

Куценко А. Г.

Національний
університет
біоресурсів і
природокористування
України

Kutsenko A. G.

National University of Life
and Environmental
Sciences of Ukraine

УДК 539.3

ПРО ПОБУДОВУ ЧИСЕЛЬНОЇ СХЕМИ МЕТОДУ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ СТАЦІОНАРНИХ КОЛИВАНЬ БАЛОК ТА ПЛАСТИН

У статті проаналізовано основні методи дослідження поширення різного виду хвиль у періодичних механічних системах. Запропонована схема прямого методу граничних елементів для випадку стаціонарних коливань балок, закріплених періодичним чином. За допомогою перетворення Фур'є були отримані три розв'язки, аналіз яких показав, що лише один з них є фундаментальним. Даний розв'язок разом з граничними інтегральними співвідношеннями, які виражають значення невідомих функцій у середині області через їх значення на границі області, зводять рішення даної задачі до розв'язання системи алгебраїчних рівнянь.

Дані дослідження були поширені на випадок стаціонарних коливань пластин. Була розроблена чисельна схема прямого методу граничних елементів. Для конкретної чисельної реалізації були вибрані лінійні граничні елементи, на яких невідомі функції замінюються невідомими постійними. Записані відповідні інтегральні співвідношення методу граничних елементів. Детально продемонстрована процедура знаходження фундаментального розв'язку і коефіцієнтів впливу.

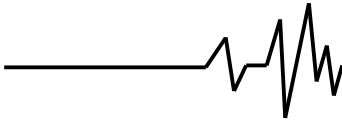
Вказані можливі шляхи використання даного методу для розв'язання задач про явище поширення хвиль згину у одновимірних і двовимірних періодичних системах.

Ключові слова: хвиля, балка, пластина, фундаментальний розв'язок, коефіцієнти впливу.

Постановка проблеми. Складність задач про поширення хвиль згину у двоякоперіодичних механічних системах змушує звернутись вчених до чисельного моделювання процесу. При розв'язуванні лінійних граничних задач перевагу останнім часом обґрунтовано надають методу граничних елементів. До основних особливостей методу граничних елементів, які вигідно відрізняють його від інших, можна віднести: зменшення на одиницю розмірності задачі, тотожне задоволення у області розв'язуючим диференціальним рівнянням, простота і універсальність чисельної схеми, яка не залежить від вигляду границі області та типу умов, заданих на ній. Для кращого розуміння схеми прямого методу граничних елементів для двовимірних задач спочатку нами буде викладена схема методу на прикладі її застосування до задач стаціонарних коливань балок.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У сучасній механіці існує багато методів дослідження поширення різного роду хвиль в періодичних механічних системах. Так дослідження поширення хвиль у періодично структурованих балках та в складених з них ґратках були систематизовані в [2] на основі методу лінійних динамічних жорсткостей, який є узагальненням відомого методу динамічних жорсткостей шляхом зміни окремих зосереджених навантажень послідовністю періодично розташованих навантажень або навантаженнями, розподіленими вздовж деякої прямої лінії.

Дослідження одновимірної та квазіодновимірної проблеми поширення хвиль у балках і платівках призвело до розробки цілого ряду аналітичних методів, серед яких відзначимо метод матриці переносу (transfer matrix method) [8], який полягає у побудові матриці, що зв'язує динамічні і кінематичні характеристики на протилежних частинах



періоду, та подальшому відшуканні сталих розповсюдження хвилі через власні значення цієї матриці, метод розкладу розв'язку за просторовими модами [6] та варіаційні методи [3], які базуються на співвідношеннях балансу енергії і є розвиненням методів Релея та Релея - Рітца.

Вказані методи у подальшому були успішно застосовані при розгляді суттєво двовимірних задач. Вони дали змогу побудувати поверхню сталого поширення в залежності від напрямку розповсюдження хвилі, яка є узагальненням дисперсійної кривої на двовимірний випадок. Проте останнє стало можливим лише за рахунок переходу від використання аналітичних методів до використання чисельно – аналітичних методів. При цьому у переважній більшості випадків для використання чисельних обчислень застосовувався метод скінченних елементів [4, 5, 7].

Проте метод скінченних елементів не можна розглядати як найкраще доповнення до аналітичних методів дослідження явища поширення хвиль в періодичних системах. Оскільки відповідні задачі є лінійними граничними задачами для диференціальних рівнянь (звичайних або в часткових похідних), то найбільш вдалим видається використання методу граничних елементів.

Мета дослідження. Розробити схему побудови прямого методу граничних елементів для дослідження стаціонарних коливань балок та поширити дослідження на аналогічний випадок для пластин.

