



Булгаков В. М.

Головач І. В.

*Національний  
університет  
біоресурсів і  
природокористування  
України*

Адамчук В. В.

*Національний науковий  
центру "Інститут  
механізації та  
електрифікації  
сільського  
господарства"  
Національної академії  
аграрних наук України*

Bulgakov V. V.

Golovach I. V.

*National University of Life  
and Environmental  
Sciences of Ukraine*

Adamchuk V. V.

*National Scientific Centre  
"Institute for Agricultural  
Engineering and  
Electrification"*

**УДК 631.356.2**

## **ТЕОРІЯ СФЕРИЧНОГО РУХУ ТІЛА КОРЕНЕПЛОДУ У ПРУЖНОМУ СЕРЕДОВИЩІ ПРИ ЙОГО ВІБРАЦІЙНОМУ ВИКОПУВАННІ**

*В статті розглянутий випадок сферичного руху тіла коренеплоду цукрового буряку, коли він знаходиться у ґрунті, тобто усередині пружного середовища і має одну умовну точку закріплення. цей сферичний рух тіла коренеплоду забезпечується при взаємодії з похилою площиною вібраційного викопуючого робочого органу, яка здійснює коливальні рухи у повздовжньо-вертикальній площині. метою даного дослідження було встановлення кутів поворотів тіла коренеплоду при асиметричному захваті вібраційним викопуючим робочим органом з послідуочим руйнуванням його зв'язків з оточуючим пружним середовищем, тобто побудування нової математичної моделі вібраційного вилучення коренеплоду з ґрунту.*

*На підставі застосувань вихідних рівнянь Ейлера отримана нова система диференціальних рівнянь, яка дозволяє аналітично досліджувати вказаний технологічний процес. Одержана система диференціальних рівнянь просторових коливань коренеплоду, що здійснюються під дією збуруючої сили, складається з трьох динамічних і трьох кінематичних рівнянь, має замкнений вигляд, що дало можливість чисельного розв'язку, тобто моделювання процесу вилучення коренеплоду з ґрунту для різних умов викопування, оскільки містить параметри вібраційного викопуючого робочого органу, коренеплоду й оточуючого ґрунту. На підставі розв'язку на ПЕОМ отриманої системи диференціальних рівнянь Ейлера в середовищі Mathcad отримані конкретні значення кутів поворотів коренеплоду відносно осей координат, при яких відбувається його ефективно вилучення з ґрунту, а саме, кути Ейлера набувають наступних значень:  $\varphi = 10^\circ$ ,  $\psi = 9^\circ$ ,  $\theta = 7^\circ$ .*

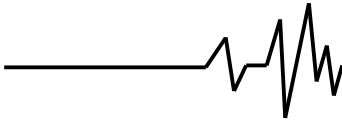
**Ключові слова:** *вібраційний процес, коренеплід, рівняння Ейлера, сферичний рух, диференціальні рівняння, розв'язок, моделювання.*

**Постановка проблеми.** Нові дослідження технологічних процесів та розробка вдосконалених робочих органів для викопування коренеплодів з ґрунту є актуальною задачею галузі буряківництва, оскільки саме збирання коренеплодів є однією з найбільш трудомістких та енергомістких його операцій. Застосування при викопуванні коренеплодів з ґрунту вібраційних зусиль обумовлює найменші затрати енергії на руйнування ґрунту, що оточує коренеплоди, і сприяє меншим їх втратам та пошкодженню при збиранні. Тому саме цей технологічний процес потребує докладного аналітичного дослідження

та подальшої розробки і впровадження вдосконалених вібраційних викопуючих робочих органів.

**Аналіз досліджень і публікацій.** Першим аналітичним дослідженням процесу вібраційного викопування коренеплодів цукрових буряків слід вважати роботу [1], проте моделі вібраційного вилучення коренеплоду з ґрунту тут не приведено.

Подальші аналітичні дослідження коливань тіла коренеплоду, закріпленого у ґрунті, було опубліковано у праці [2]. Однак, безпосередньо процес вилучення цукрових буряків з ґрунту, як вказано в цій роботі,



досліджується за додатково складеними рівняннями кінестатики, які дозволили знайти умови повного його вилучення з ґрунту.

В роботі [3] побудовано функціонал Остроградського – Гамільтона, що описує вільні поперечні коливання тіла коренеплоду, закріпленого нижнім кінцем у ґрунті, в разі, коли збурювальні сили прикладені до нього у поперечно-горизонтальній площині.

У ґрунтовній аналітичній праці [4] прийняті основні положення і допущення, що наведені у попередніх роботах [2, 3]. Однак, моделі вібраційного викопування коренеплоду цукрового буряку з ґрунту тут також не наведено.

Подальші розробки теорії вібраційного викопування коренеплодів при наданні їм збурювальних зусиль саме у повздовжньо-вертикальній площині були представлені у праці [5]. Однак, у подальшому виникає необхідність окремо розглянути динамічну систему коренеплід – викопуючий робочий орган з метою дослідження як процесу коливань коренеплоду у ґрунті так і його безпосереднього вилучення з ґрунту як твердого тіла, що відбувається під дією вібраційного викопуючого робочого органу, що здійснює коливання у повздовжньо-вертикальній площині та внаслідок його поступального руху. Аналіз зарубіжних джерел [7-10] показує, що дослідженню нових технологічних процесів збирання цукрових буряків приділяється суттєва увага.

