

Черниш О. М.

Яременко В. В.

Бондар М. М.

*Національний
університет
біоресурсів і
природокористування
України*

Chernysh O. M.

Yaremenko V. V.

Bondar M. M.

*National University of Life
and Environmental
Sciences of Ukraine*

УДК 631.01:534.1

АНАЛІЗ АВТОКОЛИВАЛЬНОГО РУХУ З ЕНЕРГЕТИЧНОЇ ТОЧКИ ЗОРУ

У статті теоретично розглянуті умови зміни механічної енергії при визначенні характеристик автоколивального руху. З енергетичних позицій проаналізовано два види автоколивальних рухів із м'яким і жорстким самозбуренням. З'ясовано положення точок статичної і динамічної рівноваги автоколивальних систем на графічних залежностях зміни механічної енергії системи від амплітуди її коливального руху. Визначено характер стійкої або нестійкої статичної та динамічної рівноваги автоколивальних систем при необхідних початкових умовах. Показано, що режими стійких коливань з кінцевою амплітудою можливі тільки в автоколивальних системах з нелінійними властивостями. Але внаслідок наявності зон динамічної нестійкості перед стійкими режимами автоколивань запропоновано задачу отримання стійких автоколивальних рухів розглядати у лінійній постановці.

Ключові слова: механічні коливання, автоколивальний рух, зміна механічної енергії, статична і динамічна рівновага.

Постановка проблеми. Кінематичні та динамічні характеристики коливальних рухів у сільськогосподарському виробництві суттєво впливають на продуктивність, довговічність і надійність механічного обладнання, а прогнозування та розрахунки заданих коливальних і вібраційних режимів являються основою для створення новітньої високоефективної техніки. Тому врахування, дослідження і моделювання коливальних і вібраційних рухів необхідне як стадії проектування сільськогосподарських машин, так і в процесі їх експлуатації.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. На сьогоднішній день вивченню характеру та особливостей коливальних процесів сільськогосподарського виробництва, їх суттєвому впливу на ці процеси, на механічне обладнання та технології переробки присвячено багато досліджень і публікацій [3-5, 11]. Адже дослідження і розрахунки параметрів коливань і вібрацій є невід'ємною частиною їх динамічних розрахунків. Аналіз і дослідження механічних коливань і вібрацій, їх практичне застосування розглянуті в роботах [1-4, 6, 7, 9-11]. Але проблема вибору методик таких досліджень при розв'язанні наукових і практичних задач залишається актуальною.

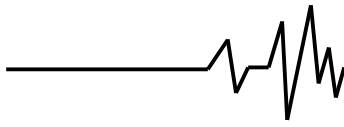
Як відомо, автоколивання виникають в дисипативних динамічних системах з

нелінійним зворотним зв'язком, в яких енергія від зовнішнього джерела перетворюється в енергію незатухаючих коливань із параметрами (амплітудою, частою, спектром коливань), що не залежать від початкових умов, а визначаються лише властивостями самої системи.

Автоколивання суттєво відрізняються від змушених коливань тим, що останні викликані зовнішнім періодичним збуренням і відбуваються із частотою цього збурення, у той час коли параметри автоколивань визначається внутрішніми властивостями самої автоколивальної системи.

Невирішені частини проблеми. При роботі з автоколивальними системами як правило треба розв'язувати дві основні задачі: як отримати коливання необхідної частоти, потужності і форми, якщо вони корисні, або як знешкодити автоколивання, якщо вони шкідливі. Основними досліджуваними критеріями таких задачах є фазові співвідношення та енергетичний баланс. Тому дослідження і аналіз зміни механічної енергії в коливальних процесах механічних систем допоможе не тільки усвідомити їх фізичну сутність, але і дасть можливість їх прогнозування та розрахунку.

Метою дослідження є отримання і застосування енергетичних співвідношень для



аналізу зміни механічної енергії при визначенні характеристик автоколивального руху.

Основні результати дослідження.

Для отримання енергетичних співвідношень в автоколивальному процесі спочатку розглянемо елементарне рівняння гармонійного коливального руху, коли узагальнена координата q і її похідна змінюються пропорційно синусу із аргументом, що лінійно залежить від часу:

$$q = A \cdot \sin(\omega t + \alpha), \quad (1)$$

де A – амплітуда; ω – колова або циклічна частота; α – початкова фаза коливань.

