

Ольшанський В. П.

Харківський
національний технічний
університет сільського
господарства
ім. П. Василенка

Ольшанський С. В.

Національний технічний
університет
"Харківський
політехнічний
інститут"

Olshanskii V. P.

Kharkiv Petro Vasilenko
National Technical
University of Agriculture

Olshanskii S. V.

National Technical
University "Kharkiv
Polytechnic Institute"

УДК 534.1

ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ОСЦИЛЯТОРА ЗМІННОЇ МАСИ З ПОЗИЦІЙНИМ ТЕРТЯМ

Виведено формули для обчислення амплітуд вільних затухаючих коливань осцилятора квадратично змінної маси з позиційним тертям при відсутності реактивної сили. Точні розрахункові формули одержано методом припасування розв'язків диференціальних рівнянь руху осцилятора. Наближені розрахункові формули побудовано методом енергетичного балансу, адаптованого до розрахунку коливань систем змінної маси. Проведено порівняння числових результатів, одержаних вказаними методами і підтверджена прийнятність наближених розрахункових формул та визначена умова допустимого їх використання.

Ключові слова: осцилятор, коливання, змінна маса, позиційне тертя, енергетичний метод.

Вступ. Одним із різновидів опору рухові є позиційне тертя, коли сила тертя залежить від напрямку руху і переміщення осцилятора. Вільні коливання осцилятора сталих параметрів в умовах позиційного тертя описано в [1], [2], де розкрито їх основні закономірності. Із робіт, в яких розглядали рух осцилятора змінної маси при наявності позиційного тертя, вкажемо [3]. Там модифікованим методом енергетичного балансу побудовано наближені формули для обчислень амплітуд затухаючих коливань системи з одним ступенем вільності, маса якої змінюється у часі за лінійним законом. На відміну від згаданих публікацій, тут розглядаємо вільні коливання системи, маса якої монотонно змінюється у часі за квадратичним законом. Оскільки рух осцилятора в умовах відсутності реактивної сили описується лінійним диференціальним рівнянням типу Ейлера, є можливість у елементарних функціях побудувати точний аналітичний розв'язок задачі, який може бути еталоном при аналізі похибок використання в цьому класі задач наближених способів, таких як метод ВБК [4], метод енергетичного балансу [5] або асимптотичних методів [6], [7].

Основна частина роботи. Розглянемо спочатку вільні коливання осцилятора,

спричинені початковим відхиленням від положення рівноваги, без урахування дії сили опору. Внаслідок зміни маси вони є нестационарними, тобто відбуваються зі змінними у часі амплітудою і частотою. Рух системи в умовах відсутності опору і реактивної сили описуємо диференціальним рівнянням [4]

$$m_0(1 + \gamma t)^2 \ddot{x} + cx = 0, \quad (1)$$

у якому $\gamma = \frac{\delta}{\sqrt{m_0}}$; m_0 – початкове значення

маси; δ – коефіцієнт, який характеризує темп зміни маси у часі t , при $\delta > 0$ вона зростає, а при $\delta < 0$ – вона зменшується; c – коефіцієнт жорсткості пружини осцилятора; $x = x(t)$ – відхилення системи від положення рівноваги в момент часу t ; крапка над x означає похідну по t .

Розв'язок рівняння (1), одержаний при початкових умовах

$$x(0) = x_0; \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \quad (2)$$

має вигляд [4]:



$$x(t) = \xi^{1/2} \left[x_0 \cos(\lambda \ln \xi) + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\dot{x}_0}{\gamma} - \frac{x_0}{2} \right) \sin(\lambda \ln \xi) \right], \quad (3)$$

де $\lambda = \sqrt{\frac{c}{\delta^2} - \frac{1}{4}}$; $\xi = 1 + \gamma t$.

Розв'язок (3) був використаний в [4] для побудови графіків (осцилограм) коливань для випадків зростання ($\gamma > 0$) і зменшення ($\gamma < 0$) маси осцилятора. Було показано, що при $\gamma > 0$ амплітуда і період коливань зростають, а при $\gamma < 0$ – вони зменшуються. Аналогічні висновки раніше зроблено в роботах [6,7].

