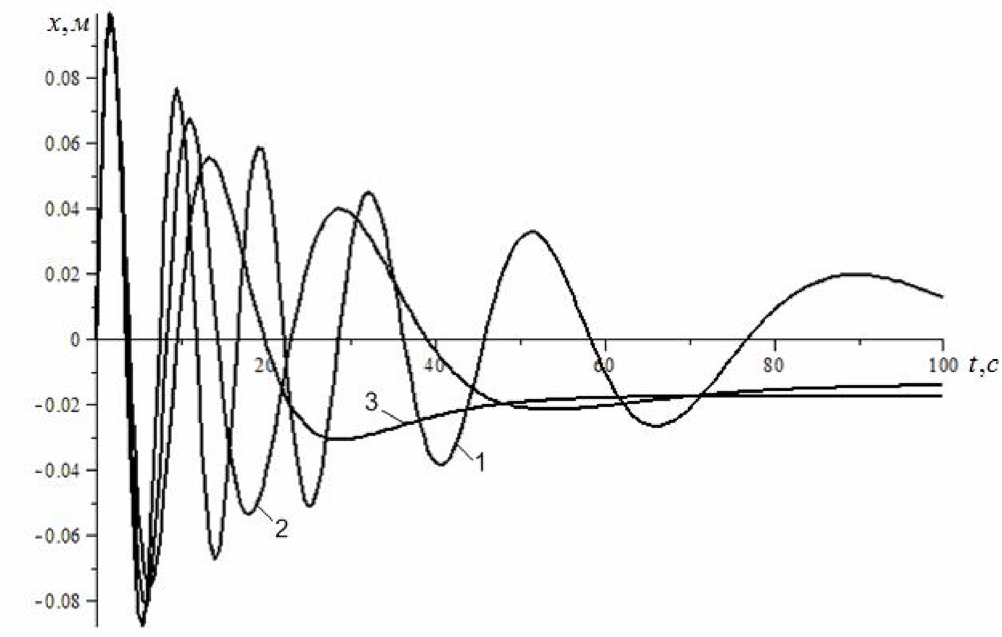

Рис. 2. Зависимости перемещений x от времени t для разных λ с учётом реактивной силы

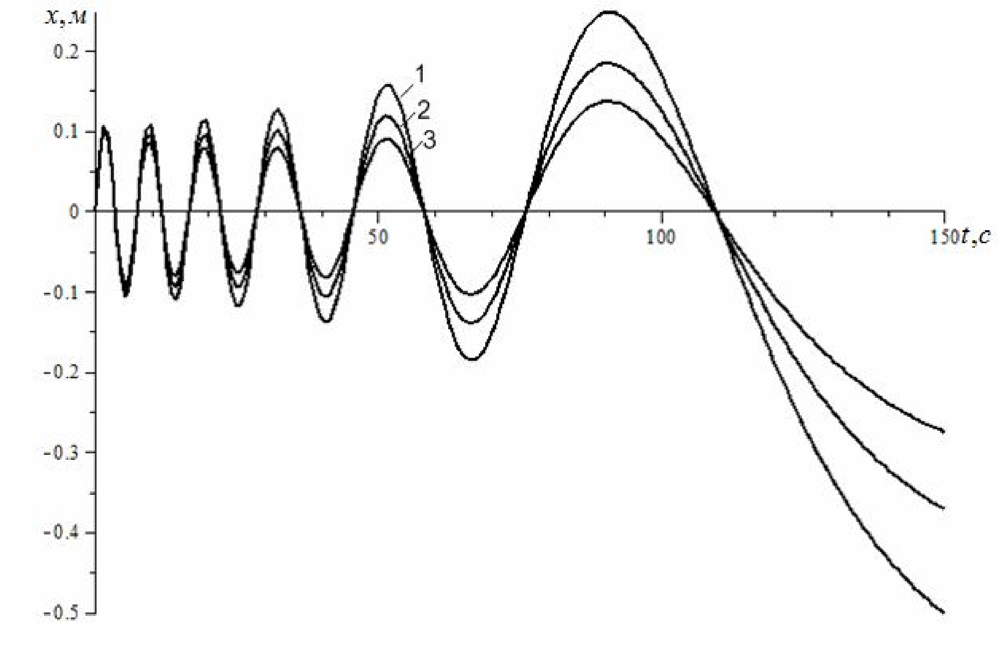

Рис. 3. Зависимости перемещений x от времени t для разных μ без учёта реактивной силы

Рассмотрим, как влияет скорость нарастания массы на колебания. Для этого примем прежние исходные данные и $\mu = 6$ кг/с. На рис. 4 представлено зависимости перемещений от времени, где цифры 1,2,3 соответствуют значениям $\lambda = 0,05; 0,1; 0,15$ с$^{-1}$. Здесь с увеличением λ происходит потеря устойчивости колебательного процесса.