Результати досліджень. Для побудови схеми прямого методу граничних елементів необхідно знати, так званий, фундаментальний розв'язок відповідного диференціального рівняння (або системи рівнянь) у частинних похідних. Фізично такий розв'язок відповідає функції впливу. Для задачі механіки суцільного середовища – це поле переміщень (швидкостей), викликаних одиничною зосередженою силою у необмеженому просторі. З математичної точки зору фундаментальний розв'язок є розв'язком відповідного диференціального рівняння, у якого права частина є дельта-функцією Дірака.

У нашому випадку фундаментальний розв'язок $w^*(x)$ має задовольняти рівняння:

$$\frac{d^4 w^*(x)}{dx^4} - p^4 w^*(x) = -\frac{\delta}{EJ}. \quad (1)$$

Для знаходження $w^*(x)$ використаємо інтегральне перетворення Фур'є:

$$W^*(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} w^*(x) e^{-i\alpha x} dx. \quad (2)$$

В результаті застосування теореми про диференціювання оригіналу, отримуємо:

$$(\alpha^4 - p^4) W^*(\alpha) = -\frac{1}{EJ}. \quad (3)$$

При виводі (3) було використано основну інтегральну властивість дельта – функції:

$$\int_a^b f(x) \delta(x) dx = f(0), \quad a < 0 < b, \quad (4)$$

та вважали, що сама функція $w^*(x)$ та перші три її похідні стають як завгодно малими за модулем, коли $|x| \rightarrow \infty$.

Знаходження розв'язку алгебраїчного рівняння (3) не становить жодних проблем:

$$W^*(\alpha) = -\frac{1}{EJ} \frac{1}{\alpha^4 - p^4}. \quad (5)$$

Найбільш суттєві труднощі виникають на останньому етапі – етапі переходу від зображення до оригіналу:

$$\begin{aligned} w^*(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W^*(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha = \\ &= \frac{1}{4\pi p^2 EJ} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{\alpha^2 - p^2} d\alpha - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{\alpha^2 + p^2} d\alpha \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Знайдемо другий у правій частині (6) інтеграл:

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{\alpha^2 + p^2} d\alpha, \quad (7)$$

причому для визначеності будемо вважати, що $x > 0$.

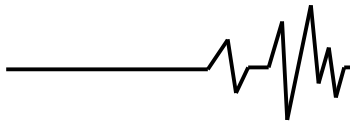
Після застосування техніки контурного інтегрування отримуємо:

$$\frac{I_{2L}}{2\pi i} = \operatorname{Res}_{\alpha=ip} \frac{e^{i\alpha x}}{\alpha^2 + p^2} = \frac{e^{-px}}{2ip}. \quad (8)$$

Таким чином,

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{\alpha^2 + p^2} d\alpha = \frac{\pi}{p} e^{-px}, \quad x > 0. \quad (9)$$

У випадку, коли $x < 0$, отримуємо:



$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{\alpha^2 + p^2} d\alpha = \frac{\pi}{p} e^{px}, x < 0. \quad (10)$$

Вирази (10) та (11) можна поєднати в один для довільних значень x :

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{\alpha^2 + p^2} d\alpha = \frac{\pi}{p} e^{-p|x|}. \quad (11)$$

$$I_{1L} = \oint_L \frac{e^{i\alpha x}}{\alpha^2 - p^2} d\alpha = \int_{-R}^{-p+\varepsilon} \frac{e^{i\alpha x}}{\alpha^2 + p^2} d\alpha + \int_{-p-\varepsilon}^{p-\varepsilon} \frac{e^{i\alpha x}}{\alpha^2 + p^2} d\alpha + \int_{p+\varepsilon}^R \frac{e^{i\alpha x}}{\alpha^2 + p^2} d\alpha + \int_{C_R} \frac{e^{i\alpha x}}{\alpha^2 + p^2} d\alpha + \int_{C_-} \frac{e^{i\alpha x}}{\alpha^2 + p^2} d\alpha + \int_{C_+} \frac{e^{i\alpha x}}{\alpha^2 + p^2} d\alpha. \quad (13)$$

Переходячи у (13) до границі при $\varepsilon \rightarrow 0$ та $R \rightarrow \infty$ і враховуючи, що при цьому як і у попередньому випадку зникає інтеграл по півколу радіуса R , а у області, обмеженій контуром, відсутні полюси, остаточно отримуємо:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{\alpha^2 - p^2} d\alpha = -\frac{\pi}{p} \sin px, x > 0. \quad (14)$$

Провівши аналогічні міркування для $x < 0$, у загальному випадку отримуємо:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{\alpha^2 - p^2} d\alpha = -\frac{\pi}{p} \sin p|x|. \quad (15)$$

Таким чином, шуканий фундаментальний розв'язок є:

$$w^*(x) = \frac{1}{4p^3 EJ} (\sin p|x| + e^{-p|x|}). \quad (16)$$

Цікаво відмітити той факт, що розв'язок (16) не є єдиним можливим розв'язком рівняння (1). Якщо ввести у систему малі сили внутрішнього опору, поклавши $p = -p_R - ip_I$, $p_R \gg ip_I > 0$, то контур у обмеженому перетворенні Фур'є для інтеграла I_{1L} буде повністю охоплювати полюс $\alpha = -p_R + ip_I$, а полюс $\alpha = p_R - ip_I$ буде знаходитись у зовні від нього.

