Пукач П. Я.

Національний університет "Львівська політехніка"

Pukach P. Ya.

Lviv Polytechnic National University

УДК 534.1+62-5

ДИНАМІЧНІ ЯВИЩА У СИЛЬНО НЕЛІНІЙНИХ НЕАВТОНОМНИХ СИСТЕМАХ ІЗ ЗОСЕРЕДЖЕНИМИ МАСАМИ

Викладено загальну методику дослідження деяких важливих з практичної точки зору класів нелінійних систем – неавтономних систем із сильною нелінійністю. Розроблено методику вивчення резонансних явищ в них. Основна ідея розробленої у статті методики дослідження резонансних явищ базується на ідеї використання спеціальних періодичних Ateb-функцій при побудові розв'язків незбурених аналогів систем.

Ключові слова: *нелінійні коливання, сильно нелінійна система, резонанс, спеціальні функції, амплітудно-частотна характеристика.*

Актуальність теми. Постановка проблеми. Проблема розроблення ефективних аналітичних методів, які дозволяють оптимальні інженерні рішення за рахунок вибору параметрів коливальної системи, тісно зв'язана з проблемою побудови і дослідження розв'язків звичайних диференціальних рівнянь, що описують рухи механічних систем (див. [1 - 4] та ін.). Коливальні процеси у достатній мірі вивчені для випадків, коли математичними моделями коливань систем із зосередженими масами є лінійні диференціальні рівняння. Близькими до лінійних є так звані квазілінійні системи, тобто системи, у яких максимальні значення нелінійних сил у порівнянні із лінійною складовою відновлюючої сили є малими. Теорія та аналітичні методи дослідження багатьох класів квазілінійних систем будуються, як правило, на різноманітних модифікаціях методів збурень, зокрема, асимптотичних методах нелінійної механіки. Вони дозволили описати та встановити низку особливостей коливальних процесів у квазілінійних системах, які не властиві лінійним системам з незмінними в часі фізико-механічними властивостями. Мова йде в першу чергу про резонансні явища [5-7] (головний та комбінаційні), стійкість процесу [8, 9]. Що стосується більш складних систем, систем із сильною нелінійністю, то для них лише в окремих випадках вдається застосувати аналітичні методи дослідження. До таких систем можна віднести нелінійні автономні системи, відновлююча сила у яких описується степеневою або близькою до степеневої нелінійністю [10].

У статті розглядаються системи із одним ступенем вільності. Вони піддаються дії збурення. Збурення описується аналітичними періодичними за часовою змінною функціями, максимальне його значення є малим у порівнянні із максимальним значенням відновлюючої сили. Основна ідея розробленої у статті методики дослідження резонансних явищ вказаного вище класу систем базується на ідеї використання спеціальних періодичних Ateb-функцій при побудові розв'язків незбурених аналогів систем та адаптації загальних ідей методів збурень на випадок неавтономних систем.

Невирішені раніше частини загальної проблеми, яким присвячена стаття. До цього часу не існує загальних аналітичних результатів аналізу динамічних процесів у неавтономних сильно нелінійних системах, точніше кажучи, таких сильно нелінійних системах, які піддаються дії зовнішнього періодичного збурення (навіть малого за величиною). У той же час вказані системи потребують грунтовного вивчення з огляду їх практичного застосування у промисловості. Крім того, коливальні процеси розглядуваного у статті типу мають цілу низку особливостей, які не властиві лінійним та навіть квазілінійним системам. Саме на ці обставини звернута особлива увага у статті.

Метою даної роботи є поширення ідей та методів нелінійної механіки і теорії коливань на новий клас коливальних систем із зосередженими масами.

