**Пукач П. Я.**

*Національний університет “Львівська політехніка”*

**Pukach P. Ya.**

*Lviv Polytechnic National University*

*УДК 534.1+62-5*

# ДИНАМІЧНІ ПРОЦЕСИ У НЕАВТОНОМНИХ НЕКОНСЕРВАТИВНИХ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМАХ ІЗ СИЛЬНОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ

*Викладено загальну методику дослідження деяких важливих з практичної точки зору класів нелінійних механічних систем – неавтономних неконсервативних систем з сильною нелінійністю. У роботі розглянуто випадок, коли максимальне відхилення неавтономних неконсервативних сил (у тому числі і періодичних) від відновлюючої сили є малою величиною. Розроблено методику вивчення резонансних явищ в таких системах. Основна ідея методики базується на використанні спеціальних періодичних Ateb-функцій при побудові розв’язків незбурених аналогів і використанні основних ідей методу Ван-дер-Поля відносно автономних динамічних систем. При цьому враховується дія на систему саме неконсервативних сил неавтономного типу.*

***Ключові слова:*** *нелінійні коливання, сильно нелінійна система, резонанс, спеціальні функції, амплітудно-частотна характеристика.*

***Актуальність теми. Постановка проблеми.*** Теорія та аналітичні методи дослідження багатьох класів квазілінійних систем будуються, як правило, на різноманітних модифікаціях методів збурень, зокрема, асимптотичних методах нелінійної механіки. Вони дозволили описати та встановити низку особливостей коливальних процесів у квазілінійних системах, які не властиві лінійним системам з незмінними в часі фізико-механічними властивостями. Мова йде в першу чергу про резонансні явища [1-3] (головний та комбінаційні), стійкість процесу [4, 5]. У статті розглядаються сильно нелінійні системи із одним ступенем вільності. Вони піддаються дії збурення. Збурення вважається таким, що його вдається описати аналітичними періодичними за часовою змінною функціями, максимальне значення збурення є малим у порівнянні із максимальним значенням відновлюючої сили. Щодо незбурених систем, то вони є консервативними, а відновлююча сила описується, взагалі кажучи, близькою до степеневої залежністю та забезпечує існування у ній періодичних процесів. Викладена методика може бути використана для широкого класу нелінійних механічних систем. Такий підхід є одним із небагатьох можливих на даний час аналітичних підходів до розв’язання поставленої проблеми.

***Невирішені раніше частини загальної проблеми, яким присвячена стаття.*** Для систем із сильною нелінійністю лише в окремих випадках вдається застосувати аналітичні методи дослідження. До таких систем можна віднести нелінійні автономні системи, відновлююча сила у яких описується степеневою або близькою до степеневої нелінійністю [6]. Вказані системи потребують ґрунтовного вивчення з огляду їх практичного застосування у промисловості та машинобудуванні.

***Метою даної роботи*** є поширення ідей та методів нелінійної механіки і теорії коливань на новий клас коливальних систем із зосередженими масами. Особлива увага у статті звернута на цілу низку особливостей таких систем, які не властиві лінійним та навіть квазілінійним системам.

***Методика дослідження.*** У роботі розглядається випадок, для якого максимальне відхилення неавтономних неконсервативних сил (в тому числі і періодичних) від відновлюючої сили є малою величиною. Не дивлячись на це, з часом дія на систему навіть малих сил може наростати і неврахування їх у математичних моделях може привести до значного спотворення динамічного процесу. Використовуємо методику, яка дозволяє враховувати дію на систему саме неконсервативних сил неавтономного типу. Базою для її побудови є основі ідеї методу Ван-дер-Поля стосовно автономних динамічних систем. Відповідно до основної ідеї цього методу, динамічний процес систем, математичною моделлю яких є рівняння

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+cx^{\nu+1}=\varepsilon f\left(x,\frac{dx}{dt},\theta\right), \qquad (1)$$