Тоді, спрямовуючи $p_I \rightarrow 0$, отримуємо:

Підінтегральна функція у першому інтегралі в правій частині (6):

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{\alpha^2 - p^2} d\alpha \quad (12)$$

утримує полюси $\alpha = \pm p$, які знаходяться на дійсній осі.

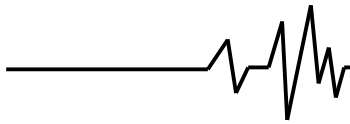
$$w^*(x) = \frac{1}{4p^3 EJ} (ie^{-ip|x|} + e^{-p|x|}). \quad (17)$$

Аналогічно, покладаючи $p = p_R + ip_I$, а потім роблячи граничний перехід $p_I \rightarrow 0$, знаходимо:

$$w^*(x) = \frac{1}{4p^3 EJ} (e^{-p|x|} - ie^{-ip|x|}). \quad (18)$$

Усі три розв'язки (16) – (18) мають право на існування. Враховуючи залежність всіх характеристик від часу у вигляді $e^{-i\omega t}$, (18) відповідає хвилі, викликаній одиничною перерізуючою силою, яка поширюється на нескінченність від точки прикладання сили $x = 0$. Розв'язок (17) відповідає хвилі, що біжить з нескінченності, а „дійсний” розв'язок (16) є суперпозиція розв'язків (17) і (18). Зрозуміло, що там, де це можна, доцільно використовувати розв'язок (16). Проте при чисельній реалізації іноді трапляються ситуації, коли використання (16) призводить до значного зростання похибки обчислень. У такому разі слід звертатися до фізичного розв'язку (18).

Граничні інтегральні співвідношення, які виражають значення невідомих функцій у середині області через їх значення на границі області (аналог потенціалів простого та подвійного шару у теорії потенціалу), загалом виводять на основі варіаційних теорем типу теореми про взаємність робіт. Проте, у даному одновимірному випадку звертатися до них не має потреби. Значно простіше використати співвідношення:



$$\int_0^a \left(\frac{d^4 w(x)}{dx^4} - p^4 w(x) \right) w^*(x - \xi) dx = \left[\frac{d^3 w(x)}{dx^3} w^*(x - \xi) - \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \frac{dw^*(x - \xi)}{dx} + \frac{dw(x)}{dx} \frac{d^2 w^*(x - \xi)}{dx^2} - w(x) \frac{d^3 w^*(x - \xi)}{dx^3} \right]_{x=0}^{x=a} + \int_0^a \left(\frac{d^4 w^*(x - \xi)}{dx^4} - p^4 w^*(x - \xi) \right) w(x) dx, \quad (19)$$

яке легко отримати, застосовуючи правило інтегрування по частинам. Тут вважаємо, що балка відповідає проміжку $[0, a]$ осі x при цьому $\xi \in [0, a]$.

Вибираючи $w^*(x)$ у вигляді (16) співвідношення (19) може бути записане у вигляді:

$$w(\xi) = \left[-Q^*(x - \xi)w(x) + M^*(x - \xi)\theta(x) - \theta^*(x - \xi)M(x) + w^*(x - \xi)Q(x) \right]_{x=0}^{x=a}. \quad (20)$$

У (20) величини, позначені зірочкою є цілком визначеними. Враховуючи вирази для кута нахилу, згинаючого моменту та перерізуючої сили згідно теорії Флоке [1], знаходимо:

$$\begin{aligned} \theta^*(x) &= \frac{1}{4p^2 EJ} (\cos px - e^{-p|x|}) \operatorname{sign} x, \\ M^*(x) &= \frac{1}{4p^2} (\sin p|x| - e^{-p|x|}), \\ Q^*(x) &= \frac{1}{4} (\cos px - e^{-p|x|}) \operatorname{sign} x. \end{aligned} \quad (21)$$