При цьому амплітуду A будемо вважати повільно мінливою функцією у припущенні, що

за один період коливань $T = \frac{2\pi}{\omega}$ вона мало

змінюється у порівнянні з її середнім значенням. Таке припущення в межах періоду коливань дозволяє вважати амплітуду сталою величиною, що дорівнює її середньому значенню. Вважатимемо також, що зміна амплітуди коливань буде відбуватись лише при переході від одного періоду коливань до наступного.

Далі визначимо зміну механічної енергії ΔE гармонійних коливань за відрізок часу Δt , що дорівнює періоду T :

$$\Delta E = E(t_2) - E(t_1), \quad (2)$$

де $\Delta t = t_2 - t_1 = T$.

Для цього складемо диференціальне рівняння у вигляді

$$m\ddot{q} + cq = Q(\dot{q}, t), \quad (3)$$

де m , c – відповідно інерційний і квазіпружний коефіцієнти; Q – величина неконсервативної узагальненої сили.

Помножимо ліву і праву частину останнього рівняння на $\dot{q}dt$ [5] і отримаємо:

$$dE = Q\dot{q}dt, \quad (4)$$

Тоді зміна механічної енергії ΔE гармонійних коливань за період T буде дорівнювати:

$$\Delta E = \int_0^T Q\dot{q}dt, \quad (5)$$

де $Q\dot{q}dt = Qdq$.

Даний вираз показує, що величина зміни механічної енергії ΔE при гармонійному

коливальному процесі за період T дорівнює роботі неконсервативних узагальнених сил.

Тобто, при додатній зміні механічної енергії ΔE гармонійного коливального процесу (при $\Delta E > 0$) амплітуда коливань буде зростати ($\Delta A > 0$), при від'ємній зміні механічної енергії ΔE (при $\Delta E < 0$) амплітуда коливань буде зменшуватись ($\Delta A < 0$), а при відсутності зміни (при $\Delta E = 0$) амплітуда залишиться постійною ($\Delta A = 0$).

При цьому вважаємо, що у загальному випадку за період коливань T величина зміни механічної енергії ΔE може мати дві складові

$$\Delta E = \Delta E_+ + \Delta E_-. \quad (6)$$

Індекс зі знаком мінус параметра ΔE означає, що енергія від коливальної системи відбирається, а зі знаком плюс – що енергія до системи надходить.

Так, наприклад в ідеальному випадку вільних гармонійних коливань механічної системи без опору величина узагальненої сили відсутня ($Q = 0$) і зміна її енергії також відсутня: $\Delta E = 0$, а амплітуда коливань буде сталою величиною ($A = const$).

У випадку дії на вільні гармонійні коливання сили опору, що змінюється за лінійним законом із коефіцієнтом пропорційності b :

$$Q = -b\dot{q}, \quad (7)$$

величина зміни механічної енергії ΔE буде від'ємною величиною

$$\Delta E = -b \int_0^T \dot{q}^2 dt < 0, \quad (8)$$

або

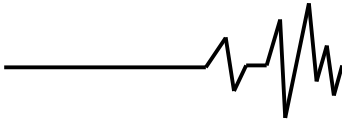
$$\Delta E_- = 0,5\psi c A^2, \quad (9)$$

а коливання будуть згасальними ($\Delta A < 0$).

Як видно з (9), залежність енергії, що відбирається ΔE_- , від величини амплітуди A у цьому випадку буде квадратичною, тобто має вигляд параболи.

Проаналізуємо тепер з позицій зміни механічної енергії рух автоколивальної системи.

Припустимо, що коливання у такій системі вже відбуваються. Енергія цих коливань мала б зменшуватись внаслідок певних втрат на коливальний процес у самій



системі. Але це зменшення постійно поповнюється за рахунок зовнішнього джерела, від якого певна частка енергії за кожний період (або взагалі періодично) подається механізмом зворотного зв'язку назад у коливальну систему.

Цілком зрозуміло, що стійкі коливання (тобто незатухаючі і не зростаючі за амплітудою) тут можливі тільки у тому випадку, коли кількість наданої від джерела енергії за період (або в одиницю часу) у точності відповідає втратам енергії за цей же час. Ця умова балансу енергії в автоколивальній системі і є умовою існування в ній незатухаючих коливань.