де $m$ – маса матеріальної точки; $x$ – її координата у довільний момент часу; $F(x)=cx^{\nu+1}$– функція, яка описує головну частину відновлюючої сили; $c,\nu$ – сталі, причому $\nu+1=\dfrac{2p+1}{2q+1}$ $(p,q=0,1,2,...)$; $\varepsilon f\left(x,\dfrac{dx}{dt},\theta\right)$ – аналітична $2\pi$ – періодична за $\theta=\mu t$ функція, $\mu$ – частота зовнішнього періодичного збурення, яке діє на систему; $\varepsilon$ – малий параметр, який вказує на малу величину зовнішнього періодичного збурення та незначне відхилення відновлюючої сили від степеневого закону, можна описати також залежністю

$$x(t)=a(t)ca\left(\nu+1,1,\omega\left(a(t)\right)+\psi(t)\right). \qquad (2)$$

У залежності (2) $a(t)$ та $\psi(t)$ є невідомими функціями, які необхідно визначити так, щоб співвідношення (2) з потрібним ступенем точності задовольняло рівняння (1). Шляхом диференціювання за часом (2) отримуємо

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{2a\omega(a)}{\nu+2}sa\left(1,\nu+1,\omega(a)t+\psi(t)\right)-$$
$$-\frac{d\psi}{dt}\frac{2a}{\nu+2}sa\left(1,\nu+1,\omega(a)t+\psi(t)\right)+$$
$$+\frac{da}{dt}ca\left(\nu+1,1,\omega(a)t+\psi(t)\right).$$

Приймаючи до уваги, що для незбуреного випадку $\dfrac{dx}{dt}$ визначається залежністю $\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{2a\omega(a)}{\nu+2}sa\left(1,\nu+1,\omega(a)t+\psi\right)$, із наведеного вище співвідношення отримуємо перше диференціальне рівняння, яке зв'язує шукані функції $a(t)$ та $\psi(t)$:

$$\frac{d\psi}{dt}\frac{2a}{\nu+2}sa\left(1,\nu+1,\omega(a)t+\psi(t)\right)-$$
$$-\frac{da}{dt}ca\left(\nu+1,1,\omega(a)t+\psi(t)\right)=0. \qquad (3)$$

Наступним диференціюванням знаходимо:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{2\omega^2(a)}{\nu+2}aca^{\nu+1}\left(\nu+1,1,\omega\left(a(t)\right)t+\psi(t)\right)-$$
$$-\frac{2}{\nu+2}\frac{da}{dt}\left[\omega(a)+a\frac{d\omega(a)}{da}\right]sa\left(1,\nu+1,\omega(a)t+\psi\right)-\frac{2\omega(a)}{\nu+2}\frac{d\psi}{dt}aca\left(\nu+1,1,\omega\left(a(t)\right)t+\psi(t)\right).$$

Вираз $\omega(a)+a\dfrac{d\omega(a)}{da}$ можна замінити простішим: $\omega(a)+a\dfrac{d\omega(a)}{da}=\dfrac{\nu+2}{2}\omega(a)$. Таким чином, для вихідного диференціального рівняння (1) отримуємо друге співвідношення, яке зв'язує функції $\dfrac{da}{dt}$ та $\dfrac{d\psi}{dt}$:

$$\frac{da}{dt}sa\left(1,\nu+1,\omega(a)t+\psi\right)+\frac{d\psi}{dt}\frac{2}{\nu+2}aca^{\nu+1}\left(\nu+1,1,\omega\left(a(t)\right)t+\psi(t)\right)=-\frac{\varepsilon}{\omega(a)}\bar{f}\left(a,\bar{\psi},\theta\right), \qquad (4)$$

де $\bar{\psi}=\omega(a)t+\psi$, $\bar{f}\left(a,\bar{\psi},\theta\right)$ відповідає значенню функції $f\left(x,\dfrac{dx}{dt},\theta\right)$ за умови, що $x$ та $\dfrac{dx}{dt}$ приймають наведені вище значення, тобто

$$\bar{f}\left(a,\bar{\psi},\theta\right)=f\left(aca\left(\nu+1,1,\omega\left(a\right)t+\psi\right)\right)-$$
$$-\frac{2a\omega\left(a\right)}{\nu+2}sa\left(1,\nu+1,\omega\left(a\right)t+\psi\right),\theta).$$