Серед восьми величин $w(0)$, $w(a)$, $\theta(0)$, $\theta(a)$, $M(0)$, $M(a)$, $Q(0)$ та $Q(a)$ чотири задаються граничними умовами (або чотири лінійні комбінації цих величин). Отже, фактично невідомими серед них є лише половина. Послідовно спрямовуючи $\xi \rightarrow 0$ та $\xi \rightarrow a$, отримуємо два рівняння для їх визначення. Для знаходження ще двох продиференціюємо (20) по ξ :

$$\begin{aligned} \theta(\xi) &= \left[-\frac{Q^*(x - \xi)}{d\xi} w(x) + \frac{M^*(x - \xi)}{d\xi} \theta(x) - \frac{\theta^*(x - \xi)}{d\xi} M(x) + \frac{w^*(x - \xi)}{d\xi} Q(x) \right]_{x=0}^{x=a}. \end{aligned} \quad (22)$$

Вказані два рівняння знову одержуємо за допомогою граничних переходів $\xi \rightarrow 0$ та $\xi \rightarrow a$.

Отримана система граничних рівнянь, які в нашому випадку є лінійними алгебраїчними рівняннями, може бути представлена у матричному вигляді:

$$X_1^T = A_1 X_1^T + A_2 X_2^T, \quad (23)$$

Притримуючись загального підходу, викладеного вище для балок, наведемо основні положення прямого методу граничних елементів для розв'язку задач стаціонарних коливань пластин.

Фундаментальний розв'язок рівняння стаціонарних коливань пластини має задовольняти наступне рівняння:

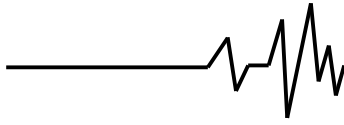
$$\Delta \Delta w^*(x, y) - p^4 w^*(x, y) = \frac{\delta(x, y)}{D}. \quad (24)$$

Для його знаходження будемо знову використовувати перетворення Фур'є, внаслідок його використання до рівняння (24) і наступного розв'язку отриманого алгебраїчного рівняння, знаходимо:

$$W^*(\alpha, \beta) = \frac{1}{D (\alpha^2 + \beta^2)^2 - p^4}. \quad (25)$$

При відтворенні оригіналу за формулою обернення:

$$w^*(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\alpha x + \beta y)} W^*(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \quad (26)$$



для звільнення від кратних інтегралів перейдемо до полярної системи координат, що дозволяє представити фундаментальний розв'язок у наступному вигляді:

$$w^*(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{irp \cos(\varphi-\vartheta)} \frac{\rho d\vartheta d\rho}{\rho^4 - p^4} \quad (27)$$

Приймаючи до уваги інтегральне представлення функції Беселя першого роду (27) і використовуючи аналогічні міркування попереднього випадку отримуємо три можливих фундаментальних розв'язки:

$$w^*(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi p^2 D} \left[K_0(pr) - \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(pr) \right],$$

$$w^*(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi p^2 D} \left[K_0(pr) + \frac{\pi i}{2} H_0^{(2)}(pr) \right],$$

(28)

$$\begin{aligned} w(\vec{\xi}) = \int_{\Gamma} & \left(-V^*(\vec{x}, \vec{\xi}) w(\vec{x}) - M^*(\vec{x}, \vec{\xi}) \theta(\vec{x}) + \theta^*(\vec{x}, \vec{\xi}) M(\vec{x}) + \right. \\ & \left. + w^*(\vec{x}, \vec{\xi}) V(\vec{x}) \right) d\Gamma(\vec{x}) + \int_{\Omega} q^*(\vec{x}) w(\vec{x}, \vec{\xi}) d\Omega(\vec{x}) - \\ & - \sum_{k=1}^K \bar{M}_{\tau}^*(\vec{s}_k, \vec{\xi}) w(\vec{s}_k) + \sum_{k=1}^K \bar{M}_{\tau}(\vec{s}_k) w^*(\vec{s}_k, \vec{\xi}). \end{aligned} \quad (29)$$

Інтегральне співвідношення (29) є основою прямого методу граничних елементів. Воно виражає прогин всередині пластини через значення кінематичних та динамічних характеристик, заданих на її границі. За своєю структурою воно нагадує суперпозицію простого потенціалу та потенціалів вищих порядків. Проте така схожість є цілком зовнішньою і пояснюється лише повною симетрією фундаментального розв'язку по відношенню до своїх аргументів \vec{x} та $\vec{\xi}$.