Щоб кількісно описати ці закономірності коливань, проаналізуємо розв'язок (3). З'ясуємо, яким буде рух, якщо при $t = 0$ зі стану спокою ($\dot{x}_0 = 0$) миттєво відпустити осцилятор, відхилений вліво (проти напрямку вісі OX) на a_0 . Згідно з (3) переміщення і швидкість будуть описуватись виразами:

$$x(t) = -a_0 \xi^{1/2} \left[\cos(\lambda \ln \xi) - \frac{1}{2\lambda} \sin(\lambda \ln \xi) \right]; \quad (4)$$

$$\dot{x}(t) = a_0 \gamma \xi^{-1/2} \left(\lambda + \frac{1}{4\lambda} \right) \sin(\lambda \ln \xi). \quad (5)$$

Осцилятор зупиняється, закінчивши перший розмах, коли у формулі (5)

$$\sin(\lambda \ln \xi) = 0 \Rightarrow \ln \xi = \begin{cases} \pi / \lambda \\ -\pi / \lambda \end{cases}$$

при $\gamma > 0,$
 $\gamma < 0.$

При цьому

$$\cos(\lambda \ln \xi) = -1; \quad \xi^{1/2} = \exp\left(\frac{\pi}{2\lambda} \text{sign}(\delta)\right). \quad (6)$$

Підставивши вирази (6) в (4), одержуємо формулу амплітудного відхилення a_1 осцилятора вправо

$$a_1 = a_0 \exp\left(\frac{\pi}{2\lambda} \text{sign}(\delta)\right).$$

Темп зміни амплітуд коливань характеризуємо відношенням

$$q = \frac{a_1}{a_0} = \exp\left(\frac{\pi}{2\lambda} \text{sign}(\delta)\right). \quad (7)$$

Аналіз формули (7) показує, що параметр q , за початкових умов (2), не залежить від a_0 і m_0 . Це означає, що відношення q збережеться і для амплітуд подальших розмахів. Амплітудне відхилення a_2 системи вліво при другому розмасі становитиме $a_2 = a_1 q = a_0 q^2$. Таким чином, зміна амплітуд коливань відбувається за законом геометричної прогресії

$$a_n = a_0 q^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (8)$$

причому амплітуди коливань зростають при збільшенні маси ($q < 1$) і згасають при зменшенні маси осцилятора ($q < 1$). Ці закономірності графічно відображено в [4].

Розглянемо далі як змінюються при коливаннях тривалості розмахів або напівперіоди. Користуючись тим, що

$$\xi_1 = (1 + \gamma t_1) = \exp\left(\frac{\pi}{\lambda} \text{sign}(\delta)\right) = q^2,$$

знаходимо тривалість першого розмаху

$$t_1 = \frac{1}{\gamma} (q^2 - 1) = \frac{\sqrt{m_0}}{\delta} (q^2 - 1).$$

Вона залежить від початкового значення маси m_0 .

В кінці першого розмаху маса осцилятора m_1 дорівнює

$$m_1 = m_0 (1 + \gamma t_1)^2 = m_0 q^4.$$

Вона є початковою для розрахунку тривалості t_2 другого розмаху, бо

$$t_2 = \frac{\sqrt{m_1}}{\delta} (q^2 - 1) = \frac{\sqrt{m_0}}{\delta} q^2 (q^2 - 1) = t_1 q^2.$$

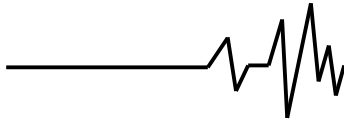
В кінці другого розмаху маємо

$$m_2 = m_1 (1 + \gamma t_2)^2 = m_0 q^8.$$

Тривалість третього розмаху становить

$$t_3 = \frac{\sqrt{m_2}}{\delta} (q^2 - 1) = \frac{\sqrt{m_0}}{\delta} q^4 (q^2 - 1) = t_1 q^4.$$

Отже, тривалості напівциклів теж змінюються за законом геометричної прогресії зі знаменником q^2 . Таким чином,



$$t_n = t_1 q^{2n-2}, n = 1, 2, 3, \dots$$

Обчислення часу, за який система робить n розмахів, зводиться до формули

$$t_p(n) = t_1 (1 + q^2 + q^4 + \dots + q^{2n-2}). \quad (9)$$

Використовуючи формулу суми членів геометричної прогресії, виразові (9) надаємо більш компактний вигляд

$$t_p(n) = \frac{\sqrt{m_0}}{\delta} (q^{2n} - 1).$$

При $\delta < 0$, або $q < 1$, час руху осцилятора обмежений умовою невід'ємності маси. Граничне значення часу руху становить

$$t_p = -\frac{\sqrt{m_0}}{\delta}.$$

Прирівнявши $t_p(n)$ і t_p , одержуємо

$$1 - q^{2n} = 1,$$

що можливо коли $n \rightarrow \infty$. Отже, осцилятор з квадратичним законом зменшення маси за обмежений час руху робить нескінченну кількість розмахів, що є своєрідним парадоксом в теорії коливань.