Система звичайних диференціальних рівнянь (3), (4) визначає $\frac{da}{dt}$ та $\frac{d\psi}{dt}$ у вигляді:

$$\frac{da}{dt}=-\frac{\varepsilon}{\omega\left(a\right)}sa\left(1,\nu+1,\bar{\psi}\right)\bar{f}\left(a,\bar{\psi},\theta\right),$$
$$\frac{d\psi}{dt}=-\frac{\varepsilon\left(\nu+2\right)}{2a\omega\left(a\right)}\varepsilon ca\left(\nu+1,1,\bar{\psi}\right)\bar{f}\left(a,\bar{\psi},\theta\right). \tag{5}$$

Як видно із отриманих диференціальних співвідношень, динамічний процес визначається не тільки неконсервативними силами, але й періодичним збуренням (функція $\bar{f}\left(a,\bar{\psi},\theta\right)$ є $2\pi$ – періодичною за аргументом $\theta$). У зв'язку із вказаним для системи диференціальних рівнянь (5) будемо розглядати два випадки: *нерезонансний* та *резонансний*. Перший має місце за умови $\mu\neq\frac{\pi}{\Pi\left(1,\nu+1\right)}\omega\left(a^*\right)$ чи $\omega\left(a\right)\neq\frac{\Pi\left(1,\nu+1\right)}{\pi}\mu$, другий – за умови $\mu\approx\frac{\pi}{\Pi\left(1,\nu+1\right)}\omega\left(a^*\right)$ чи $\omega\left(a\right)\approx\frac{\Pi\left(1,\nu+1\right)}{\pi}\mu$.

У *нерезонансному* випадку малі періодичні збурення незначною мірою впливають на закони зміни визначальних параметрів динамічного процесу. До того ж амплітуда та параметр $\psi$, як випливає із системи диференціальних рівнянь (5), є повільно змінними функціями часу. Це дозволяє, не змінюючи точності отриманих результатів, провести усереднення по фазі власних коливань. Таким чином, амплітудно – частотна характеристика нерезонансних коливань сильно нелінійної системи, математичною моделлю якої є диференціальне рівняння (1), змінюється відповідно до рівнянь

$$\frac{da}{dt}=\varepsilon A\left(a\right),\ \frac{d\bar{\psi}}{dt}=\omega\left(a\right)+\varepsilon B\left(a\right), \tag{6}$$

де

$$A\left(a\right)=-\frac{1}{4\pi\Pi\omega\left(a\right)}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\Pi}sa\left(1,\nu+1,\bar{\psi}\right)\bar{f}\left(a,\bar{\psi},\theta\right)d\bar{\psi}d\theta,$$
$$B\left(a\right)=-\frac{\left(\nu+2\right)}{8\pi\Pi a\omega\left(a\right)}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\Pi}ca\left(\nu+1,1,\bar{\psi}\right)\bar{f}\left(a,\bar{\psi},\theta\right)d\bar{\psi}d\theta.$$

Отримана так звана система у стандартному вигляді (6) відносно проста у дослідженнях та для аналізу на її базі конкретних динамічних систем можна використати чисельні чи якісні методи.

Набагато складнішим і одночасно важливішим із практичної та теоретичної сторін є *резонансний* випадок. Визначальними параметрами резонансних коливань є не тільки співвідношення між частотами власних та вимушених коливань, але й “різниця фаз” між фазами цих коливань [1], тобто параметр $\vartheta=\frac{\pi}{\Pi}\bar{\psi}-\theta$ (або $\bar{\psi}=\frac{\Pi}{\pi}\left(\theta+\vartheta\right)$).