Динамічні явища у сильно нелінійних системах дискретної структури з одним ступенем вільності. Розроблено методику дослідження резонансних коливань систем із одним ступенем вільності, відновлююча сила яких апроксимується близьким до степеневого законом. В такому випадку диференціальне рівняння, яке описує вказані коливання, представляється у вигляді

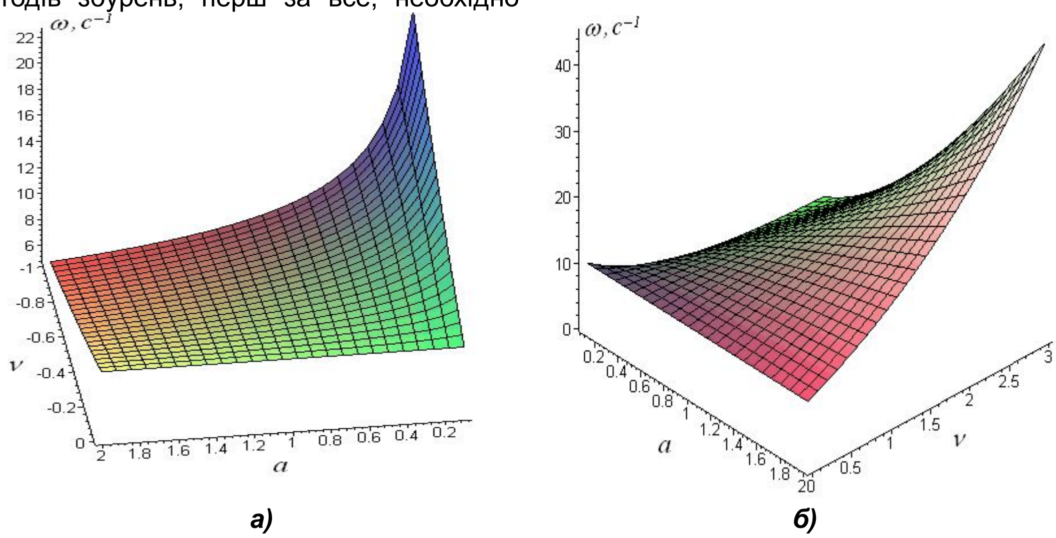
$$m\frac{d^2x}{dt^2}+cx^{\nu+1}=\varepsilon f\left(x,\frac{dx}{dt},\theta\right), \qquad (1)$$

де m - маса матеріальної точки; x - її координата у довільний момент часу; $F(x)=cx^{\nu+1}$ - функція, яка описує головну частину відновлюючої сили; c,ν - сталі, причому $\nu+1=\frac{2p+1}{2q+1}$ ($p,q=0,1,2,...$); $\varepsilon f\left(x,\frac{dx}{dt},\theta\right)$ - аналітична 2π - періодична за $\theta=\mu t$ функція, μ - частота зовнішнього періодичного збурення, яке діє на систему; ε - малий параметр, який вказує на малу величину зовнішнього періодичного збурення та незначне відхилення відновлюючої сили від степеневого закону. Треба відзначити, що функція $\varepsilon f\left(x,\frac{dx}{dt},\theta\right)$ може описувати також і нелінійні сили опору, максимальне значення яких є малою величиною у порівняння із максимальним значенням відновлюючої сили $F(x)=cx^{\nu+1}$. Це дозволяє використати загальні ідеї методів збурень для побудови розв'язку нелінійного рівняння (1). Відповідно до методів збурень, перш за все, необхідно описати динамічний процес незбуреної ($\varepsilon=0$) або породжуючої системи, яка відповідає (1). Її аналогом є нелінійне рівняння

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+cx^{\nu+1}=0. \qquad (2)$$

Як показано в [11], розв'язок рівняння (2) виражається за допомогою періодичних Ateb-функцій у вигляді $x=aca\left(\nu+1,1,\omega(a)t+\psi\right)$, де a - амплітуда, $\omega(a)t+\psi$ - фаза коливань незбуреного руху, $\omega(a)$ - частота коливань, яка дорівнює $\omega(a)=\sqrt{\frac{c(\nu+2)}{2m}}a^{\frac{\nu}{2}}$. Вже для незбуреного руху частота власних коливань залежить не тільки від маси матеріального тіла та коефіцієнта пропорційності у відновлювальній силі (аналога коефіцієнту жорсткості), але й від амплітуди та параметру нелінійності ν. В цьому полягає основна відмінність розглядуваного класу систем від лінійних. Із побудовою розв'язку сильно нелінійних систем, який враховував би вказані вище особливості їх динаміки, пов'язані основні проблеми дослідження резонансних коливань у них. На рис. 1 представлено залежність "частоти" $\omega(a)$ від параметрів, які визначають динамічний процес незбуреного руху, а на рис. 2 – відношення періодів власних нелінійних коливань до лінійних ($\nu=0$), тобто

$$\eta=\frac{\Pi(1,\nu+1)}{\omega(a)}/\pi\sqrt{\frac{m}{c}}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\nu+2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\nu+2}\right)}\sqrt{\frac{\nu+2}{2}}a^{\frac{\nu}{2}}.$$