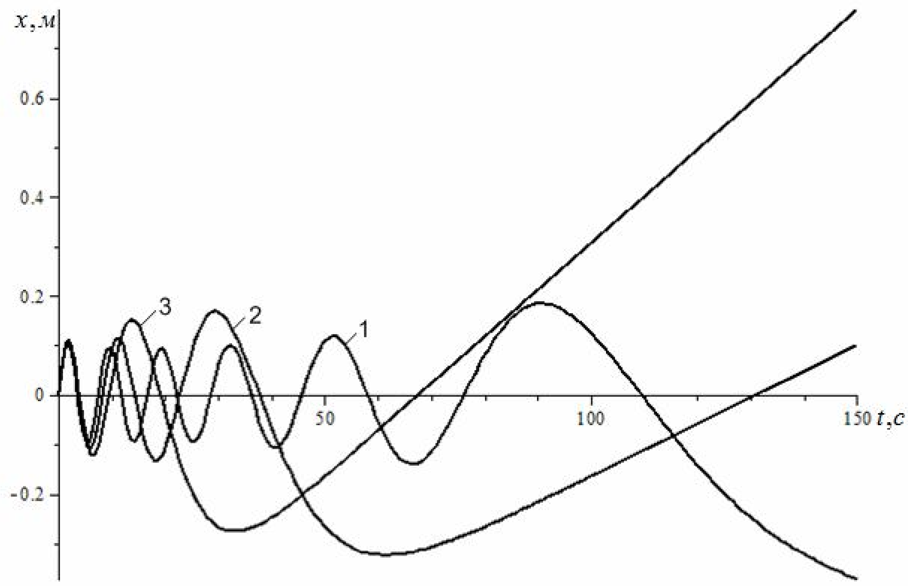

Рис. 4. Зависимости перемещений x от времени t для разных λ без учёта реактивной силы

3.2. ***Колебания осциллятора убывающей массы.*** Рассмотрим колебания осциллятора при следующих исходных данных: $m_0 = 100$ кг; $\lambda = 0,05$ с$^{-1}$; $c = 85$ кг/с^2, $\dot{x}_0 = 0,1$ м/с и разных значениях коэффициента вязкого трения μ. На рис. 5 представлено зависимости перемещений от времени, где цифры 1,2,3 соответствуют значениям $\mu = 3;6;9$ кг/с.

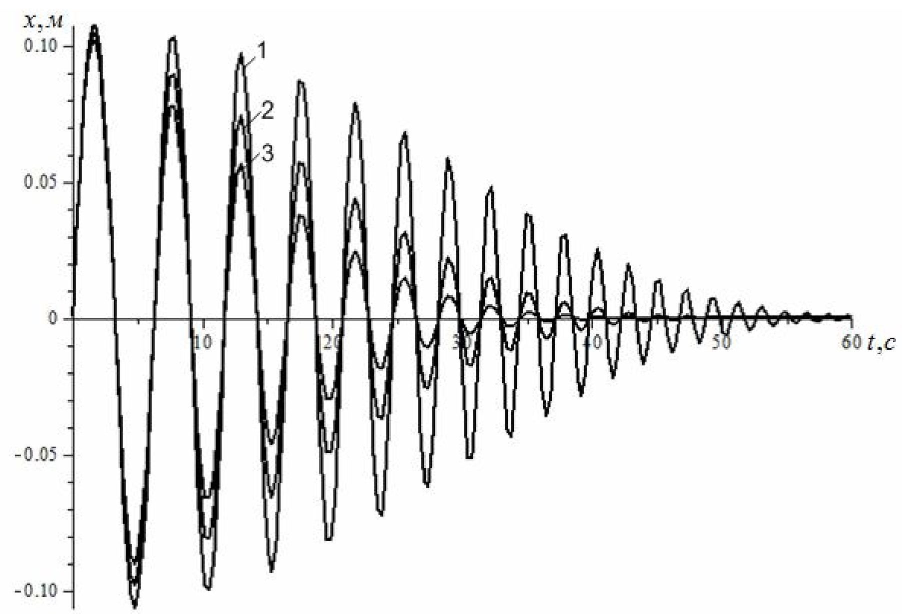

Рис. 5. Зависимости перемещений x от времени t для разных μ с учётом реактивной силы

При возрастании вязкого трения, уменьшаются амплитуды колебаний, причём влияние трения усиливается по мере убывания массы.