Також зрозуміло, що у випадку порушення балансу в розумінні, що поповнення втрат буде недостатнім, коливання будуть загасати. Якщо ж, навпаки, від джерела буде надходити надлишкова енергія, коливання будуть зростати.

Проаналізуємо тепер механізм самозбурення автоколивальної системи. Якщо на початку коливального руху в системі, тобто при найменших амплітудах, поповнення енергії перевищує її втрати, то система буде розгойдуватися, тобто амплітуда коливань буде зростати. Якби таке співвідношення між наданою і витраченою енергіями в системі збереглося і надалі, то амплітуда автоколивань зростала б необмежено.

Випадок, коли для саморозгойдування автоколивальної системи достатньо невеликого початкового збурення, якого завжди можна досягти тими або іншими флуктуаціями, вважається м'яким самозбуренням. На відміну від цього випадок, коли для розгойдування системи потрібен певний початковий поштовх кінцевої величини, вважається жорстким самозбуренням.

Для отримання стійкого режиму автоколивань, необхідно, щоб, починаючи з деякого значення амплітуди, енергетичні втрати в системі зростали з подальшим збільшенням амплітуди швидше, ніж поповнення енергії, надане від джерела. При даній умові можливе досягнення вищезгаданого енергетичного балансу.

Це графічно демонструється на рис. 1 при м'якому самозбуренні автоколивальної системи. Тут енергія, що надається від джерела ΔE_+ , і енергія, що витрачається коливальною системою ΔE_- , зображені в залежності від амплітуди A . Точка перетину кривих ΔE_+ і ΔE_- відповідає балансу енергій, а абсциса

цієї точки відповідає значенню стійкої амплітуди A_0 автоколивань системи.

Графічна залежність на рис. 1 дає елементарне розуміння стійкості коливального руху. Рух вважається стійким, якщо система, коливальний режим якої порушений яким-небудь зовнішнім впливом, повертається до першопочаткового режиму після припинення цього впливу. Навпаки, рух буде нестійким, якщо будь-який малий зовнішній вплив вибиває систему з коливального режиму, від якого система надалі відходить усе далі.

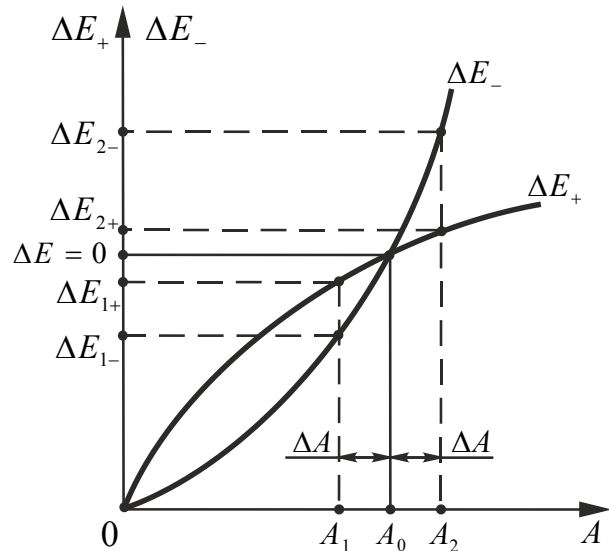
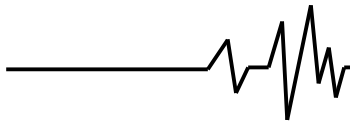


Рис. 1. Залежність ΔE_- і ΔE_+ від A при м'якому самозбуренні автоколивальної системи

За аналогію між стійкістю рівноваги і стійкістю руху, відповідно будемо розрізняти стійкість статичну і стійкість динамічну.

Для аналізу стійкості в умовах, що показані на рис. 1, оберемо два значення амплітуди: A_1 і A_2 , одне з яких менше, а друге більше значення A_0 . Тоді для першого випадку, коли $A_1 < A_0$: $\Delta E_{1+} > \Delta E_{1-}$ і амплітуда автоколивань буде зростати, поки не досягне значення A_0 . Для другого випадку, коли $A_2 > A_0$: $\Delta E_{2+} < \Delta E_{2-}$ і амплітуда автоколивань буде зменшуватись, поки знов-таки не досягне значення A_0 . Таким чином, точка перетину з абсцисою A_0 , де $\Delta E = 0$, є точкою стійкої динамічної рівноваги.