а) б)

Рис. 1. Залежності частоти власних коливань від амплітуди та параметру нелінійності ν для малих – а) та великих – б) його значень

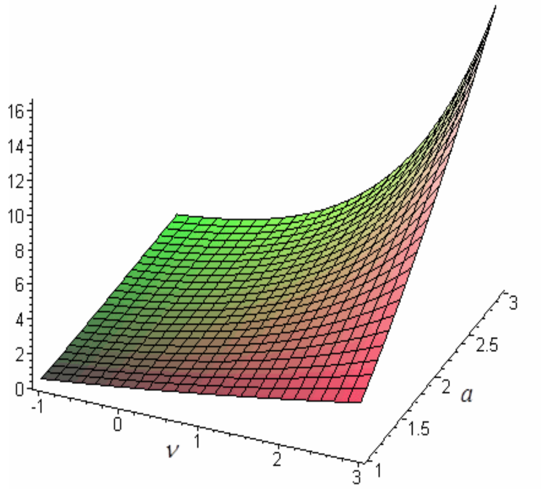


Рис. 2. Відношення періоду коливань сильно нелінійної моделі до періоду коливань лінійної моделі

Параметри a та ψ для незбуреного руху є сталими величинами і визначаються із початкових умов $x(0)=x_0$, $\frac{dx}{dt}(0)=V_0$ та зв'язані співвідношеннями $\left(\frac{x_0}{a}\right)^{\nu+2}+\left(\frac{V_0(\nu+2)}{2a\omega(a)}\right)^2=1$, $cta(\nu+1,1,\psi)=\frac{2\omega(a)}{\nu+2}$. Представлені вище графічні залежності показують: 1) для систем малої жорсткості $-1<\nu<0$ частота власних коливань для більших значень амплітуди є меншою; 2) при наближенні параметру нелінійності ν до нуля процес у системі стає близьким до ізохронного; 3) для систем значної жорсткості та значень амплітуд коливань менших за 1 для більших значень параметру нелінійності частота власних коливань є меншою.

Резонансні явища у сильно нелінійних системах дискретної структури. Зупинимось тепер на умовах резонансу у сильно нелінійних систем, взявши за модель рівняння (2). Власна частота коливань системи визначається не тільки фізико-механічними її характеристиками (параметрами m, c, ν), але й амплітудою a. Періодичний процес незбуреного руху описується періодичними Ateb-функціями. Період 2Π останніх за аргументом $\psi=\omega(a)t$ визначається співвідношенням

$$\Pi=\Pi(1,\nu+1)=\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{\nu+2}\right)/\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\nu+2}\right).$$

Це вимагає для розглядуваного класу систем за поняття головного резонансу прийняти похідне від класичного поняття, а саме - період власних коливань співпадає із періодом збурення. Тобто умова резонансу трансформується до вигляду $\frac{\pi}{\mu}=\frac{\Pi(1,\nu+1)}{\omega(a)}$.

Тут і нижче під значенням параметру μ будемо розуміти частоту зовнішнього періодичного збурення. Таким чином, явище резонансу у розглядуваних системах має місце при виконанні умови $\mu=\frac{\pi}{\Pi(1,\nu+1)}\omega(a)$.

Беручи до уваги вигляд функції, яка описує "власну частоту", отримуємо значення параметру a, за якого має місце резонансне явище: $a^*=\left(\frac{\Pi(1,\nu+1)}{\pi}\frac{\mu}{k}\left(\frac{2}{\nu+2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{\nu}}$,