Рассмотрим, как влияет скорость убывания массы на колебания. Для этого примем прежние исходные данные и $\mu = 6$ кг/с. На рис. 6 представлено зависимости перемещений от времени, где цифры 1,2,3 соответствуют значениям $\lambda = 0,05; 0,1; 0,15$ с$^{-1}$.

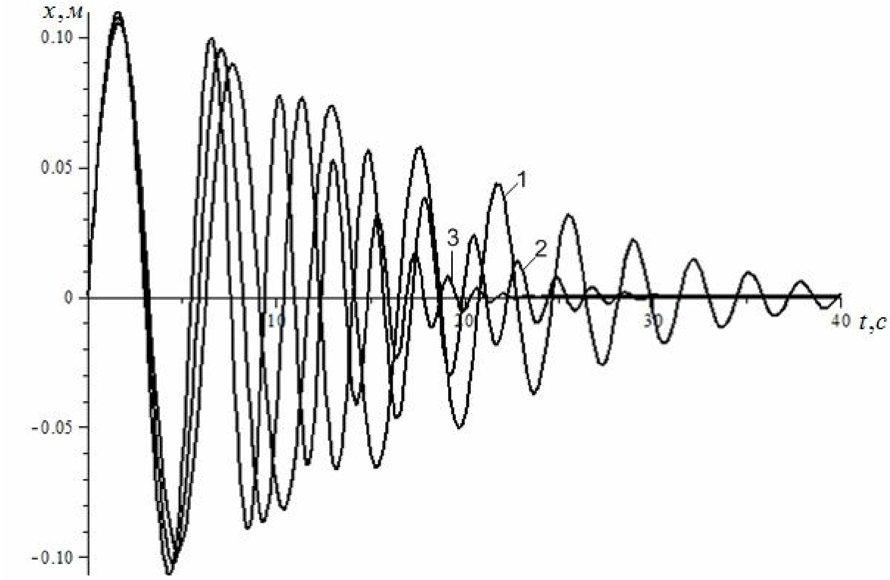

Рис. 6. Зависимости перемещений x от времени t для разных λ с учётом реактивной силы

Из рис. 6 видно, что с увеличением скорости убывания массы осциллятора, колебания затухают более интенсивно и уменьшается время колебательного процесса.

Проведём расчёты колебаний осциллятора без учёта реактивной силы. Для этого примем следующие исходные данные: $m_0 = 100$ кг; $\lambda = 0,05$ с$^{-1}$; $c = 85$ кг/с^2, $\dot{x}_0 = 0,1$ м/с и разные значения коэффициента вязкого трения μ. На рис. 7 представлено зависимости перемещений от времени, где цифры 1,2,3 соответствуют значениям $\mu = 3; 6; 9$ кг/с.

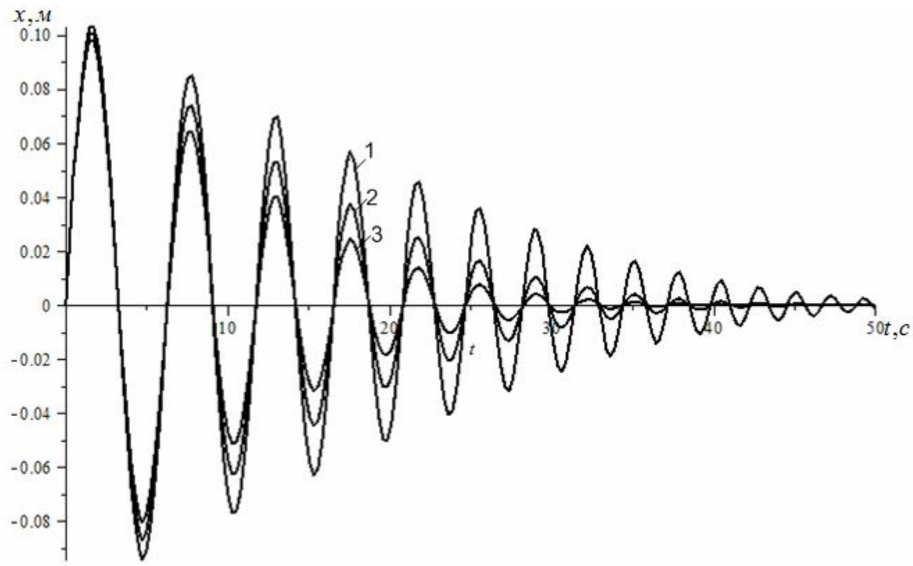

Рис. 7. Зависимости перемещений x от времени t для разных μ без учёта реактивной силы

Рассмотрим, как влияет скорость убывания массы на колебания. Для этого примем прежние исходные данные и $\mu = 6$ кг/с. На рис. 8 представлено зависимости перемещений от времени, где цифры 1,2,3 соответствуют значениям $\lambda = 0,05; 0,1; 0,15$ с$^{-1}$. Здесь увеличение λ также убыстряет затухание колебаний.