**Мета дослідження.** Побудувати математичну модель безпосереднього вилучення коренеплодів з ґрунту при вібраційному викопуванні.

**Предмет дослідження.** Перейдемо до докладного теоретичного дослідження першого етапу вилучення коренеплоду, коли коренеплід ще міцно зв'язаний з ґрунтом.

У цьому випадку коренеплід при захваті його вібраційним викопуючим робочим органом, почне здійснювати коливальний рух у ґрунті як тверде тіло у пружному середовищі, оскільки на цьому етапі ґрунт, що оточує коренеплід, можна вважати пружним середовищем.

Зв'яжемо з вібраційним викопуючим робочим органом прямокутну декартову систему координат  $O_1x_1y_1z_1$ , центр  $O_1$  якої знаходиться посередині звуженого русла копача, вісь  $O_1x_1$  співпадає з напрямком поступального руху копача, вісь  $O_1z_1$  має напрямок вгору, а вісь  $O_1y_1$  спрямована у правий бік копача (рис. 1). Дані коливання необхідно розглядати відносно даної нерухомої

системи координат  $O_1x_1y_1z_1$ . Введемо рухому систему координат  $Oxyz$ , жорстко зв'язану з коренеплодом, початок якої знаходиться в точці закріплення  $O$ , вісь  $Oz$  напрямлена вздовж осі симетрії коренеплоду, осі  $Ox$  і  $Oy$  розташовані у площині, перпендикулярній осі  $Oz$  (див. рис. 1).

Крім того, для опису поворотів коренеплоду відносно точки закріплення  $O$  необхідно ввести ще одну прямокутну декартову систему координат  $O_2x_2y_2z_2$ , як це показано на рис. 1.

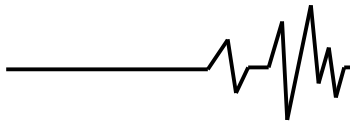
Оскільки під час захвату коренеплоду вібраційним викопуючим робочим органом останній рухається поступально у напрямку осі  $O_1x_1$  ( $O_1x_2$ ), то коренеплід відхилиться від вертикального положення (від осі  $Oz_2$ ) на деякий кут  $\psi$  по ходу руху копача. Крім того, в загальному випадку, захват коренеплоду робочим органом може бути несиметричним. Якщо один з лемешів здійснить безпосередній контакт з коренеплодом, а другий – через деякий шар розпушеного ґрунту, то, внаслідок деформації даного шару ґрунту, коренеплід відхилиться від вертикального положення в поперечному напрямку на деякий кут  $\theta$ .

До того ж, внаслідок різниці крутних моментів з боку безпосереднього контакту коренеплоду з одним лемешем та з боку контакту з другим лемешем через деякий шар ґрунту, може здійснюватись поворот коренеплоду на деякий кут  $\varphi$  навколо осі  $Oz$ .

Отже, коренеплід здійснює поворот навколо деякої лінії  $OH$  (лінії вузлів) на кут  $\theta$ , поворот навколо осі  $Oz_2$  на кут  $\psi$  та поворот навколо осі  $Oz$  на кут  $\varphi$ .

Таким чином, введені кути повороту коренеплоду під час вилучення є кутами Ейлера, причому кут  $\theta$  має назву кута нутації, кут  $\psi$  – кута прецесії, кут  $\varphi$  – кута власного обертання (повороту).

Оскільки тіло коренеплоду має конусоподібну форму, то при опусканні робочого органу вниз на коренеплід перестає діяти збурююча сила, а тому коренеплід, внаслідок пружності оточуючого його попереду ґрунту і пружності власного тіла, намагатиметься повернутися у вертикальне положення рівноваги. При наступному захваті вказаний процес повторюється.



Отже коренеплід буде здійснювати коливання навколо лінії вузлів  $OH$ , навколо осі  $Oz_2$  та навколо осі  $Oz$ . Таким чином, коливання коренеплоду на першому етапі вилучення складаються з повздовжніх лінійних коливань точки  $O$  закріплення коренеплоду у ґрунті та кутових коливань коренеплоду відносно точки  $O$ , що описуються зміною кутів Ейлера  $\theta$ ,  $\psi$  і  $\varphi$ .

Складемо еквівалентну схему взаємодії коренеплоду з робочими поверхнями вібраційного викопуючого робочого органу на першому етапі вилучення. Для чого представимо вібраційний викопуючий робочий орган у вигляді двох клинів  $A_1B_1C_1$  і  $A_2B_2C_2$ , кожний з яких у просторі має нахил під кутами  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  і які встановлено таким чином один до одного, що утворюється робоче русло, задня

частина якого звужується (рис. 1). Вказані клини здійснюють коливальні рухи в повздовжньо-вертикальній площині. Проекції точок  $B_1$  і  $B_2$  на вісь  $O_1y_1$  позначимо точками  $D_1$  і  $D_2$  відповідно.

Вважаємо, що з поверхнями клинів  $A_1B_1C_1$  і  $A_2B_2C_2$  у відповідних точках взаємодіє коренеплід, який апроксимується тілом конусоподібної форми, причому в загальному випадку захват коренеплоду робочим органом може бути несиметричним. Це зумовлено тим, що вісь симетрії коренеплоду (вісь  $Oz$ ) може бути дещо зміщеною у бік відносно осі рядка. Вважаємо, що перед початком безпосереднього контакту коренеплоду з робочим органом вісь  $Oz$  паралельна осі  $O_1z_1$ .