де $k=\sqrt{\frac{c}{m}}$. Таким чином, резонансне явище у досліджуваного класу динамічних системах буде мати місце за умови, коли амплітуда коливань є близькою до a^*. Якщо остання є більшою за a^*, то наявні в реальних системах сили опору призводять до того, що з часом амплітуда коливань буде зменшуватись до величини a^*, а в подальшому наступає явище резонансу. У цьому полягає принципова відмінність резонансних явищ у сильно нелінійних системах у порівнянні з квазілінійними. Якщо ж у збуреній сильно нелінійній автономній системі існує один або декілька стаціонарних режимів коливань, то дослідження реакції системи на періодичне збурення потребує окремого розгляду. На рис. 3 подано графічні залежності амплітуди резонансу від параметра нелінійності ν. Зокрема, із поданих графічних залежностей випливає, що для «м'яких» систем ($-1<\nu<0$) резонансне явище можливе у випадку, коли частота власних коливань лінійного аналогу системи є меншою за частоту вимушуючої сили; із наближенням параметру ν до - 1 амплітуда резонансу a^* стрімко зростає. Що стосується «жорстких» систем ($\nu>0$), то резонансне явище можливе у випадку, коли частота лінійного аналогу системи є більшою за частоту вимушуючої сили; для більших значень параметру нелінійності системи та частоти вимушуючої сили амплітуда резонансу є більшою. На рис. 4 представлені графічні залежності амплітуди резонансу a^* від параметру нелінійності ν за різних значень частоти вимушуючої сили. На представлених графічних залежностях заштрихованій області відповідає значення амплітуди коливань, за якої резонансні коливання будуть відсутні при довільному значенні частоти обмеженої за величиною періодичної сили.

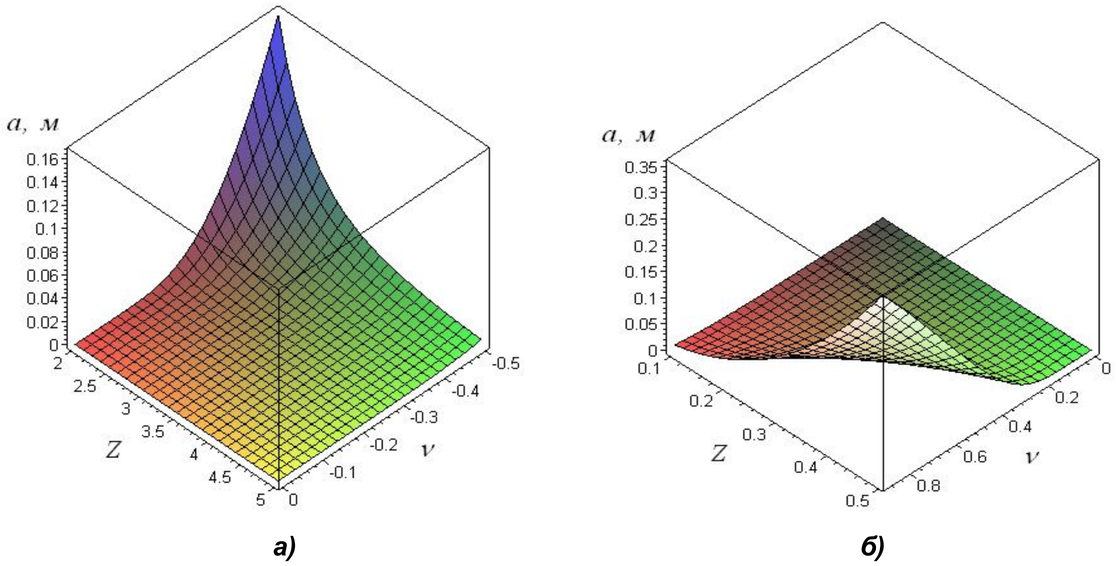


Рис. 3. Залежність амплітуди резонансу від параметрів ν та $z=\mu/k$ для випадків $-1<\nu<0$ – а) та $\nu>0$ – б)