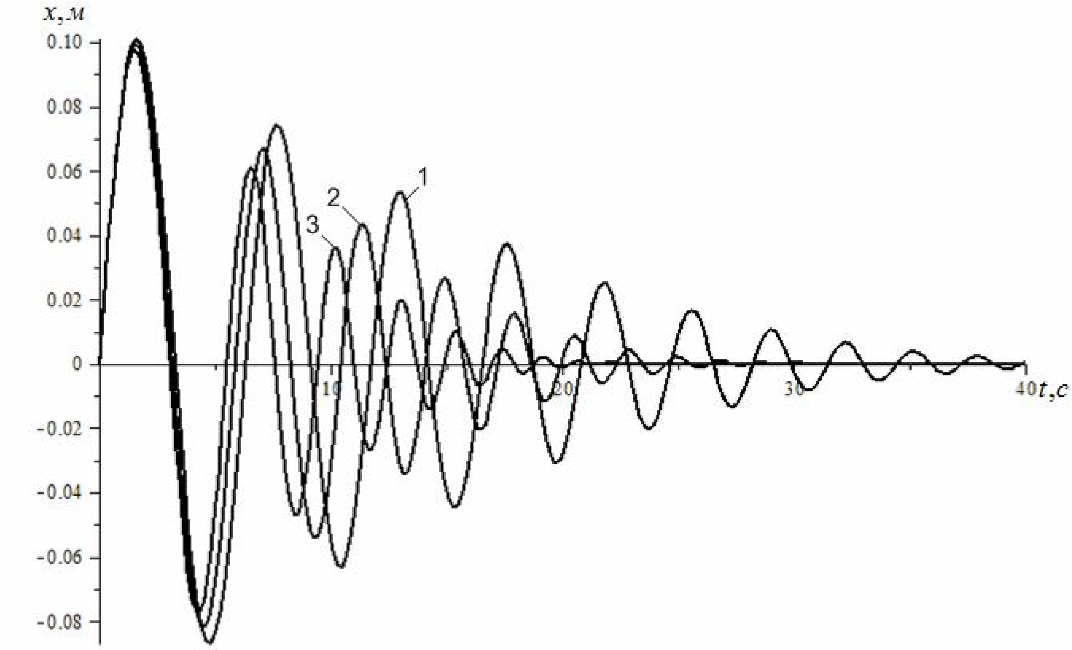

Рис. 8. Зависимости перемещений x от времени t для разных λ без учёта реактивной силы

Выводы

Аналитические решения уравнения нестационарных колебаний осциллятора возрастающей и убывающей массы по показательному закону, с учётом вязкого трения, выражаются в функциях Куммера. При возрастании вязкого трения, уменьшаются амплитуды колебаний, и увеличивается их период. С учётом реактивной силы колебательный процесс с течением времени становится апериодическим, а без учёта реактивной силы – неустойчивым. С увеличением скорости убывания массы убыстряется затухание колебаний. При отсутствии реактивной силы колебания осциллятора убывающей массы затухают быстрее, чем при действии этой силы.

Список использованных источников

1. Мещерский И.В. Работы по механике тел переменной массы. – М.: ГИТТЛ, 1952. – 276 с.
2. Светлицкий В.А., Стасенко И.В. Сборник задач по теории колебаний. – М.: Высшая школа, 1973. – 456 с.
3. Cveticanin L. Dynamics of Machines with Variable Mass. Taylor & Francis Ltd, – 1998. – 300 p.
4. Ольшанский В.П., Ольшанский С.В. Моделирование колебаний осциллятора линейно-переменной массы при импульсном нагружении // Вісник НТУ «ХПІ»: Математичне моделювання в техніці та технологіях, 2013, № 37 (1010). С. 125-130.
5. L. Cveticanin, A review on dynamics of mass variable systems, Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics, Vol. 6, No.1, 2012, 56-74.
6. L. Cveticanin, Oscillator with non-integer order nonlinearity and time variable parameters, Acta Mechanica, Vol.223, No.7, 2012, pp.1417-1429.
7. L. Cveticanin, I. Kovacic, On the dynamics of bodies with continual mass variation, Trans ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol.74, 2007, 810-815.
8. Циолковский К.Э. Собр. соч. т. II, АН СССР, – 1954.
9. Марченко В.П. Про рух точки змінної маси з тертям і опором // Доповіді АН УРСР, № 11, – 1964, С. 1143-1447.