При цьому початок координат діаграми 0, де криві ΔE_+ і ΔE_- також перетинаються, являється точкою статичної рівноваги. Однак статична рівновага тут буде нестійкою, у чому можна перекоонатись, розглянувши співвідношення при як завгодно малих, але не рівних нулю амплітудах.

Отже умовою самозбурення автоколивальної системи є не що інше, як умова її нестійкості у стані спокою.

Треба відмітити, що криві ΔE_+ і ΔE_- можуть перетинатись також у декількох точках. Для цього розглянемо графічну залежність жорсткого самозбурення автоколивальної системи на рис. 2.

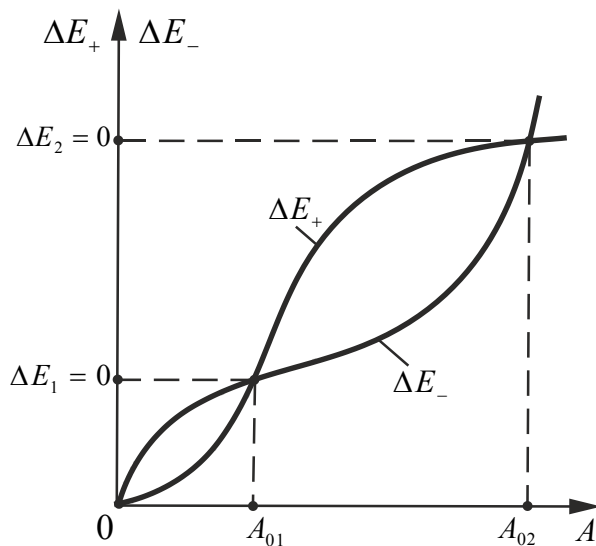


Рис. 2. Залежність ΔE_- і ΔE_+ від A при жорсткому самозбуренні автоколивальної системи

Тут існує три точки перетину і відповідно – три стани рівноваги. Згідно із вищевикладеним легко побачити, що два з них стійкі (абсциси 0 і A_{02}), а один – нестійкий (абсциса A_{01}).

Із того, що початок координат 0 є точкою стійкої рівноваги, зрозуміло, що система, яка надана самій собі, буде зберігати стан спокою і не буде самозбурюватись. Але це не говорить про те, що в такій системі неможливі стійкі автоколивання. Дійсно, у випадку, якщо у системі яким-небудь зовнішнім поштовхом, будуть збурені коливання з амплітудою, що перевищує A_{01} , то така система надалі вже самостійно досягне більшої амплітуди A_{02} .

Криві ΔE_+ і ΔE_- можуть перетинатись і у більшому числі точок. Усі точки стійкої рівноваги (за винятком початку координат) означають можливі стійкі режими автоколивальної системи, у яких вона може генерувати незатухаючі коливання.

На підставі наведених міркувань зрозуміло, що якби система була лінійною, то як втрати, так і приріст енергії зростали б за однаковими законами, а саме, пропорційно квадрату амплітуди. Графічно ΔE_+ і ΔE_- були б представлені двома параболою, що проходили через початок координат, але більше ніде б не перетинались. При цьому одна з цих парабол лежала б вище іншої. Така система або не збурювалась би зовсім, або самозбурювалась м'яко із необмеженим зростанням амплітуди. Отже режим стійких коливань з кінцевою амплітудою можливий тільки в нелінійній системі.

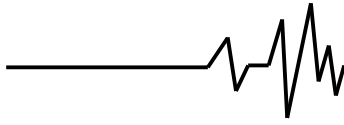
Таким чином, при дослідженні автоколивальних систем, треба розуміти, що у склад реальної автоколивальної системи, здатної генерувати коливання з усталеною амплітудою, обов'язково входить нелінійний елемент. Така нелінійність може бути властива як самій коливальній системі або її навантаженню, так і механізму зворотного зв'язку, або ланцюга зворотного зв'язку. Тобто, нелінійні властивості може мати кожна з ланок, що входять до складу автоколивальної системи. Але при цьому умови енергетичного балансу вказують на те, що стійкому режиму автоколивань передують область динамічної нестійкості, де $\Delta E_+ > \Delta E_-$. Отже динамічну нестійкість автоколивальної системи, а відповідно, і можливість виникнення стійких автоколивальних режимів можна розглядати у лінійній постановці.

Висновки

Аналізуючи викладене вище, можна зробити такі висновки.