Розглянемо далі нестационарні коливання при наявності позиційного тертя. Його сутність викладена в [1], [2] і полягає в тому, що

$$x(t) = -a_0 \xi_1^{1/2} \left[\cos(\lambda_1 \ln \xi_1) - \frac{1}{2\lambda_1} \sin(\lambda_1 \ln \xi_1) \right], \quad (11)$$

$$\dot{x}(t) = \frac{a_0 \gamma_1 c_1}{\lambda_1 \delta^2} \xi_1^{-1/2} \sin(\lambda_1 \ln \xi_1). \quad (12)$$

$$\text{Тут } \lambda_1 = \sqrt{\frac{c_1}{\delta^2} - \frac{1}{4}}; \xi_1 = 1 + \gamma_1 t.$$

Користуючись виразами (11), (12), обчислимо швидкість v_0 і масу M_2 осцилятора, з яким він проходить положення $x = 0$. В цей момент часу $\xi_1 = \xi_1^*$, причому

$$tg(\lambda_1 \ln \xi_1^*) = 2\lambda_1. \quad (13)$$

Із (13) випливає, що

$$\lambda_1 \ln \xi_1^* = f(\lambda_1) = \begin{cases} \arctg(2\lambda_1) \\ \arctg(2\lambda_1) - \pi \end{cases}$$

при $\delta > 0$
 $\delta < 0$.

жорсткість пружини осцилятора c_1 при русі системи до положення рівноваги менша, ніж жорсткість пружини c_2 , коли осцилятор віддаляється від положення $x = 0$. В моменти амплітудного відхилення системи відбувається стрибкоподібна зміна більшої жорсткості на меншу.

Уведемо позначення:

$$c_1 = c - \Delta c; c_2 = c + \Delta c, \text{ де } c - \text{ півсума жорсткостей, а } \Delta c - \text{ їх різниця. Розглянемо перший розмах коливань системи, зумовлений початковим відхиленням } x_0 = -a_0. \text{ На першому етапі, при недодатніх } x, \text{ рух описуємо рівнянням}$$

$$M_1 (1 + \gamma_1 t)^2 \ddot{x} + c_1 x = 0, \quad (10)$$

у якому $\gamma_1 = \frac{\delta}{\sqrt{M_1}}$, M_1 - початкове

значення маси осцилятора; c_1 - жорсткість пружини при її розвантаженні.

Розв'язавши (10), при $\dot{x}(0) = 0$, замість (4) і (5), одержуємо

Тоді

$$\sin(\lambda_1 \ln \xi_1^*) = \frac{2\lambda_1}{\sqrt{1 + 4\lambda_1^2}} \text{sign}(\delta) = \frac{\delta \lambda_1}{\sqrt{c_1}};$$

$$(\xi_1^*)^{-1/2} = \exp\left(-\frac{1}{2\lambda_1} f(\lambda_1)\right).$$

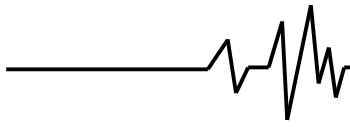
Підставивши ці вирази в (12), знаходимо, що

$$v_0 = \frac{a_0 \sqrt{c_1}}{\sqrt{M_1}} \exp\left(-\frac{1}{2\lambda_1} f(\lambda_1)\right). \quad (14)$$

Маса осцилятора в положенні $x = 0$ становить

$$M_2 = M_1 (\xi_1^*)^2 = M_1 \exp\left(\frac{2}{\lambda_1} f(\lambda_1)\right). \quad (15)$$

Це значення маси є початковим на другому етапі руху де $0 \leq x \leq a_1$. Тут рух описуємо рівнянням



$$M_2(1 + \gamma_2 t)^2 \ddot{x} + c_2 x = 0, \quad (16)$$

у якому $\gamma_2 = \frac{\delta}{\sqrt{M_2}}$; c_2 – жорсткість пружини при її навантаженні.