10. Ольшанський В.П., Ольшанський С.В. Вільні коливання осцилятора змінної маси // Вібрації в техніці та технологіях: Всеукр. наук.-техн. журнал. – Вінниця. – Вип.2(70). – 2013. – С. 57-59.

11. Голоскоков Е.Г., Филиппов А.П. Нестационарные колебания деформируемых систем. – К.: Наукова думка, 1977. – 340 с.

12. Abramowitz M., Stegun I.A., Handbook of Mathematical Function. Dover, New York, 1972.

Список источников в транслитерации

1. Meshherskij I.V. Raboty po mehanike tel peremennoj massy. – M.: GITTL, 1952. – 276 s.

2. Svetlickij V.A., Stasenko I.V. Sbornik zadach po teorii kolebanij. – M.: Vysshaja shkola, 1973. – 456 s.

3. Cveticanin L. Dynamics of Machines with Variable Mass. Taylor & Francis Ltd, – 1998. – 300 p.

4. Olshanskii V.P., Olshanskii S.V. Modelirovanie kolebanij oscilljatora linejno-peremennoj massy pri impul'snom nagruzhenii // Visnik NTU «HPI»: Matematichne modeljuvannja v tehnici ta tehnologijah, 2013, № 37 (1010). S. 125-130.

5. L. Cveticanin, A review on dynamics of mass variable systems, Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics, Vol. 6, No.1, 2012, 56-74.

6. L. Cveticanin, Oscillator with non-integer order nonlinearity and time variable parameters, Acta Mechanica, Vol.223, No.7, 2012, pp.1417-1429.

7. L. Cveticanin, I. Kovacic, On the dynamics of bodies with continual mass variation, Trans ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol.74, 2007, 810-815.

8. Ciolkovskij K.Je. Sobr. soch. t. II, AH CCCP, – 1954.

9. Marchenko V.P. Pro ruh tochki zminnoï masi z tertjam i oporom // Dopovidi AN URSR, № 11, – 1964, S. 1143-1447.

10. Olshanskii V.P., Olshanskii S.V. Vil'ni kolivannja osciljatora zminnoï masi // Vibraciï v tehnici ta tehnologijah: Vseukr. nauk.-tehn. zhurnal. – Vinnicja. – Vip.2(70). – 2013. – S. 57-59.

11. Goloskokov E.G., Filippov A.P. Nestacionarnye kolebanija deformirue-myh sistem. – K.: Naukova dumka, 1977. – 340 s.

12. Abramowitz M., Stegun I.A., Handbook of Mathematical Function. Dover, New York, 1972.

НЕСТАЦІОНАРНІ КОЛИВАННЯ ОСЦИЛЯТОРА ЗМІННОЇ МАСИ З УРАХУВАННЯМ В'ЯЗКОГО ТЕРТЯ

Анотація. *В функціях Куммера отримано розв'язки рівняння вільних коливань осцилятора, маса якого змінюється за експонентним законом. Враховано вплив в'язкого тертя та реактивної сили. Проаналізовано особливості коливань, зумовлені зміною маси осцилятора. В результаті комп'ютерних розрахунків побудовано графіки нестаціонарних коливань осциляторів зростаючої та спадаючої маси з урахуванням и без урахування дії реактивної сили.*

Ключові слова: *осцилятор, коливання, змінна маса, в'язке тертя, реактивна сила, функції Куммера.*

NONSTATIONARY VIBRATIONS OF A VARIABLE MASS OSCILLATOR WITH VISCOUS FRICTION

Annotation. *The solution of the characteristic vibrations equation for the oscillator which mass varies under the exponential law is obtained being expressed in Kummer functions. Viscous friction and reactive force effects are considered. The peculiarities of vibrations caused by oscillator mass variation are analyzed. Unsteady vibration graphs for oscillators with an increasing and decreasing mass with and without regard to effect of a reactive force are constructed as a result of computer calculations.*

Key words: *an oscillator, vibrations, a variable mass, a viscous friction, a reactive force, Kummer functions.*