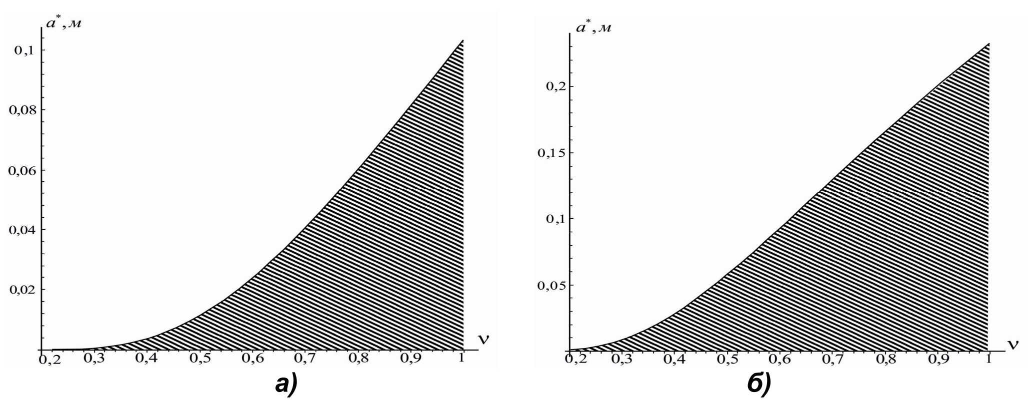


Рис. 4. Залежність порогової амплітуди резонансу від параметру ν за різних значень частоти вимушуючої сили для: $\mu=8c^{-1}$ – а) та $\mu=15c^{-1}$ – б)

Висновки. Отримані у роботі аналітичні результати та графічні залежності показують: для систем більшої жорсткості величина порогового значення амплітуди є більшою. Так, за частоти зовнішнього періодичного збурення $\mu = 8c^{-1}$ зростання показника нелінійності ν від 2/5 до 4/5 спричиняє зростання порогової амплітуди від 0,012 м до 0,04 м; для більших значень частоти вимушуючої сили (за всіх інших незмінних параметрів) величина порогового значення амплітуди є більшою. За частоти зовнішнього періодичного збурення $\mu = 8c^{-1}$ та $\nu = 2/3$ величина порогового значення амплітуди рівна 0, 04 м, а при $\mu = 15c^{-1}$ та $\nu = 2/3$ – 0,1 м. Наведені вище особливості необхідно враховувати при дослідженні резонансних явищ.

Список використаних джерел

1. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний / В. Л. Бидерман В. Л.– М.: Высшая школа, 1980. – 408 с.
2. Кузмак Г. Е. Ассимптотические решения нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами / Г. Е. Кузмак // ПММ. – 1959. – 23. – №3. – С. 515 – 526.
3. Савин Г. Н. Динамика нити переменной длины / Г. Н. Савин, О. А. Горошко.– Киев: Издательство Академии наук Украинской ССР, 1962. – 319 с.
4. Самойленко А. М. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк. – Киев: Издательство Киевского университета, 1980. – 80 с.
5. Боголюбов Н. Н. Ассимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. – Москва: Наука, 1974. – 501с.
6. Гребенников Е. А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем / Е. А. Гребенников, Ю. А. Рябов. – М.: Наука, 1979. – 432 с.
7. Пукач П. Я. Резонансні явища у сильно нелінійних коливальних системах / П. Я. Пукач, П. В. Філь // Вісник Східноукраїнського національного університету ім. Даля. – 2013. – 56, № 5(194), ч.2.– С. 192 – 195.
8. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений / Р. Беллман – М.: ИЛ, 1954. – 216 с.
9. Перестюк М. О. Теорія стійкості: [Навч. посібник] / М. О. Перестюк, О. С. Чернігова. – К.: ВПС "Київ", 2002. – 203 с.
10. Мышкис А. Д. Периодические колебания в нелинейных одномерных сплошных средах / А. Д. Мышкис, А. М. Филимонов // В кн. IX Межд. конф. по нелинейным колебаниям. Ч.1.– Киев: Наукова думка, 1984. – С. 274 – 276.
11. Сеник П. М. Асимптотический метод и периодические Ateb – функции в теории существенно нелинейных колебаний / П. М. Сеник, И. П. Смерека, Б. И. Сокил // Ассимптотические и качественные методы в теории дифференциальных уравнений: сборник научных трудов.– Киев: Издательство Института математики,1977.– С.143 – 156.