Спрямовуючи точку $\vec{\xi}$ на границю Γ , отримаємо граничне інтегральне рівняння:

$$w(\vec{\xi}) = \int_{\Gamma} \left(-V^*(\vec{x}, \vec{\xi}) w(\vec{x}) - M^*(\vec{x}, \vec{\xi}) \theta(\vec{x}) + \theta^*(\vec{x}, \vec{\xi}) M(\vec{x}) + w^*(\vec{x}, \vec{\xi}) V(\vec{x}) \right) d\Gamma(\vec{x}). \quad (30)$$

Оскільки на границі Γ задано лише дві з чотирьох величин w , θ , M та V , то для

$$w^*(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi p^2 D} \left[K_0(pr) + \frac{\pi}{2} Y_0(pr) \right],$$

де $H_0^{(1)}(z) = J_0(z) + iY_0(z)$ - функція Ханкеля другого роду.

Перший з розв'язків (28) відповідає хвилі, яка поширюється на нескінченність, другий - хвилі, яка поширюється з нескінченності, а третій є суперпозицією перших двох.

Якщо у якості w^* вибрати фундаментальний розв'язок рівняння стаціонарних коливань пластини $w^* = w^*(\vec{x}, \vec{\xi}) = w^*(\vec{x} - \vec{\xi})$, де $\vec{\xi} = (\xi, \eta)$ - довільна точка області Ω , то в силу основної інтегральної властивості дельта-функції граничні інтегральні співвідношення матимуть вигляд:

того, щоб отримати замкнену систему граничних інтегральних рівнянь (30), потрібно доповнити ще одним співвідношенням. Його можна отримати, якщо продиференціювати (30) у напрямку нормалі у точці $\vec{\xi}$:

$$\begin{aligned} \theta(\vec{\xi}) = \int_{\Gamma} & \left(-\frac{\partial V^*(\vec{x}, \vec{\xi})}{\partial \vec{n}_{\xi}} w(\vec{x}) - \frac{\partial M^*(\vec{x}, \vec{\xi})}{\partial \vec{n}_{\xi}} \theta(\vec{x}) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \theta^*(\vec{x}, \vec{\xi})}{\partial \vec{n}_{\xi}} M(\vec{x}) + \frac{\partial w^*(\vec{x}, \vec{\xi})}{\partial \vec{n}_{\xi}} V(\vec{x}) \right) d\Gamma(\vec{x}). \end{aligned} \quad (31)$$

Якщо $\vec{\xi}$ спрямувати на границю Γ , то (30) та (31) будуть становити собою систему граничних інтегральних рівнянь теорії стаціонарних коливань платівок. У випадку простої геометрії області систему (30) - (31) можна дослідити аналітично.

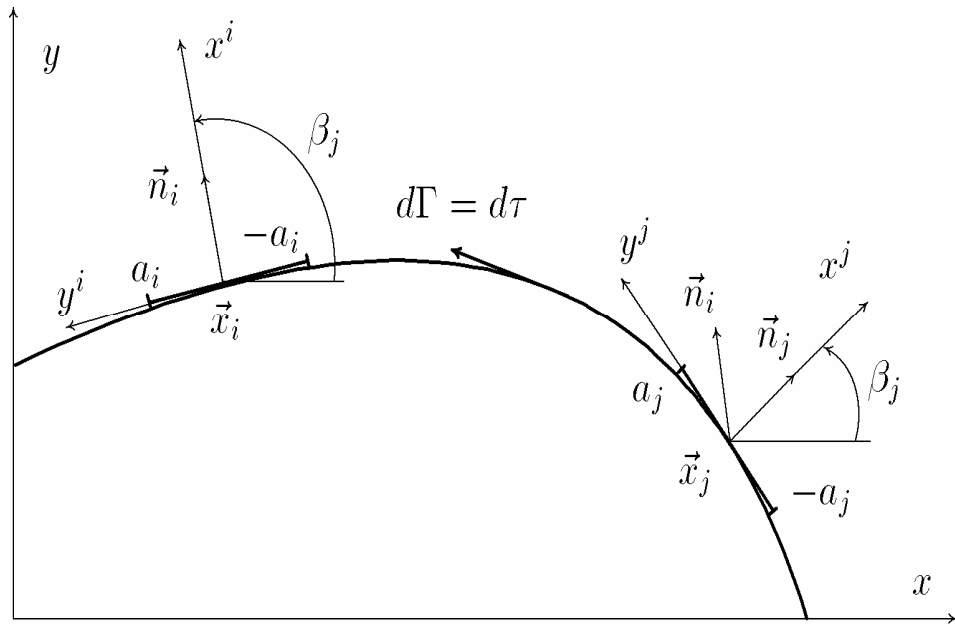
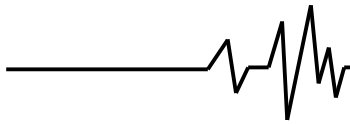


Рис. 1. Локальні системи координат пов'язані з граничними елементами

Для конкретної чисельної реалізації виберемо лінійні граничні елементи (границя апроксимується ломаною), на яких невідомі функції замінюються невідомими сталими, що відповідають їх значенням у середніх точках