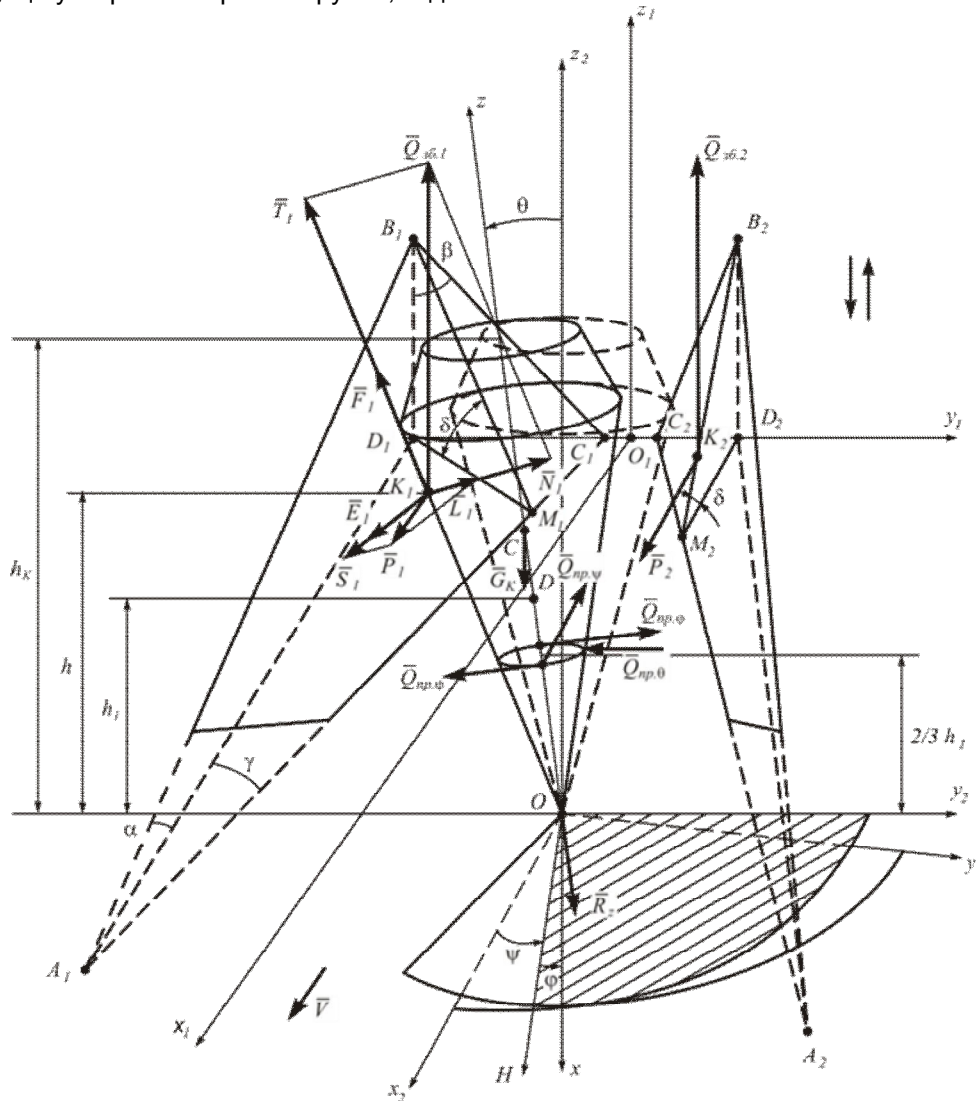
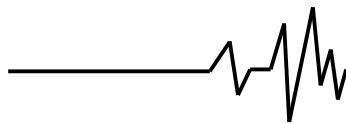


Рис. 1. Еквівалентна схема силової взаємодії при сферичному русі коренеплоду навколо умовної точки його закріплення у ґрунті



Припускаємо далі, що робоча поверхня клина  $A_1B_1C_1$  здійснює безпосередній контакт з коренеплодом у точці  $K_1$ , а поверхня  $A_2B_2C_2$  – через деякий шар ґрунту у точці  $K_2$  (рис. 1). Звичайно, в точці  $K_2$  контакт відбувається по деякій площинці ґрунту, що оточує точку  $K_2$ , проте  $K_2$  будемо вважати точкою прикладання сил, що діють з боку лемешів через шар ґрунту на коренеплід. Прямі, проведені через точки  $B_1$  і  $B_2$  перпендикулярно до сторін клинів  $A_1C_1$  і  $A_2C_2$  відповідно, утворюють на перетині з зазначеними сторонами клинів відповідні точки  $M_1$  і  $M_2$ . Таким чином,  $\delta$  – це двогранний кут ( $\angle B_1M_1D_1$ ) між нижньою основою  $A_1D_1C_1$  та робочою поверхнею клина  $A_1B_1C_1$  а також двогранний кут ( $\angle B_2M_2D_2$ ) між нижньою основою  $A_2D_2C_2$  та робочою поверхнею клина  $A_2B_2C_2$ .

Покажемо сили, які виникають внаслідок взаємодії коренеплоду з вібраційним робочим органом.

Нехай від вібраційного робочого органу діє вертикальна збуруюча сила  $\overline{Q}_{зб.}$ , яка змінюється за гармонічним законом такого вигляду:

$$\overline{Q}_{зб.} = H \sin \omega t, \quad (1)$$

де  $H$  – амплітуда збуруючої сили;  $\omega$  – частота збуруючої сили.