*Зауваження.* Нижче для простоти досліджується лише випадок головного резонансу. Тому, формально ввівши цей параметр у диференціальні рівняння (5), отримуємо

$$\frac{da}{dt}=-\frac{\varepsilon}{\omega\left(a\right)}sa\left(1,\nu+1,\frac{\Pi}{\pi}\left(\theta+\vartheta\right)\right)\bar{f}\left(a,\frac{\Pi}{\pi}\left(\theta+\vartheta\right),\theta\right),$$
$$\frac{d\vartheta}{dt}=\frac{\pi}{\Pi}\omega\left(a\right)-\mu-\frac{\varepsilon\left(\nu+2\right)}{2a\omega\left(a\right)}\varepsilon ca\left(\nu+1,1,\frac{\Pi}{\pi}\left(\theta+\vartheta\right)\right)\bar{f}\left(a,\frac{\Pi}{\pi}\left(\theta+\vartheta\right),\theta\right). \tag{7}$$

Праві частини останнього співвідношення є вже $2\pi$ – періодичними за $\theta$ функціями. Точність розв'язку диференціального рівняння (7) не зміниться, якщо усереднити їх праві частини за вказаною змінною на інтервалі $2\pi$. Таким чином, рівняння у стандартному вигляді, які описують резонансний процес неавтономної неконсервативної сильно нелінійної системи, набувають вигляду

$$\frac{da}{dt}=\varepsilon\bar{A}(a,\vartheta),\ \frac{d\vartheta}{dt}=\frac{\pi}{\Pi}\omega(a)-\mu+\varepsilon\bar{B}(a,\vartheta), \tag{8}$$

де

$$\bar{A}(a,\vartheta)=-\frac{1}{2\pi\omega(a)}\int_0^{2\pi}sa\left(1,\nu+1,\frac{\Pi}{\pi}(\theta+\vartheta)\right)\bar{f}\left(a,\frac{\Pi}{\pi}(\theta+\vartheta),\theta\right)d\theta,$$

$$\bar{B}(a,\vartheta)=-\frac{\varepsilon(\nu+2)}{4\pi a\omega(a)}\int_0^{2\pi}ca\left(\nu+1,1,\frac{\Pi}{\pi}(\theta+\vartheta)\right)\bar{f}\left(a,\frac{\Pi}{\pi}(\theta+\vartheta),\theta\right)d\theta.$$

Рівняння (8) описують динамічний процес у резонансній зоні, тобто при наближенні амплітуди коливань $a$ до параметру $a^*$ – амплітуди резонансу. У зв'язку із вказаним їх дослідження можна проводити на базі різних підходів, які суттєвої різниці для кількісної та якісної оцінки динамічного процесу не дають. Найбільш простий із цих підходів побудований на наступному: якщо диференціальні рівняння (8) залишаються правильними при зміні амплітуди коливань в околі параметру $a^*$, то дослідження динамічного процесу в резонансній зоні можна проводити на базі дещо спрощених рівнянь, ніж вказані. Для цього, виходячи із умови резонансу $\frac{\Pi}{\pi}\omega(a^*)\approx\mu$, різницю $\frac{\Pi}{\pi}\omega(a^*)-\mu$ заміняємо величиною $\frac{\Pi}{\pi}\left.\frac{d\omega}{da}\right|_{a=a^*}(a-a^*)$. Система (8) в такому випадку еквівалентна такій:

$$\frac{da}{dt}=\varepsilon\bar{A}(a,\vartheta),$$
$$\frac{d\vartheta}{dt}=\frac{\Pi}{\pi}\left.\frac{d\omega}{da}\right|_{a=a^*}(a-a^*)+\varepsilon\bar{B}(a,\vartheta). \tag{9}$$

Таким чином, визначальні параметри резонансних коливань розглядуваної сильно нелінійної системи, математичною моделлю коливань якої є диференціальне рівняння (1), описуються залежністю (9). Треба одночасно відзначити, що саме явище резонансу у сильно нелінійних системах є більш швидкоплинне, ніж у квазілінійних. Це можна пояснити хоча б тим фактом, що швидкість зміни різниці фаз у квазілінійних системах пропорційна до малого параметра, в той же час у сильно нелінійних – до амплітуди коливань. До того ж, вийшовши із резонансної зони (для якої амплітуда динамічного процесу є більшою за $a^*$), динамічний процес буде описується вже диференціальними рівняннями для нерезонансних коливань (6). Наявні ж сили опору, призводять до спадання амплітуди до моменту, коли амплітуда стає близькою до $a^*$, а отже система знову входить у резонанс. Так процес буде повторюватись.