елементів. В наслідок такої дискретизації граничні інтегральні рівняння (30) - (31) зводяться до наступної системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

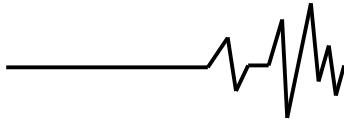
$$\begin{aligned}
 w(\vec{x}_i) &= \sum_{j=1}^N [A_{ij}w(\vec{x}_j) + B_{ij}\theta_n(\vec{x}_j) + C_{ij}M_n(\vec{x}_j) + D_{ij}V_n(\vec{x}_j)], \\
 \theta_n(\vec{x}_i) &= \sum_{j=1}^N [E_{ij}w(\vec{x}_j) + F_{ij}\theta_n(\vec{x}_j) + G_{ij}M_n(\vec{x}_j) + H_{ij}V_n(\vec{x}_j)], \\
 i &= 1, 2, \dots, N,
 \end{aligned} \tag{32}$$

де N - кількість граничних елементів.

Після громіздких, але очевидних перетворень знаходимо вирази для недиагональних ($i \neq j$) коефіцієнтів:

Для обчислення коефіцієнтів в (32) введемо деякі позначення. Перейдемо від глобальної системи (x, y) до локальної системи, пов'язаної з j -м елементом (рис. 1).

$$\begin{aligned}
 A_{ij} &= \frac{p}{4\pi} x_i^j \int_{-a_j}^{a_j} \left(Z_3(pr) - 4 \frac{Z_2(pr)}{pr} \right) \frac{dy^j}{r} - \frac{1-\nu}{4\pi} x_i^j Z_2(pr) \frac{y^j - y_i^j}{r^2} \Big|_{y^j=-a_j}^{y^j=a_j}, \\
 B_{ij} &= \frac{1}{4\pi} \int_{-a_j}^{a_j} \frac{Z_2(pr)}{r^2} \left((x_i^j)^2 + \nu(y^j - y_i^j)^2 \right) dy^j + \frac{(1+\nu)D}{x_i^j} C_{ij}, \\
 C_{ij} &= -\frac{x_i^j}{4\pi p D} \int_{-a_j}^{a_j} \frac{Z_1(pr)}{r} dy^j, \quad D_{ij} = \frac{1}{4\pi p^2 D} \int_{-a_j}^{a_j} Z_0(pr) dy^j,
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 E_{ij} = & \frac{p}{4\pi} \left[n_1 \left\{ p \int_{-a_j}^{a_j} \left[Z_4(pr) \frac{(x_i^j)^2}{r^2} - Z_3(pr) \frac{r^2 + 6(x_i^j)^2}{pr^3} + Z_2(pr) \frac{4}{p^2 r^2} \right] dy^j - \right. \right. \\
 & \left. \left. - (1-\nu) \left[\left(Z_3(pr) \frac{(x_i^j)^2}{r^2} - \frac{Z_2(pr)}{pr} \right) \frac{y^j - y_i^j}{r} \right] \Big|_{y^j=-a_j}^{y^j=a_j} \right\} + \right. \\
 & \left. + n_2 \left\{ \left[Z_3(pr) - 4 \frac{Z_2(pr)}{pr} + (1-\nu) \left(Z_3(pr) \left(\frac{y^j - y_i^j}{r} \right)^2 - \frac{Z_2(pr)}{pr} \right) \right] \frac{x_i^j}{r} \right\} \Big|_{y^j=-a_j}^{y^j=a_j} \right\}, \\
 F_{ij} = & \frac{1}{4\pi} \left[pn_1 \int_{-a_j}^{a_j} \left(Z_3(pr) \frac{(x_i^j)^2}{r^2} + \nu (y^j - y_i^j)^2 - (3+\nu) \frac{Z_2(pr)}{pr} \right) \frac{x_i^j}{r} dy^j + \right. \\
 & \left. + n_2 \left(\frac{Z_2(pr)}{r^2} \left((x_i^j)^2 + \nu (y^j - y_i^j)^2 \right) - (1-\nu) \frac{Z_1(pr)}{pr} \right) \Big|_{y^j=-a_j}^{y^j=a_j} \right], \\
 G_{ij} = & -\frac{n_1}{4\pi D} \int_{-a_j}^{a_j} \left(Z_2(pr) \frac{(x_i^j)^2}{r^2} - \frac{Z_1(pr)}{pr} \right) dy^j - \frac{n_2}{4\pi p D} Z_1(pr) \frac{x_i^j}{r} \Big|_{y^j=-a_j}^{y^j=a_j}, \\
 H_{ij} = & -C_{ij} n_1 + \frac{Z_0(pr)}{4\pi p^2 D} n_2 \Big|_{y^j=-a_j}^{y^j=a_j},
 \end{aligned} \tag{33}$$