1. З енергетичних позицій проаналізовано два види автоколивального руху із м'яким і жорстким самозбуренням.

2. При м'якому самозбуренні при $A \rightarrow 0$ енергія, що підводиться до системи, більша, ніж та що відводиться ($\Delta E_+ > \Delta E_-$). Відповідно $\Delta E > 0$ і починається розгойдування системи. При $A = A_0$ маємо $\Delta E = 0$, що відповідає стійким коливанням із сталою амплітудою A_0 .



Цей режим є стійким. Якщо амплітуді надати малі відхилення $\Delta A \rightarrow 0$, то оскільки $\Delta E > 0$ при $A_1 < A_0$ і $\Delta E < 0$ при $A_2 > A_0$, будемо мати $A_{1,2} \rightarrow A_0$. Аналогічно можна встановити, що положення статичної рівноваги системи при $A = 0$ відповідає нестійкому стану.

3. При жорсткому збуренні положення статичної рівноваги системи при $A = 0$ стійке, стаціонарний режим із амплітудою A_{01} – нестійкий, а із амплітудою A_{02} – стійкий. Для збурення автоколивальних тут потрібні деякі ненульові початкові умови, при яких $A > A_{01}$.

4. Так як перед стійким режимом автоколивальних існує область динамічної нестійкості, то задачу з'явлення динамічної нестійкості, а відповідно, і задачу отримання стійких автоколивальних режимів можна розглядати у лінійній постановці.

5. У наведених випадках розглянуто лише найпростіші види автоколивального руху. Але розглянутий аналіз зміни механічної енергії такого коливального процесу дає можливість розглядати і інші, більш складні, коливальні процеси та визначити їх оптимальні режими.

Список використаних джерел

1. Анісімов І.О. Коливання та хвилі / І.О. Анісімов. – К.: Акад. прес. – 2003. – 280 с.
2. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний / В.Л. Бидерман. – М.: Высшая школа. – 1980. – 480 с.
3. Булгаков В.М. Теория вибраційного викопування коренеплодів / В.М. Булгаков, І.В. Головач // 36. наук. праць НАУ «Механізація сільськогосподарського виробництва». – К.: НАУ. – 2003. – Т. XIV. – С. 34-86.
4. Вулфсон І.І. Колебания машин с механизмами циклового действия / І.І. Вулфсон. – Л.: Машиностроение. – 1990. – 306 с.
5. Коловский М.З. Динамика машин / М.З. Коловский. – Л.: Машиностроение. – 1989. – 263 с.
6. Кузнецов А.П. Нелинейные колебания / А.П. Кузнецов., С.П. Кузнецов, Н.М. Рыскин. – М.: Изд. Физ.-мат. лит. – 2002. – 292 с.
7. Мангус К. Колебания. Введение в исследование колебательных систем. Пер. с нем. / К. Мангус. – М.: Мир. – 1982. – 304 с.

8. Павловський М.А. Теоретична механіка. Підручник / М.А. Павловський. – К.: Техніка. – 2002. – 512 с.

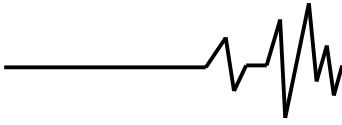
9. Хуторова О.Г. Компьютерное моделирование физических процессов / О.Г. Хуторова, Ю.М. Стенин, Р.Х. Фахртдинов и др. – Казань: КГУ. – 2001. – 53 с.

10. Черниш О.М. Енергетичні показники параметричного коливального процесу / О.М. Черниш // Механізація сільськогосподарського виробництва. Вісник Харківського нац. техн. університету сільського господарства ім. Петра Василенка: 36. наук. праць. – 2013. – Вип. 139. – С. 316 – 321.

11. Черниш О.М. Розрахункова модель коливального руху навісного очисника головок коренеплодів / О.М. Черниш, В.В. Яременко // Вібрації в техніці та технологіях. Всеукраїнський науково-техн. Журнал.–Вінниця. – 2013. – №. 1 (69). – С. 140 – 148.