Уводимо новий відлік часу і знаходимо розв'язок рівняння (16) при початкових умовах

$$x(0) = 0; \quad \dot{x}(0) = v_0.$$

Використовуючи (3), його подаємо у вигляді

$$x(t) = \frac{v_0}{\lambda_2 \gamma_2} \xi_2^{1/2} \sin(\lambda_2 \ln \xi_2), \quad (17)$$

де $\lambda_2 = \sqrt{\frac{c_2}{\delta^2} - \frac{1}{4}}$; $\xi_2 = 1 + \gamma_2 t$.

Щоб знайти амплітудне відхилення a_1 в кінці першого розмаху, прирівняємо до нуля похідну по t від (17). Така операція приводить до трансцендентного рівняння

$$a_1 = a_0 \frac{\sqrt{c_1}}{\sqrt{c_2}} \frac{\sqrt{M_2}}{\sqrt{M_1}} \exp \left[\frac{1}{2\lambda_2} \psi(\lambda_2) - \frac{1}{2\lambda_1} f(\lambda_1) \right].$$

Приймаючи до уваги (15) і залежність

$$\frac{1}{2\lambda_1} f(\lambda_1) + \frac{1}{2\lambda_2} \psi(\lambda_2) = \begin{cases} \frac{1}{2\lambda_1} \arctg(2\lambda_1) + \frac{1}{2\lambda_2} (\pi - \arctg(2\lambda_2)) & \delta > 0 \\ \frac{1}{2\lambda_1} (\arctg(2\lambda_1) - \pi) - \frac{1}{2\lambda_2} \arctg(2\lambda_2) & \delta < 0, \end{cases} \text{ при}$$

одержуємо

$$q = \frac{a_1}{a_0} = \frac{\sqrt{c_1}}{\sqrt{c_2}} \begin{cases} \exp \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1} \arctg(2\lambda_1) - \frac{1}{\lambda_2} \arctg(2\lambda_2) \right] \right\} & \delta > 0 \\ \exp \left\{ \frac{1}{2} \left[-\frac{\pi}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_1} \arctg(2\lambda_1) - \frac{1}{\lambda_2} \arctg(2\lambda_2) \right] \right\} & \delta < 0. \end{cases} \quad (18)$$

Як бачимо, тут q теж не залежить від значення маси при m_0 і відхилення a_0 . Тому і при наявності позиційного тертя, зміна амплітуд розмахів відповідає геометричній прогресії. Обчислення амплітуд розмахів зводиться до використання формул (8) і (18).

Із (18), як окремі випадки, впливають відомі залежності. Так, у випадку сталої маси

$$\text{tg}(\lambda_2 \ln \xi_2^*) = -2\lambda_2,$$

що має корені

$$\lambda_2 \ln \xi_2^* = \psi(\lambda_2) = \begin{cases} \pi - \arctg(2\lambda_2) \\ -\arctg(2\lambda_2) \end{cases}$$

$\delta > 0$
при $\delta < 0$.

Оскільки

$$\sin(\lambda_2 \ln \xi_2^*) = \frac{2\lambda_2}{\sqrt{1+4\lambda_2^2}} \text{sign}(\delta) = \frac{\delta \lambda_2}{\sqrt{c_2}};$$

$$(\xi_2^*)^{1/2} = \exp \left(\frac{1}{2\lambda_2} \psi(\lambda_2) \right),$$

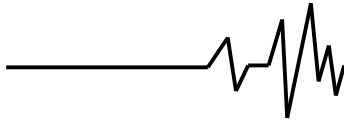
то згідно з (14) і (17)

$\delta \rightarrow 0, \lambda_1 \rightarrow \infty, \lambda_2 \rightarrow \infty$ і (18) приймає компактний вигляд

$$q = \sqrt{c_1} / \sqrt{c_2}, \quad (19)$$

що надруковано в [1], [2].

При відсутності позиційного тертя ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, c_1 = c_2 = c$) формула (18) переходить в (7).