де a_j - половина довжини j - го граничного елемента,

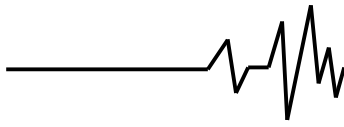
$$Z_n(t) = \frac{\pi i}{2} H_n^{(1)} - K_n(t),$$

П'ять діагональних коефіцієнтів (коефіцієнти власного впливу) визначаються відразу з (33), якщо покласти, що $x_i^j = y_i^j = 0$, $n_1 = 1$, $n_2 = 0$, тоді:

$$r = \sqrt{(y^j - y_i^j)^2 + (x_i^j)^2}.$$

$$\begin{aligned}
 B_{jj} = & -\frac{1}{2\pi p} \left[\frac{\pi i}{2} I_H(pa_j) + I_K(pa_j) - (1-\nu) Z_1(pa_j) \right], \quad C_{jj} = 0, \\
 D_{jj} = & -\frac{1}{2\pi p^3 D} \left[\frac{\pi i}{2} I_H(pa_j) - I_K(pa_j) \right], \\
 G_{jj} = & -\frac{1}{2\pi p D} \left[\frac{\pi i}{2} I_H(pa_j) + I_K(pa_j) - Z_1(pa_j) \right], \quad H_{jj} = 0,
 \end{aligned} \tag{34}$$

$$\text{де } I_H(x) = \int_0^x H_0^{(1)}(x) dx, \quad I_K(x) = \int_0^x K_0(x) dx.$$



Інші три коефіцієнта виражаються через сингулярні інтеграли, які слід розуміти як головне значення за Коші. Кінцевий результат

такого асимптотичного аналізу можна подати у вигляді:

$$A_{jj} = F_{jj} = 1/2, \quad E_{jj} = \frac{p}{2\pi} \left[\int_0^{pa_j} Z_0(x) dx \frac{\pi i}{2} + Z_3(pa_j) - (3 + \nu) \frac{Z_2(pr)}{pa_j} \right]. \quad (35)$$

Вирази для коефіцієнтів (33) – (35) разом зі СЛАР (32) складають основу чисельної схеми розв'язку граничних задач теорії стаціонарних коливань пластівок. Значення прогину у внутрішніх точках пластівки після розв'язку СЛАР знаходяться з відповідним чином дискретизованого співвідношення (30).

Висновки

1. Розроблена числова схема методу граничних елементів для стаціонарних коливань балок.

2. Притримуючись загального підходу, викладеного для балок, наведено основні положення прямого методу граничних елементів для розв'язку задач стаціонарних коливань пластин.

Перспективи подальших наукових досліджень. Подані у даній статті схеми метода граничних елементів для балок та пластин разом з теорією Флоке [1] можуть бути використані у подальших дослідженнях явища поширення хвиль згину вздовж подібних однорічних і двовимірних періодичних механічних систем.

Список використаних джерел

1. Бриллюэн Л. Распространение волн в периодических структурах/ Бриллюэн Л., Пароди М. // М.: ИЛ. – 1959. – 457 с.

2. Бобровницкий Ю.И. Распространение волн в конструкциях из тонких стержней и пластин / Бобровницкий Ю.И., Генкин М.Д., Маслов В.П., Римский-Корсаков А.В. // М.: Наука. – 1974. – 102 с.

3. Mead D.J. An approximate method of predicting the responds of periodically supported beams subjected to random con-veccted loading / Mead D.J., Mallik A.K. // J. Sound and Vibr. – 1976. – Vol. 47. – N4. – P. 457 – 471.

4. Mace B.R., Wavenumber prediction using finite element analysis/ Mace B.R., Duhamel D., Brennan M.J., Hinke L // Eleventh International Congress on Sound and Vibration, St. Peterburg. – 2004.

5. Mencik J.M., Wave finite elements in

guided elastodynamics with internal fluid/ Mencik J.M., Ichchou M.N. // Inter. J. of Sol. And Structures. – 2007 – Vol. 44. – P. 2148 – 2167.

6. Ouyang H.J. A General method for an alyzing wave propagation along longitudinally periodic structures/ Ouyang H.J., Williams F.W., Kennedy D.// J. Sound and Vibr. – 1994. – Vol. 177. – N2. – P. 277–281.

7. Tyutekin V.V. Circumferential and helical normal waves of a cylindrical waveguide: helical waves in s free space/ Tyutekin V.V. // Acoustical Physics. – 2006. – Vol. 52.— N 4.— P. 471–476.