Дана сила відіграє основну роль у процесі розпушування ґрунту в зоні робочого русла копача та вилучення коренеплоду. Зазначена збуруюча сила  $\overline{Q}_{зб.}$  прикладається до коренеплоду з двох його боків, а тому на схемі вона представлена двома складовими  $\overline{Q}_{зб.1}$  та  $\overline{Q}_{зб.2}$ , які очевидно будуть дорівнювати:

$$\overline{Q}_{зб.1} = \overline{Q}_{зб.2} = \frac{1}{2} H \sin \omega t. \quad (2)$$

Для подальших досліджень необхідно проаналізувати зв'язок між коливальним рухом вібраційного робочого органу та дією при цьому збуруючої сили  $\overline{Q}_{зб.}$  на коренеплід. Цей аналіз достатньо провести для одного періоду коливань, від  $\omega t = 0$  до  $\omega t = 2\pi$ . Для всіх

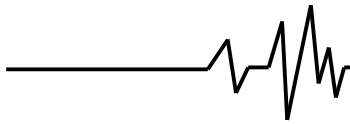
інших періодів процес буде повторюватись. Як зазначалось вище, збуруюча сила  $\overline{Q}_{зб.}$  діє на коренеплід лише тоді, коли робочий орган рухається вгору від свого найнижчого положення до свого найвищого положення.

Отже, при русі робочого органу вгору на відріжку  $[0, \pi]$  збуруюча сила  $\overline{Q}_{зб.}$  діє на коренеплід згідно синусоїдального закону (1).

При цьому на відріжку  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  вона зростає від нульового значення  $\overline{Q}_{зб.} = 0$  у точці  $\omega t = 0$ , до максимального значення  $\overline{Q}_{зб.} = H$  у точці  $\omega t = \frac{\pi}{2}$ .

На відріжку  $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  вона спадає від максимального значення  $\overline{Q}_{зб.} = H$  до мінімального  $\overline{Q}_{зб.} = 0$ . На відріжку  $[\pi, 2\pi]$  робочий орган рухається вниз, а тому на цьому відріжку збуруюча сила  $\overline{Q}_{зб.}$  на коренеплід не діє, а отже, дорівнює нулю. На відріжку  $[2\pi, 4\pi]$  все повторюється спочатку. Таким чином у загальному випадку, на відрізках  $[2k\pi, (2k+1)\pi], k = 0, 1, 2, \dots$ , збуруюча сила  $\overline{Q}_{зб.}$  діє на коренеплід за синусоїдальним законом (1), а на відрізках  $[(2k-1)\pi, 2k\pi], k = 1, 2, \dots$ , вона на коренеплід не діє, тобто дорівнює нулю.

Оскільки різкі кромки  $A_1C_1$  і  $A_2C_2$  лемешів знаходяться нижче точок контакту  $K_1$  і  $K_2$ , то в зоні захвату коренеплоду робочим органом ґрунт буде уже досить розпушеним, адже розпушування ґрунту в першу чергу відбувається в передній частині робочого русла копача, а безпосередній контакт коренеплоду з робочим органом – у середній і задній частинах робочого русла копача. Таким чином, при несиметричному захваті коренеплоду в точці контакту  $K_1$  на коренеплід безпосередньо діє збуруюча сила  $\overline{Q}_{зб.1}$ , а в точці контакту  $K_2$  збуруюча сила  $\overline{Q}_{зб.2}$  діє тільки на шар розпушеного ґрунту і тому вважаємо, що ця сила на коренеплід майже не передається, оскільки зусилля може передаватись лише через досить пружне середовище. Отже, при першому захваті в даному випадку дією сили



$\bar{Q}_{зб.2}$  на коренеплід можна знехтувати і вважати, що на коренеплід діє лише збуруюча сила  $\bar{Q}_{зб.1}$  з боку поверхні  $A_1B_1C_1$ .

Несиметричний захват коренеплоду цікавий тим, що при ньому можливий поворот коренеплоду навколо своєї осі, що сприяє інтенсивному руйнуванню зв'язків коренеплоду з ґрунтом (ефект вертіння коренеплоду у ґрунті при його вилученні). Отже, при несиметричному захваті коренеплоду робочим органом у диференціальних рівняннях руху коренеплоду буде враховуватись лише силова дія з боку робочої поверхні  $A_1B_1C_1$  клина. З цією метою розкладемо силу  $\bar{Q}_{зб.1}$  на дві складові: нормальну  $\bar{N}_1$  до поверхні  $A_1B_1C_1$  та дотичну  $\bar{T}_1$  до цієї поверхні, як це показано на рис. 1. Отже ця сила буде дорівнювати:

$$\bar{Q}_{зб.1} = \bar{N}_1 + \bar{T}_1. \quad (3)$$

Очевидно, що вектор сили  $\bar{T}_1$  напрямлений паралельно прямій  $B_1M_1$ .