Перетворюючи записані вище вирази, можна вивести формули для обчислення тривалості напівциклів. Наприклад, тривалість руху у першому напівциклі становить

$$t_1 = \frac{\sqrt{M_1}}{\delta} \left(q^2 \frac{c_2}{c_1} - 1 \right).$$

Але для розрахунку амплітуд коливань не потрібні тривалості розмахів. Тому, не зупиняючись на подальшому обчисленні t_2, t_3 і т.д., розглянемо наближений другий спосіб розрахунку амплітуд.

Запишемо рівняння руху осцилятора у вигляді

$$M_1 \ddot{x} + (c + \Delta c \cdot \text{sign } x \cdot \text{sign } \dot{x}) x = \Phi(t, \dot{x}),$$

де

$$\Phi(t, \dot{x}) = -M_1 (2\gamma_1 t + \gamma_1^2 t^2) \ddot{x}. \quad (20)$$

$$A = -M_1 a^2 \omega^3 \int_0^{\pi/\omega} (2\gamma_1 t + \gamma_1^2 t^2) \sin(\omega t) \cos(\omega t) dt. \quad (23)$$

Інтеграл в (23) відноситься до табличних [8] і виражаються через елементарні функції. Тому

$$\begin{aligned} A &= \frac{\pi}{2} M_1 a^2 \omega \gamma_1 \left(1 + \frac{\pi \gamma_1}{2\omega} \right) = \\ &= \frac{\pi}{2} \delta \left(\sqrt{c} + \frac{\pi \delta}{2} \right) a^2. \end{aligned}$$

Зміна потенціальної енергії на першому розмахі становить

$$\Delta u = \frac{1}{2} (c_2 a_1^2 - c_1 a_0^2).$$

Прирівнявши Δu до A , одержуємо рівняння

$$\left(\sqrt{c_2} a_1 \right)^2 - \left(\sqrt{c_1} a_0 \right)^2 = \pi \delta a^2 \left(\sqrt{c} + \frac{\pi \delta}{2} \right). \quad (24)$$

Щоб розв'язати його, аналогічно [3], приймаємо

$$a = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{c_2} a_1 + \sqrt{c_1} a_0}{\sqrt{c}}. \quad (25)$$

Після підстановки (25) в (24), отримуємо рівняння, з якого знаходимо a_1 , а потім відношення амплітуд

Переміщення осцилятора на першому розмахі апроксимуємо виразом [3]

$$x = -a \cos(\omega t),$$

в якому $\omega = \sqrt{c / M_1}$; a – невідома константа.

Для уведеної апроксимації

$$\dot{x} = a\omega \sin(\omega t); \quad \ddot{x} = a\omega^2 \cos(\omega t). \quad (21)$$

Обчислимо роботу сили $\Phi(t, \dot{x})$ на першому розмахі

$$A = \int_0^{\pi/\omega} \Phi(t, \dot{x}) \dot{x} dt. \quad (22)$$

Підставивши вирази (20) і (21) в (22), одержуємо

$$q = \frac{\sqrt{c_1} (1 + \beta / 4)}{\sqrt{c_2} (1 - \beta / 4)}. \quad (26)$$

$$\text{Тут } \beta = \frac{\pi \delta}{\sqrt{c}} \left(1 + \frac{\pi \delta}{2\sqrt{c}} \right).$$

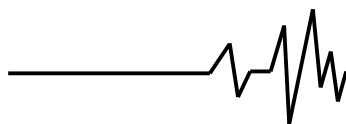
Для осцилятора сталої маси ($\delta = \beta = 0$) із (26) впливає формула (19). При відсутності позиційного тертя ($c_1 = c_2 = c$) вираз (26) набуває вигляд

$$q = \frac{1 + \beta / 4}{1 - \beta / 4},$$

що за певних умов є альтернативою до (7).

Таким чином, розрахунок амплітуд коливань викладеним методом енергетичного балансу зводиться до використання формул (8) і (26). Похибка енергетичного метода пов'язана лише з обчисленням q .

Інформацію про точність обчислення q можна отримати з табл. 1, при $\delta > 0$ і табл. 2, при $\delta < 0$. В чисельниках таблиць записано точні значення q , до яких приводять формули (18), а в знаменниках – наближені значення, знайдені по формулі (26).