***Вплив періодичного збурення на коливання сильно нелінійних систем.*** Важливим окремим випадком неавтономної неконсервативної системи є випадок, який відповідає динамічному процесу, що описується рівнянням

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+cx^{\nu+1}=\varepsilon f\left(x,\frac{dx}{dt}\right)+H\sin\mu t. \tag{10}$$

У (10) величина $H$ – амплітуда зовнішнього періодичного збурення. Як випливає із отриманих вище результатів, у *нерезонансному* випадку динамічний процес описується залежністю (2), у якій амплітуда $a$ та фаза коливань визначаються диференціальними рівняннями

$$\frac{da}{dt}=-\frac{\varepsilon}{2\Pi\omega(a)}\int_0^{2\Pi}sa(1,\nu+1,\bar{\psi})f\left(aca(\nu+1,1,\psi),-\frac{2\omega(a)}{\nu+2}sa(1,\nu+1,\bar{\psi})\right)d\bar{\psi},$$

$$\frac{d\bar{\psi}}{dt}=\omega(a)-\frac{\varepsilon(\nu+2)}{4\Pi a\omega(a)}\int_0^{2\Pi}ca(\nu+1,1,\bar{\psi})f\left(aca(\nu+1,1,\psi),-\frac{2\omega(a)}{\nu+2}sa(1,\nu+1,\bar{\psi})\right)d\bar{\psi}.$$

У останніх залежностях використано той факт, що

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\Pi}\begin{Bmatrix} ca\left(\nu+1,1,\bar{\psi}\right) \\ sa\left(1,\nu+1,\bar{\psi}\right)\end{Bmatrix}\sin\theta d\bar{\psi}\, d\theta \equiv 0\,,$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\Pi}\begin{Bmatrix} ca\left(\nu+1,1,\bar{\psi}\right) \\ sa\left(1,\nu+1,\bar{\psi}\right)\end{Bmatrix} f\left(aca\left(\nu+1,1,\psi\right),-\frac{2\omega(a)}{\nu+2}sa\left(1,\nu+1,\bar{\psi}\right)\right)d\bar{\psi}d\theta =$$

$$= 2\pi\int_0^{2\Pi}\begin{Bmatrix} ca\left(\nu+1,1,\bar{\psi}\right) \\ sa\left(1,\nu+1,\bar{\psi}\right)\end{Bmatrix} f\left(aca\left(\nu+1,1,\psi\right),-\frac{2\omega(a)}{\nu+2}sa\left(1,\nu+1,\bar{\psi}\right)\right)d\bar{\psi}.$$

Отже, мала за величиною періодична сила, частота якої відмінна від власної частоти нелінійних коливань системи, не впливає у першому наближені на визначальні параметри динамічного процесу.

У *резонансному* ж випадку визначальні параметри динамічного процесу змінюються відповідно до закону, що описується рівняннями:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2\Pi\omega(a)}\int_0^{2\Pi} sa\left(1,\nu+1,\bar{\psi}\right) f\left(aca\left(\nu+1,1,\psi\right),-\frac{2\omega(a)}{\nu+2}sa\left(1,\nu+1,\bar{\psi}\right)\right)d\bar{\psi} -$$

$$-\frac{H}{2\pi\omega(a)}\int_0^{2\pi} sa\left(1,\nu+1,\frac{\Pi}{\pi}\left(\theta+\vartheta\right)\right)\sin\theta d\theta,$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\pi}{\Pi}\omega(a) - \mu - \frac{\varepsilon(\nu+2)}{4\Pi a\omega(a)}\int_0^{2\Pi} ca\left(\nu+1,1,\bar{\psi}\right) f\left(aca\left(\nu+1,1,\psi\right),-\frac{2\omega(a)}{\nu+2}sa\left(1,\nu+1,\bar{\psi}\right)\right)d\bar{\psi} -$$

$$-\frac{H(\nu+2)}{4\pi a\omega(a)}\int_0^{2\pi} ca\left(\nu+1,1,\frac{\Pi}{\pi}\left(\theta+\vartheta\right)\right)\sin\theta d\theta \; .$$