Оскільки вібраційний викопуючий робочий орган рухається поступально у напрямку осі  $O_1x_1$  відносно коренеплоду, який закріплений у ґрунті, то в напрямку поступального руху (осі  $O_1x_1$ ) діє рушійна сила  $\bar{P}_1$ , яка у момент захвату коренеплоду робочим органом також діє на коренеплід у напрямку заданої осі. Розкладемо також силу  $\bar{P}_1$  на дві складові: нормальну  $\bar{L}_1$  до поверхні клина  $A_1B_1C_1$  і дотичну  $\bar{S}_1$  до цієї поверхні, тобто:

$$\bar{P}_1 = \bar{L}_1 + \bar{S}_1. \quad (4)$$

Таким чином, у точці контакту  $K_1$  на коренеплід з боку клина  $A_1B_1C_1$  діє сила, що дорівнює

$$\bar{N}_{K_1} = \bar{N}_1 + \bar{L}_1, \quad (5)$$

яка напрямлена по нормалі до поверхні клина  $A_1B_1C_1$ .

Очевидно, що величина цієї сили дорівнює:

$$N_{K_1} = N_1 + L_1. \quad (6)$$

Крім того, у точці контакту  $K_1$  діє сила тертя  $\bar{F}_{K_1}$ , яка протидіє проковзуванню

коренеплоду по робочій поверхні клина  $A_1B_1C_1$  під час його захвату вібраційним робочим органом. Вектор цієї сили спрямований протилежно вектору відносної швидкості проковзування клина по поверхні коренеплоду. У центрі ваги коренеплоду діє сила ваги коренеплоду  $\bar{G}_k$ . Дотична складова  $\bar{T}_1$  збуруючої сили  $\bar{Q}_{зб.1}$  і дотична складова  $\bar{S}_1$  рушійної сили  $\bar{P}_1$  безпосередньо на коренеплід не діють, вони лише викликають розпушування ґрунту навколо коренеплоду, а отже в диференціальні рівняння руху коренеплоду як твердого тіла входити не будуть. Тоді є можливість отримати зі схеми рис. 1 вирази для визначення нормальної  $\bar{N}_1$  та дотичної  $\bar{T}_1$  складової збуруючої сили  $\bar{Q}_{зб.1}$ , а також вирази для визначення нормальної  $\bar{L}_1$  та дотичної  $\bar{S}_1$  складових рушійної сили  $\bar{P}_1$ .

Однак сили, які виникають внаслідок деформації ґрунту, як пружного середовища, при переміщенні в ньому коренеплоду треба визначити. Можемо показати, що момент пружної деформації ґрунту від повороту коренеплоду на кут  $\varphi$  буде дорівнювати:

$$M_{np.\varphi} = -\frac{c_1 h_1^3 \varphi \sin^2 \gamma_k}{3 \cos^3 \gamma_k}, \quad (7)$$

де  $c_1$  – коефіцієнт пружної деформації ґрунту, який показує, наскільки зростає зусилля на поверхні контакту при зміщенні поверхні контакту на одиницю площі контакту, Н/м<sup>2</sup>.

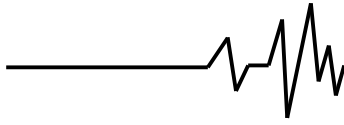
Також можна довести, що сили пружності ґрунту, які виникають при поворотах закріпленого у ґрунті коренеплоду навколо осі  $Oz_2$  на кут  $\psi$  –  $\bar{Q}_{np.\psi}$  та навколо лінії вузлів  $OH$  на кут  $\theta$  –  $\bar{Q}_{np.\theta}$ , відповідно дорівнюють:

$$Q_{np.\psi} = \frac{c\pi h_1^3 \sin \gamma_k \psi}{3 \cos^3 \gamma_k}. \quad (8)$$

$$Q_{np.\theta} = \frac{c\pi h_1^3 \sin \gamma_k \theta}{3 \cos^3 \gamma_k}, \quad (9)$$

де  $c$  – коефіцієнт пружної деформації ґрунту (відношення першого коефіцієнта Вінклера до площі контакту), Н/м<sup>3</sup>.

Очевидно, що вектори  $\bar{Q}_{np.\psi}$  і  $\bar{Q}_{np.\theta}$  напрямлені по нормалі до поверхні



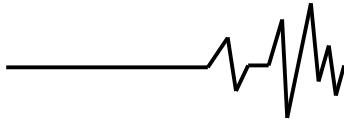
коренеплоду. Зусилля, які визначені за виразами (7-9) відіграють роль відновлювальних сил у коливальному процесі, який розглядається.

Перейдемо далі до складання диференціальних рівнянь сферичного руху коренеплоду як твердого тіла при несиметричному захваті коренеплоду вібраційним викопуючим робочим органом. В даному випадку коренеплід буде рухатись як тверде тіло з однією нерухомою точкою. Зазначений рух визначається зміною вище згаданих кутів Ейлера  $\varphi$ ,  $\psi$  і  $\theta$  під дією розглянутих сил, що діють на коренеплід, і описується за допомогою динамічних і кінематичних рівнянь Ейлера. Якщо рухома система координат  $Oxyz$  вибрана таким

чином, щоб координатні осі були головними осями інерції для точки  $O$ , що в даному випадку має місце, то динамічні рівняння Ейлера мають більш простий вигляд [6].