8. Zhong W.X. On the direct solution of wave propagation for repetitive structures/ Zhong W.X., Williams F. // J. Sound and Vibr. – 1995. – Vol. 181. – N3. – P. 485–501.

Список джерел в транслітерації

1. Brilliyuen L. Rasprostraneniye voln v periodicheskikh strukturakh / Brilliyuen L., Parodi M. // М.: ИЛ. – 1959. – 457 с.

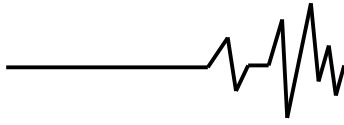
2. Bobrovniyskiy Yu.I. Rasprostraneniye voln v konstruktsiyakh iz tonkikh sterzhney i plastin / Bobrovniyskiy Yu.I., Genkin M.D., Maslov V.P., Rimskiy-Korsakov A.V. // М.: Nauka. – 1974. – 102 с.

3. Mead D.J. An approximate method of predicting the responds of periodically supported beams subjected to random con-veccted loading / Mead D.J., Mallik A.K. // J. Sound and Vibr. – 1976. – Vol. 47. – N4. – P. 457 – 471.

4. Mace B.R., Wavenumber prediction using finite element analysis/ Mace B.R., Duhamel D., Brennan M.J., Hinke L // Eleventh International Congress on Sound and Vibration, St. Peterburg. – 2004.

5. Mencik J.M., Wave finite elements in guided elastodynamics with internal fluid/ Mencik J.M., Ichchou M.N. // Inter. J. of Sol. And Structures. – 2007 – Vol. 44. – P. 2148 – 2167.

6. Ouyang H.J. A General method for an alyzing wave propagation along longitudinally periodic structures/ Ouyang H.J., Williams F.W., Kennedy D.// J. Sound and Vibr. – 1994. – Vol. 177. – N2. – P. 277–281.



7. Tyutekin V.V. Circumferential and helical normal waves of a cylindrical waveguide: helical waves in s free space/ Tyutekin V.V. // Acoustical Physics. – 2006. – Vol. 52.— N 4.— P. 471–476.

8. Zhong W.X. On the direct solution of wave propagation for repetitive structures/ Zhong W.X., Williams F. // J. Sound and Vibr. – 1995. – Vol. 181. – N3. – P. 485–501.

О ПОСТРОЕНИЕ ЧИСЛЕННОЙ СХЕМЫ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ БАЛОК И ПЛАСТИН

Аннотация. В статье проанализировано основные методы исследования распространения различного вида волн в периодических механических системах. Предложена схема прямого метода граничных элементов для случая стационарных колебаний балок, закрепленных периодическим образом. С помощью преобразования Фурье были получены три решения, анализ которых показал, что только одно из них является фундаментальным. Данное решение вместе с граничными интегральными соотношениями, которые выражают значения неизвестных функций в середине области через их значения на границе области, сводят решение данной задачи к решению системы алгебраических уравнений.

Данные исследования были распространены на случай стационарных колебаний пластин. Была разработана численная схема прямого метода граничных элементов. Для конкретной численной реализации были взяты линейные граничные элементы, на которых неизвестные функции заменялись неизвестными постоянными. Записаны соответствующие интегральные соотношения метода граничных элементов. Детально продемонстрирована процедура нахождения фундаментального решения и коэффициентов влияния.

Указаны возможные пути использования данного метода при решении задач о явлении распространения волн изгиба в одномерных и двухмерных периодических системах.

Ключевые слова: волна, балка, пластина фундаментальное решение, коэффициенты влияния.

AT CONSTRUCTION OF NUMERAL SCHEMATIC OF BOUNDARY ELEMENTS METHOD FOR STATIONARY VIBRATIONS OF BEAMS AND PLATES

Annotation. In the article the basic methods of research of distribution of different type of waves in the periodic mechanical systems are analyzed. The schematic of boundary elements method for the case of stationary vibrations of beams is offered. By transformation of Fourier three decisions were got, the analysis of which analyzed that only one from them was fundamental. This decision together with boundary integral correlations which express the values of unknown functions in the mean of area through their values on the border of area, take the decision of this task to the decision of the system of algebraic equalizations.

These researches were extended to case of stationary vibrations of plates. The numeral schematic of direct boundary elements method was developed. For concrete numeral realization linear boundary elements on which unknown functions were replaced unknown constants were taken. The corresponding integral correlations of boundary elements method are written. Procedure of finding of fundamental decision and coefficients of influence is in detail shown.

The possible ways of the use of this method are indicated at the decision of tasks about the phenomenon of distribution of bend waves in the one-dimensional and two-dimensional periodic systems.

Key words: wave, beam, plate, fundamental decision, coefficients of influence.