Обчислення інтегралів $\int_0^{2\Pi}\begin{Bmatrix} ca\left(\nu+1,1,\bar{\psi}\right) \\ sa\left(1,\nu+1,\bar{\psi}\right)\end{Bmatrix} f\left(aca\left(\nu+1,1,\psi\right),-\frac{2\omega(a)}{\nu+2}sa\left(1,\nu+1,\bar{\psi}\right)\right)d\bar{\psi}$ у випадку, коли функція $f\left(x,\frac{dx}{dt}\right)$ є многочленом, не становить труднощів. Що стосується інтегралів $\int_0^{2\pi} sa\left(1,\nu+1,\frac{\Pi}{\pi}\left(\theta+\vartheta\right)\right)\sin\theta d\theta$ та $\int_0^{2\pi} ca\left(\nu+1,1,\frac{\Pi}{\pi}\left(\theta+\vartheta\right)\right)\sin\theta d\theta$, то їх легко замінити простішими

$$\int_0^{2\pi} sa\left(1,\nu+1,\frac{\Pi}{\pi}\left(\theta+\vartheta\right)\right)\sin\theta d\theta = \cos\vartheta\int_0^{2\pi} sa\left(1,\nu+1,\frac{\Pi}{\pi}\gamma\right)\sin\gamma d\gamma + \sin\vartheta\int_0^{2\pi} sa\left(1,\nu+1,\frac{\Pi}{\pi}\gamma\right)\cos\gamma d\gamma,$$

$$\int_0^{2\pi} ca\left(\nu+1,1,\frac{\Pi}{\pi}\left(\theta+\vartheta\right)\right)\sin\theta d\theta = \cos\vartheta\int_0^{2\pi} ca\left(\nu+1,1,\frac{\Pi}{\pi}\gamma\right)\sin\gamma d\gamma + \sin\vartheta \times$$

$$\times\int_0^{2\pi} ca\left(\nu+1,1,\frac{\Pi}{\pi}\gamma\right)\cos\gamma d\gamma\; .$$

Наведені міркування дозволяють представити співвідношення, які описують резонансні коливання, у простішому вигляді

$$\frac{da}{dt}=\varepsilon A(a)-\frac{H}{2\pi\omega(a)}\left(\alpha_1\cos\vartheta+\beta_1\sin\vartheta\right),$$

$$\frac{d\vartheta}{dt}=\frac{\pi}{\Pi}\omega(a)-\mu+\varepsilon B(a)-\frac{H(\nu+2)}{4\pi a\omega(a)}\left(\alpha_2\cos+\beta_2\sin\vartheta\right), \qquad (11)$$

де

$$\alpha_1=\int_0^{2\pi}sa\left(1,\nu+1,\frac{\Pi}{\pi}\gamma\right)\sin\gamma d\gamma,\ \ \beta_1=\int_0^{2\pi}sa\left(1,\nu+1,\frac{\Pi}{\pi}\gamma\right)\cos\gamma d\gamma,$$

$$\alpha_2=\int_0^{2\pi}ca\left(\nu+1,1,\frac{\Pi}{\pi}\gamma\right)\sin\gamma d\gamma\ ,\ \beta_2=\int_0^{2\pi}ca\left(\nu+1,1,\frac{\Pi}{\pi}\gamma\right)\cos\gamma d\gamma\ .$$

Прирівнюючи праві частини останніх співвідношень до нуля, отримуємо залежності, які визначають амплітуди стаціонарних резонансних коливань

$$\varepsilon A(a)-\frac{H}{2\pi\omega(a)}\left(\alpha_1\cos\vartheta+\beta_1\sin\vartheta\right)=0\,,$$

$$\frac{\pi}{\Pi}\omega(a)-\mu+\varepsilon B(a)-\frac{H(\nu+2)}{4\pi a\omega(a)}\left(\alpha_2\cos+\beta_2\sin\vartheta\right)=0\,.$$

Із отриманих вище співвідношень, як окремі випадки, отримуємо:

1) відомі при $\nu=0$ залежності [1], які стосуються квазілінійних коливань;

2) при $\mu=0$ результати [7], які стосуються консервативних систем.