Із силової схеми (рис. 1) визначаємо моменти усіх зовнішніх сил, що діють на коренеплід під час його захвату вібраційним викопуючим робочим органом, відносно осей  $Ox$ ,  $Oy$  і  $Oz$ . Після підстановки необхідних осьових моментів інерції та отриманих значень головних моментів усіх зовнішніх сил у систему диференціальних рівнянь [6] отримаємо наступну систему диференціальних рівнянь просторових коливань коренеплоду, закріпленого у ґрунті, у формі динамічних і кінематичних рівнянь Ейлера:

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 & (0,48 + 0,15tg^2\gamma_k) m_k h_k^2 \frac{d\omega_x}{dt} + (0,15tg^2\gamma_k + 0,52) m_k h_k^2 \omega_y \omega_z = \left[ -P_1 (htg\gamma_k - h\theta) - \right. \\
 & -f(0,5H \cos \delta \sin \omega t + P_1 \sin \gamma) \cos(\alpha_{K_1 \max} \sin \omega t - \gamma) (htg\gamma_k - h\theta) + \\
 & \left. + \frac{c\pi h_1^4 \sin \gamma_k \theta \psi (\cos(\gamma_k - \theta) + \cos(\gamma_k + \psi))}{4 \cos^3 \gamma_k} \right] \sin \theta \sin \varphi + \left[ -0,5Hh t g \gamma_k \sin \omega t + \right. \\
 & + hP_1 \sin \psi + f(0,5H \cos \delta \sin \omega t + P_1 \sin \gamma) \cos(\alpha_{K_1 \max} \sin \omega t - \gamma) \sin \psi h + \\
 & \left. + \frac{2}{3} G_k h_k \theta - \frac{c\pi h_1^4 \sin \gamma_k \theta \cos \psi}{4 \cos^3 \gamma_k} \right] \cos \varphi, \\
 & (0,48 + 0,15tg^2\gamma_k) m_k h_k^2 \frac{d\omega_y}{dt} + (0,48 - 0,15tg^2\gamma_k) m_k h_k^2 \omega_z \omega_x = \\
 & = \left[ -P_1 (htg\gamma_k - h\theta) - f(0,5H \cos \delta \sin \omega t + P_1 \sin \gamma) \cos(\alpha_{K_1 \max} \sin \omega t - \gamma) \times \right. \\
 & \left. \times (htg\gamma_k - h\theta) + \frac{c\pi h_1^4 \sin \gamma_k \theta \psi (\cos(\gamma_k - \theta) + \cos(\gamma_k + \psi))}{4 \cos^3 \gamma_k} \right] \sin \theta \cos \varphi - \\
 & - \left[ -0,5Hh t g \gamma_k \sin \omega t + hP_1 \sin \psi + f(0,5H \cos \delta \sin \omega t + P_1 \sin \gamma) \times \right. \\
 & \left. \times \cos(\alpha_{K_1 \max} \sin \omega t - \gamma) \sin \psi h + \frac{2}{3} G_k h_k \theta - \frac{c\pi h_1^4 \sin \gamma_k \theta \cos \psi}{4 \cos^3 \gamma_k} \right] \sin \varphi, \\
 & 0,3m_k h_k^2 tg^2\gamma_k \frac{d\omega_z}{dt} = hP_1 \cos \theta t g \gamma_k + f(0,5H \cos \delta \sin \omega t + P_1 \sin \gamma) \cos(\alpha_{K_1 \max} \sin \omega t - \gamma) \times \\
 & \times \cos \theta t g \gamma_k h - \frac{c_1 h_1^3 \varphi \sin^2 \gamma_k}{3 \cos^3 \gamma_k} + \left[ P_1 (htg\gamma_k - h\theta) + f(0,5H \cos \delta \sin \omega t + P_1 \sin \gamma) \times \right. \\
 & \left. \times \cos(\alpha_{K_1 \max} \sin \omega t - \gamma) (htg\gamma_k - h\theta) - \frac{c\pi h_1^4 \theta \psi \sin \gamma_k (\cos(\gamma_k - \theta) + \cos(\gamma_k + \psi))}{4 \cos^3 \gamma_k} \right] \cos \theta, \\
 & \omega_x = -\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi - \dot{\theta} \cos \varphi, \\
 & \omega_y = -\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi + \dot{\theta} \sin \varphi, \\
 & \omega_z = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi},
 \end{aligned}
 \right\} \quad (10)
 \end{aligned}$$



Одержана система (10) диференціальних рівнянь просторових коливань коренеплоду, що здійснюються під дією збуруючої сили, має замкнений вигляд і дає можливість багатоваріантного моделювання процесу вилучення коренеплоду з ґрунту для різних умов викопування, оскільки містить параметри вібраційного викопуючого робочого органу, коренеплоду й оточуючого ґрунту. Розв'язок цієї системи диференціальних рівнянь дає можливість визначити закон просторових коливань коренеплоду навколо умовної точки закріплення у ґрунті, тобто функції  $\varphi = \varphi(t)$ ,  $\psi = \psi(t)$  і  $\theta = \theta(t)$ . Як показують розрахунки на ПЕОМ в середовищі Mathcad за таких вихідних даних: маса коренеплоду  $m_k = 0,9$  кг; маса оточуючого коренеплід ґрунту  $m_{гр.} = 0,4$  кг; довжина коренеплоду  $h_k = 0,25$  м; кути тригранних клинів вібраційного викопуючого органу:  $\gamma = 14^\circ$ ;  $\beta = 52^\circ$ ; коефіцієнт тертя сталі по поверхні коренеплоду  $f = 0,45$ ; амплітуда збуруючої сили  $H = 500$  Н; величина бокової рушійної сили  $P_1 = 400$  Н; максимальний кут відхилення вектора сили тертя від вектора мінімального значення цієї сили  $\alpha_{K_1 \max} = 30^\circ$ ; частота коливань викопуючих лемешів  $v = 10$ ; кут  $\gamma_k = 15^\circ$ ; коефіцієнти пружності ґрунту  $c = 3 \cdot 10^5$  Н/м<sup>3</sup>,  $c_1 = 2 \cdot 10^5$  Н/м<sup>2</sup>; поточний час  $t = 0,025$  (с) кути Ейлера набувають наступних значень  $\varphi = 10^\circ$ ,  $\psi = 9^\circ$ ,  $\theta = 7^\circ$ .