Таблиця 1

Значення q при зростанні маси осцилятора ($\delta > 0$)

$\frac{\delta}{\sqrt{c}}$	Значення q			
	$\frac{\Delta c}{c} = 0,05$	$\frac{\Delta c}{c} = 0,1$	$\frac{\Delta c}{c} = 0,15$	$\frac{\Delta c}{c} = 0,2$
0,001	<u>0,953</u> 0,953	<u>0,906</u> 0,906	<u>0,861</u> 0,861	<u>0,818</u> 0,818
0,005	<u>0,959</u> 0,959	<u>0,912</u> 0,912	<u>0,867</u> 0,867	<u>0,823</u> 0,823
0,010	<u>0,966</u> 0,967	<u>0,919</u> 0,919	<u>0,873</u> 0,874	<u>0,830</u> 0,830
0,050	<u>1,029</u> 1,035	<u>0,979</u> 0,985	<u>0,930</u> 0,936	<u>0,884</u> 0,889
0,100	<u>1,113</u> 1,141	<u>1,059</u> 1,085	<u>1,007</u> 1,032	<u>0,957</u> 0,980

Таблиця 2

Значення q при зменшенні маси осцилятора ($\delta > 0$)

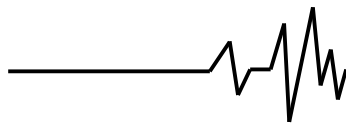
$-\frac{\delta}{\sqrt{c}}$	Значення q			
	$\frac{\Delta c}{c} = 0,05$	$\frac{\Delta c}{c} = 0,1$	$\frac{\Delta c}{c} = 0,15$	$\frac{\Delta c}{c} = 0,2$
0,001	<u>0,950</u> 0,950	<u>0,903</u> 0,903	<u>0,858</u> 0,858	<u>0,815</u> 0,815
0,005	<u>0,944</u> 0,944	<u>0,897</u> 0,898	<u>0,853</u> 0,853	<u>0,810</u> 0,810
0,010	<u>0,936</u> 0,937	<u>0,890</u> 0,891	<u>0,846</u> 0,847	<u>0,804</u> 0,804
0,050	<u>0,879</u> 0,884	<u>0,836</u> 0,841	<u>0,794</u> 0,800	<u>0,754</u> 0,760
0,100	<u>0,812</u> 0,833	<u>0,772</u> 0,792	<u>0,733</u> 0,753	<u>0,695</u> 0,715

Розрахунки підтверджують, що похибки методу енергетичного балансу малі, коли повільна зміна маси осцилятора. Умовою застосування енергетичного методу можна вважати нерівність $|\delta|/\sqrt{c} \leq 0,1$.

Для додатних δ (в табл. 1) збільшення відношення δ/\sqrt{c} приводить до зростання q , яке стає більшим одиниці. При $q > 1$ маємо не затухання, а розгойдування коливань, тому що зменшення амплітуд, внаслідок позиційного тертя не компенсує їх зростання, спричинене збільшенням маси, в умовах відсутності реактивної сили. У випадку взаємокомпенсації дії вказаних супротивних чинників $q = 1$. Цей особливий випадок коливань характеризується сталими амплітудами, але змінною у часі

частотою. Згідно з наближеною формулою (26) він має місце, коли $c_1 c_2^{-1} = \eta$, де $\eta = (1 - \beta/4)(1 + \beta/4)^{-1}$. Якщо $c_1 c_2^{-1} < \eta$, то вільні коливання затухають.

Висновки. Проведене дослідження показало, що зміна амплітуд коливань осцилятора з квадратичною зміною маси, в умовах позиційного тертя, при відсутності реактивної сили, відповідає геометричній прогресії. За певних умов, при збільшенні маси осцилятора, можливі коливання зі зростанням амплітуд. Такий режим розгойдування коливань не можливий при зменшенні маси осцилятора. При повільній зміні маси осцилятора наближений розрахунок амплітуд можна проводити методом енергетичного балансу.

**Список використаних джерел**

1. Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний/ В.Л. Бидерман – М.: Высшая школа, 1980. – 408с.

2. Сурьянинов Н.Г. Теоретические основы динамики машин / Н.Г. Сурьянинов, А.Ф. Дащенко, П.А. Белоус. – Одесса: ОГПУ, 2000. – 306 с.

3. Ольшанський В.П. Нестационарные колебания механической системы линейно-переменной массы с комбинированным трением/ В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский // Вісник ХНТУСГ: Проблеми надійності машин та засобів механізації сільськогосподарського виробництва. – Х.: ХНТУСГ, 2014. Вип. 151, – С. 324-333.