Список джерел в транслітерації

1. Biderman V. L. Teoriya mekhanicheskikh kolebaniy / V. L. Biderman V. L.– M.: Vysshaya shkola, 1980. – 408 s.
2. Kuzmak G. Ye. Acsimptoticheskiye resheniya nelineynykh differentsial'nykh uravneniy vtorogo poryadka s peremennymi koeffitsiyentami / G. Ye. Kuzmak // PMM. – 1959. – 23. – №3. – S. 515 – 526.
3. Savin G. N. Dinamika niti peremennoy dliny / G. N. Savin, O. A. Goroshko. – Kiyev: Izdatel'stvo Akademii nauk Ukrainskoy SSR, 1962. – 319 s.
4. Samoylenko A. M. Differentsial'nyye uravneniya s impul'snym vozdeystviyem / A. M. Samoylenko, N. A. Perestyuk. – Kiyev: Izdatel'stvo Kiyevskogo universiteta, 1980. – 80 s.
5. Bogolyubov N. N. Acsimptoticheskiye metody v teorii nelineynykh kolebaniy / N. N. Bogolyubov, Yu. A. Mitropol'skiy. – Moskva: Nauka, 1974. – 501s.
6. Grebennikov E. A. Konstruktivnye metody analiza nelineynykh sistem / E. A. Grebennikov, Yu. A. Ryabov. – M.: Nauka, 1979. – 432 s.
7. Pukach P. Ya. Rezonansni yavyshcha u syl`no neliniynykh kolyvalnykh systemakh / P. Ya. Pukach, P. V. Fil` // Visnyk Shidnoukrayins`kogo nacional`nogo universytetu im. Dalya. – 2013. – 56, № 5(194), ch.2.– S. 192 – 195.
8. Bellman R. Teoriya ustojchivosti resheniy differencialnykh uravneniy / R. Bellman – M.: IL, 1954. – 216 s.
9. Perestyuk M. O. Teoriya stiykosti: [Navch. posibnyk] / M. O. Perestyuk, O. S. Chernigova. – K.: VPS "Kyiv", 2002. – 203 s.
10. Myshkis A. D. Periodicheskiye kolebaniya v nelinejnykh odnomernyh sploshnyh sredakh / A. D. Myshkis, A. M. Filimonov // V kn. IX Mezhdunar. konf. po nelineynum kolebaniyam.

Ch.1. – Kiev: Naukova dumka, 1984. – S. 274 – 276.

11. Senyk P. M. Assimptoticheskiy metod i periodicheskiye Ateb – funkcii v teorii sushhestvenno nelineynykh kolebaniy / P. M. Senyk, I. P. Smereka, B. I. Sokil // Assimptoticheskiye i kachestvennyye metody v teorii differencialnyh uravneniy: sbornik nauchnyh trudov.– Kiev: Izdatel`stvo Instituta matematiki, 1977.– S.143 – 156.

ДИНАМИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМАХ С СОСРЕДОТОЧЕНЫ МАССАМИ

Аннотация. *Изложена общая методика исследования некоторых важных с практической точки зрения классов нелинейных систем – неавтономных систем с сильной нелинейностью. К таким системам можно отнести нелинейные системы, возобновляющая сила в которых описывается степенной или близкой к степенной нелинейностью. Для них только в отдельных случаях удается применить аналитические методы исследования. Разработана методика изучения резонансных явлений в указанных системах. Основная идея методики базируется на использовании специальных периодических Ateb–функций при построении решений невозмущенных аналогов систем и адаптации общих идей методов возмущений на случай неавтономных систем.*

Ключевые слова: *нелинейные колебания, сильно нелинейная система, резонанс, специальные функции, амплитудно-частотная характеристика.*

DYNAMIC PHENOMENA IN STRONGLY NONLINEAR NONAUTONOMOUS SYSTEMS WITH CONCENTRATED MASSES

Annotation. *A general technique to study some of the important from the practical point of view the classes of nonlinear systems - non-autonomous systems with strong nonlinearity is described. Such systems include nonlinear systems, renewable power that describe the power or close to power nonlinearity. Only in certain cases it is possible to apply analytical methods for them. Only in certain cases it is possible to apply analytical methods for them. The technique of studying resonance phenomena in them is designed. The basic idea of the methodology is based on the use of special periodic Ateb-functions in constructing solutions of the unperturbed analogue systems and the adaptation of the general ideas of perturbation methods to the case of non-autonomous systems.*

Key words: *nonlinear oscillations, strongly nonlinear system, resonance, special functions, amplitude-frequency response.*