Слід також відмітити, що система диференціальних рівнянь (10) описує окрім просторового коливального процесу ще й поворот коренеплоду навколо власної осі (ефект вертіння), що особливо впливає на процес руйнування зв'язків коренеплоду з ґрунтом на першому етапі вилучення. Результати даних аналітичних досліджень були використані при проектуванні та конструюванні нових вібраційних викопуючих робочих органів бурякозбиральних машин [11].

### Висновки

1. Побудована нова математична модель вібраційного вилучення коренеплоду з ґрунту з застосуванням теорії руху тіла навколо нерухомої точки.

2. Застосовуючи вихідні кінематичні і динамічні рівняння Ейлера, складена система диференціальних рівнянь коливань коренеплоду при вібраційному його викопуванні для випадку, коли коренеплід взаємодіє з одним клином вібраційного викопуючого робочого органу у одній його точці.

3. На підставі розв'язку системи диференціальних рівнянь Ейлера в середовищі

Mathcad отримані конкретні значення кутів повороту коренеплоду відносно осей координат, при яких відбувається його ефективно вилучення з ґрунту.

4. Дана математична модель дає можливість багатоваріантного моделювання процесу вилучення коренеплоду з ґрунту для різних умов викопування.

### Список використаних джерел

1. Дубровский А.А. Вибрационная техника в сельском хозяйстве. – М.: Машиностроение, 1968. – 204 с.

2. Василенко П.М., Погорельый Л.В., Брей В.В. Вибрационный способ уборки корнеплодов // Механизация и электрификация социалистического сельского хозяйства, 1970, №2. – С. 9-13.

3. Брей В.В. Исследование и разработка механизированного процесса извлечения из почвы корней сахарной свеклы. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. – К.: УСХА, 1972. – 196 с.

4. Свеклоуборочные машины (конструирование и расчёт) // Л.В. Погорельый, Н.В. Татьяна, В.В. Брей и др.; Под общ. ред. Л.В. Погорелого. – К.: Техніка, 1983. – 168 с.

5. Булгаков В.М., Головач І.В. Теорія вібраційного викопування коренеплодів. – Механізація сільськогосподарського виробництва: Збірник наукових праць національного аграрного університету. Том XV, К.: НАУ. – 2003. – С. 45-85.

6. Головач І.В. Механіко-технологічне обґрунтування вібраційного викопування коренеплодів: дис. на здобуття наук. ступеня докт. техн. наук: спец. 05.05.11 / І.В. Головач. – К.: НУБіП України, 2010. – 536 с.

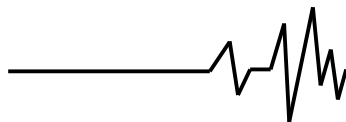
7. Zuckerrüben: Erntetechnik und Bodenschutz / FAT-Berichte Nr. 567 // Eidgenössische Forschungsanstalt für Agrarwirtschaft und Landtechnik (FAT), CH-8356 Tänikon TG – 2001 S. 1–19.

8. Roller O. Entblatten statt Köpfen / Dr. Olaf Roller // Zuckerrüben Journal № 2 // Rheinischer Landwirtschafts-Verlag GmbH. – 2010, S. 14–15.

9. Merkes R. 50 Jahre Produktionstechnik im Zuckerrübenbau in Deutschland / R. Merkes // Zuckerrübe. – 2001, № 4. – S. 214 - 217.

10. Es geht um den Kopf / Zuckerrüben Journal №3 // Rheinischer Landwirtschafts-Verlag GmbH, – 2010, S. 7 - 8.

11. Булгаков В.М. Бурякозбиральні машини. – К.: Аграрна наука, 2011. – 352 с.