4. Ольшанський В.П. Метод ВБК в расчётах нестационарных колебаний осцилляторов / В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский. – Х.: Миськдрук, 2014. – 264 с.

5. Ольшанський В.П. Вільні коливання осцилятора змінної маси з сухим тертям / В.П. Ольшанський, С.В. Ольшанський // Вібрації в техніці та технологіях. Всеукр. наук. техн. журнал. – Вінниця – Вип 1 (73), 2014 – С. 33-39.

6. Голоскоков Е.Г. Нестационарные колебания деформируемых систем / Е.Г. Голоскоков, А.П. Филиппов. – К.: Наукова думка, 1977. – 340 с.

7. Митропольский Ю.А. Избранные труды в 2-х томах / Ю.А. Митропольский. – К.: Наукова думка, 2012. – 504 с.

8. Градштейн И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М.: Наука, 1962. – 1100 с.

Список джерел в транслітерації

1. Biderman V.L. Prikladnaja teorija mehanicheskikh kolebanij/ V.L. Biderman – M.: Vysshaja shkola, 1980. – 408s.

2. Surjaninov N.G. Teoreticheskie osnovy dinamiki mashin / N.G. Surjaninov, A.F. Dashhenko, P.A. Belous. – Odessa: OGPU, 2000. – 306 s.

3. Olshanskij V.P. Nestacionarnye kolebanija mehanicheskoy sistemy linejno-peremennoj massy s kombinirovannym treniem/ V.P. Olshanskij, S.V. Olshanskij // Visnik HNTUSG: Problemi nadijnosti mashin ta zasobiv mehanizacii silskogospodarskogo virobnictva. – H.: HNTUSG, 2014. Vip. 151, – S. 324-333.

4. Olshanskij V.P. Metod VBK v raschjotah nestacionarnyh kolebanij osciljatorov / V.P. Olshanskij, S.V. Olshanskij. – H.: Miskdruk, 2014. – 264 s.

5. Olshanskij V.P. Vilni kolivannija osciljatora zminnoji masi z suhim tertjam / V.P. Olshanskij, S.V. Olshanskij // Vibracii v tehnicji ta tehnologijah. Vseukr. nauk. tehn. zhurnal. – Vinnicja – Vip 1 (73), 2014 – S. 33-39.

6. Goloskokov E.G. Nestacionarnye kolebanija deformiruemyh sistem / E.G. Goloskokov, A.P. Filippov. – K.: Naukova dumka, 1977. – 340 s.

7. Mitropolskij Ju.A. Izbrannie trudi v 2-h tomah / Ju.A. Mitropolskij. – K.: Naukova dumka, 2012. – 504 s.

8. Gradshtejn I.S. Tablicy integralov, summ, rjadov i proizvedenij / I.S. Gradshtejn, I.M. Ryzhik. – M.: Nauka, 1962. – 1100 s.

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОСЦИЛЛЯТОРА ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ С ПОЗИЦИОННЫМ ТРЕНИЕМ

Аннотация. Выведены формулы для вычисления амплитуд свободных затухающих колебаний осциллятора квадратично переменной массы с позиционным трением при отсутствии реактивной силы. Точные расчётные формулы получены методом припасовывания решений дифференциальных уравнений движения осциллятора. Приближённые расчётные формулы построены методом энергетического баланса, который адаптирован к расчёту колебаний систем переменной массы. Проведено сравнение численных результатов, полученных указанными методами и подтверждена удовлетворительность приближённых расчётных формул и определено условие их применимости.

Ключевые слова: осциллятор, колебания, переменность массы, позиционное трение, энергетический метод.

FRE VIBRATIONS OF OSCILATOR VARIABLE MASS WITH POSITIONAL FRICTION

Annotation. Formulas for calculating the amplitudes of free damped vibration oscillator quadratic variable mass of positional friction in the absence of reactive power were constructed. Exact formulas obtained by adjustment of differential equations of motion of the oscillator. Approximate formulas built using energy balance method, adapted to the calculation of the variable mass oscillator. A comparison of numerical results, obtained by this method and confirmed the acceptability of approximate calculation formulas and the conditions of acceptable use.

Key words: oscillator, vibrations, variable mass, positional friction, the energy method.