Список джерел в транслітерації

1. Anisimov I.O. Kolyvannya ta Khvyli / I.O. Anisimov. – Do.: Akad. pres. – 2003. – 280 s.
2. Biderman V.L. Teoriya mekhanicheskikh kolebaniy / V.L. Biderman. – M.: Vysshaya shkola. – 1980. – 480 s.
3. Bulhakov V.M. Teoriya vibratsiynoho vykopuvannya koreneplodiv / V.M. Bulhakov, I.V. Holovach // Zb. nauk. prats NAU «Mekhanizatsiya silskohospodarskoho vyrobnytstva». – Do.: NAU. – 2003. – T. XIV. – S. 34–86.
4. Vulfson I.I. Kolebaniya mashin s mekhanizmami tsiklovogo deystviya / I.I. Vulfson. – L.: Mashinostroyeniye. – 1990. – 306 s.
5. Kolovskiy M.Z. Dinamika mashin / M.Z. Kolovskiy. – L.: Mashinostroyeniye. – 1989. – 263 s.
6. Kuznetsov A.P. Nelineynnye kolebaniya / A.P. Kuznetsov., S.P. Kuznetsov, N.M. Ryskin. – M.: Izd. Fiz.-mat. lit. – 2002. – 292 s.
7. Mangus K. Kolebaniya. Vvedeniye v issledovaniye kolebatel'nykh sistem. Per. s nem. / K. Mangus. – M.: Mir. – 1982. – 304 s.
8. Pavlovskyy M.A. Teoretychna mekhanika. Pidruchnyk / M.A. Pavlovskyy. – Do.: Tekhnika. – 2002. – 512 s.
9. Khutorova O.G. Kompyuternoye modelirovaniye fizicheskikh protsessov / O. Khutorova, Yu.M. Stenin, R.KH. Fakhrtidinov i dr. – Kazan: KGU. – 2001. – 53 s.
10. Chernysh O.M. Enerhetychni pokazately parametrychnoho kolival'nogo protsesa / O.M. Chernysh // Mekhanizatsiya silskohospodarskoho vyrobnytstva. Visnyk



Kharkivskoho nats. tekhn. unyversyteta silskoho hospodarstva im. Petra Vasylenka: Zb. nauk. prats. – 2013. – Вып. 139. – S.316 – 321.

11. Chernysh O.M. Rozrakhunkova model kolivalnoho rukhu navisnoho ochisnika holovok koreneplodiv / O.M. Chernysh, V.V Yaremenko // Vibratsiyi v tekhnitsi ta tekhnolohiyakh. Vseukrayinsky naukovu-tekhn. Zhurnal. – Vinnytsya. – 2013. – №. 1 (69). – S. 140–148.

АНАЛИЗ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ С ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ

Аннотация. В статье теоретически рассмотрены условия изменения механической энергии при определении характеристик автоколебательного движения. С энергетических позиций проанализировано два вида автоколебательных движений с мягким и жестким самовозбуждением. Выяснено положение точек статического и динамического равновесия автоколебательных систем на графических зависимостях изменения механической энергии системы от амплитуды ее колебательного движения. Определен характер устойчивого или неустойчивого статического и динамического равновесия автоколебательных систем при необходимых начальных условиях. Показано, что режимы устойчивых колебаний с конечной амплитудой возможны только в автоколебательных системах с нелинейными параметрами. Но вследствие наличия зон динамической неустойчивости перед

устойчивыми режимами автоколебаний предложено задачу получения устойчивых автоколебательных движений рассматривать в линейной постановке.

Ключевые слова: механические колебания, автоколебательное движение, изменение механической энергии, статическое и динамическое равновесие.

THE ANALYSIS OF THE SELF-OSCILLATORY PROCESS FROM THE ENERGY POINT OF VIEW

Annotation. In article requirements of change of a mechanical energy are theoretically viewed at definition of performances of the self-oscillatory motion. From energy positions it is analyzed two views of the self-oscillatory movements with the soft and rigid self-excitation. The standing of points static and a dynamic balance of the self-oscillatory systems on pictorial dependences of change of a mechanical energy of system on amplitude of its oscillate motion is found out. Character inconvertible or labile static and a dynamic balance of the self-oscillatory systems is spotted at necessary starting conditions. It is shown that modes of inconvertible oscillations with terminating amplitude are possible only in the self-oscillatory systems with non-linear parameters. But owing to presence of bands of a dynamic instability before inconvertible modes of auto-oscillations it is offered to view a problem of reception of inconvertible self-oscillatory movements in the linear statement.

Key words: mechanical oscillations, the self-oscillatory motion, mechanical energy change, static and a dynamic balance.