**Список источников в транслитерации**

1. Dubrovskiy A.A. Vibratsionnaya tekhnika v sel'skom khozyaystve. – M.: Mashinostroyeniye, 1968. – 204 s.
2. Vasilenko P.M., Pogorelyy L.V., Brey V.V. Vibratsionnyy sposob uborki korneplodov // Mekhanizatsiya i Elektrifikatsiya sotsialisticheskogo selskogo khozyaystva, 1970, №2. – S. 9–13.
3. Brey V.V. Issledovaniye i razrabotka mekhanizirovanno protsessa izvlecheniya iz pochvy korney sakharnoy svekly. Dissertatsiya na Soiskaniye uchenoy stepeni kandidata tekhnicheskikh nauk. – K.: USKHA, 1972 – 196 s.
4. sveklouborochnyye mashiny (konstruirovaniye i raschot) // L.V. Pogorelyy, N.V. Tatyanka, V.V. Brey i dr.; Pod obshch. red. L.V. Pogorelogo. – K.: Tekhnika, 1983. – 168 s.
5. Bulhakov V.M., Holovach I.V. Teoriya vibratsiynoho Vykopuvannya koreneplodiv. – Mekhanizatsiya silskohospodarskoho vyrobnytstva: Zbirnyk naukovykh prats natsionalnoho ahrarnoho unyversyteta. Tom XV, K.: NAU. – 2003. – S. 45–85.
6. Holovach I.V. Mekhaniko-tekhnolohichne obgruntuvannya vibratsiynoho Vykopuvannya koreneplodiv: dys. na zdobuttya nauk. shchabel dokt. tekhn. nauk: spets. 05.05.11 / I.V. Holovach. – Do.: NUBiP Ukrainy, 2010. – 536 s.
7. Zuckerrüben: Erntetechnik und Bodenschutz/ FAT-Berichte Nr. 567 // Eidgenössische Forschungsanstalt für Agrarwirtschaft und Landtechnik (FAT), CH-8356 Tänikon TG – 2001 S. 1–19.
8. Roller O. Entblättern statt Köpfen / Dr. Olaf Roller // Zuckerrüben Journal № 2 // Rheinischer Landwirtschafts-Verlag GmbH. – 2010, S. 14 - 15.
9. Merkes R. 50 Jahre Produktionstechnik im Zuckerrübenbau in Deutschland / R. Merkes // Zuckerrübe. – 2001, № 4. – S. 214 - 217.
10. Es geht um den Kopf / Zuckerrüben Journal №3 // Rheinischer Landwirtschafts-Verlag GmbH, – 2010, S. 7–8.
11. Bulgakov V.M. Sveklouborochnyye mashiny. – K.: Agrarnaya nauka, 2011 – 352 s.

**ТЕОРИЯ СФЕРИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА  
КОРНЕПЛОДА В УПРУГОЙ СРЕДЕ ПРИ ЕГО  
ВИБРАЦИОННОМ ВЫКАПЫВАНИИ**

**Аннотация.** В статье рассмотрен случай сферического движения тела корнеплода сахарной свеклы, когда он находится в почве, т.е. в середине упругой среды и имеет одну условную точку

закрепления. Это сферическое движение тела корнеплода обеспечивается при взаимодействии с наклонной плоскостью вибрационного выкапывающего рабочего органа, которая осуществляет колебательные движения в продольно-вертикальной плоскости. Целью данного исследования было установление значений углов поворотов тела корнеплода при ассиметричном захвате вибрационным выкапывающим рабочим органом с последующим разрушением его связей с окружающей упругой средой, т.е. Построение новой математической модели вибрационного извлечения корнеплода из почвы.

На основе использования исходных уравнений Эйлера получена новая система дифференциальных уравнений, которая дает возможность аналитически исследовать указанный технологический процесс. Полученная система дифференциальных уравнений пространственных колебаний корнеплода, которые осуществляются под действием возмущающей силы, состоит из трех динамических и трех кинематических уравнений, имеет замкнутый вид, что дает возможность численного ее решения, т.е. Моделирования процесса извлечения корнеплода из почвы для различных условий выкапывания, поскольку содержит параметры вибрационного выкапывающего рабочего органа, корнеплода и окружающей почвы.

По результатам решения на ПЭВМ полученной системы дифференциальных уравнений Эйлера в системе Mathcad получены конкретные значения углов поворотов корнеплода относительно осей координат, при которых осуществляется его эффективное извлечение из почвы, а именно, углы Эйлера имеют следующие значения:  $\varphi = 10^\circ$ ,  $\psi = 9^\circ$ ,  $\theta = 7^\circ$ .

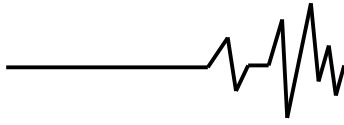
Построенная математическая модель дает возможность многовариантно моделировать процесс извлечения корнеплода из почвы для различных условий выкапывания.

**Ключевые слова:** вибрационный процесс, корнеплод, уравнения Эйлера, сферическое движение, дифференциальные уравнения, решение, моделирование.

**THEORY OF SPHERICAL BODY MOTION IN AN  
ELASTIC MEDIUM ROOT WHEN VIBRATING  
DIGGING**

**Annotation.** The article describes the case of a spherical body movement of sugar beet when it is in the soil, is in the midst of the elastic and has





a design point fixing. This spherical body movement taproot is provided in cooperation with the inclined plane vibration digs working organ that performs an oscillatory motion in the longitudinal vertical plane. The aim of this study was to establish the angles of rotation of the body with asymmetrical capture taproot digs working body vibration with subsequent destruction of its links with the surrounding elastic medium, is construction of a new mathematical model of vibration of root extract from the soil.

Based on the use of the Euler equations obtained starting a new system of differential equations, which makes it possible to analytically study the specified process. The resulting system of differential equations of root spatial oscillations, which are carried out under the influence of the disturbing force, composed of three dynamic and three kinematic equations has a closed form,

which allows a numerical solution, is modeling the process of root extraction of soil for different digging, because it contains the parameters of the vibration digs working body, root and the surrounding soil.

According to the results obtained on the PC solutions of differential equations Euler system Mathcad received specific values of root crop rotation angles about the coordinate axes in which it is carried out effective extraction of soil, namely the Euler angles acquire the following values:  $\varphi = 10^\circ$ ,  $\psi = 9^\circ$ ,  $\theta = 7^\circ$ .

Constructed mathematical model enables multivariate modeling process of root extraction from the soil digging for various conditions.

**Key words:** vibratory process, root, Euler equations, spherical movement, differential equations, solution modeling.