На останньому випадку, тобто $f\left(x,\frac{dx}{dt}\right)=g(x)$ ($g(x)$ – непарна функція), зупинимось більш детально. Легко переконатись, що для консервативного випадку симетричної відносно початку координат відновлюючої сили має місце співвідношення $\int_0^{2\Pi}g\left(aca(\nu+1,1,\overline{\psi})\right)sa\left(1,\nu+1,\overline{\psi}\right)=0$. Це дозволяє залежності, які описують резонансні коливання у випадку дії на систему гармонійної сили, записати у вигляді

$$\frac{da}{dt}=-\frac{H}{2\pi\omega(a)}\left(\alpha_1\cos\vartheta+\beta_1\sin\vartheta\right),\ \frac{d\vartheta}{dt}=\frac{\pi}{\Pi}\omega(a)-\mu+\varepsilon B(a)-\frac{H(\nu+2)}{4\pi a\omega(a)}\left(\alpha_2\cos+\beta_2\sin\vartheta\right),$$

де

$$B(a)=-\frac{(\nu+2)}{4\pi a\omega(a)}\int_0^{2\Pi}g\left(aca(\nu+1,1,\overline{\psi})\right)ca(\nu+1,1,\psi)\,d\overline{\psi}.$$

У випадку ж $f\left(x,\frac{dx}{dt}\right)=g_1\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $g_1\left(\frac{dx}{dt}\right)$ – нелінійна сила опору, яка задовольняє умову $g_1\left(-\frac{dx}{dt}\right)=-g_1\left(\frac{dx}{dt}\right)$, рівняння (11) трансформуються до вигляду

$$\frac{da}{dt}=\varepsilon A(a)-\frac{H}{2\pi\omega(a)}\left(\alpha_1\cos\vartheta+\beta_1\sin\vartheta\right),\quad \frac{d\vartheta}{dt}=\frac{\pi}{\Pi}\omega(a)-\mu-\frac{H(\nu+2)}{4\pi a\omega(a)}\left(\alpha_2\cos+\beta_2\sin\vartheta\right),$$

де

$$A(a)=-\frac{\varepsilon}{2\Pi\omega(a)}\int_0^{2\Pi} sa(1,\nu+1,\bar{\psi})\,g_1\left(aca(\nu+1,1,\psi),-\frac{2\omega(a)}{\nu+2}sa(1,\nu+1,\bar{\psi})\right)d\bar{\psi}.$$

Викладені вище теоретичні результати, які стосуються динамічних процесів сильно нелінійних систем із одним ступенем вільності, можна використати для дослідження конкретних моделей з метою порівняльного аналізу їх із квазілінійними моделями.

***Висновки.*** У статті розроблено методику дослідження динамічних процесів у неавтономних сильно нелінійних механічних системах із одним ступенем вільності. Характерною особливістю розглядуваних систем є те, що коливальний процес незбурених до них аналогів вдається описати за допомогою спеціальних періодичних Ateb-функцій, частота (період) вказаного вище процесу залежить від амплітуди. Із останнім фактом пов'язані основні труднощі дослідження впливу на процес неконсервативних, а особливо періодичних сил. З цією метою у статті розроблено методику асимптотичного інтегрування відповідних сильно нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку неавтономного типу. На базі викладеної методики вперше отримано рівняння у стандартному вигляді, які описують закони зміни визначальних параметрів динамічного процесу як для нерезонансного, так і резонансного випадків.

### *Список використаних джерел*


1. Боголюбов Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский.– Москва: Наука, 1974. – 501 с.
2. Гребенников Е. А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем / Е. А. Гребенников, Ю. А. Рябов. – М.: Наука, 1979. – 432 с.
3. Пукач П. Я. Резонансні явища у сильно нелінійних коливальних системах / П. Я. Пукач, П. В. Філь // Вісник Східноукраїнського національного університету ім. Даля.– 2013.– 56, № 5(194), ч.2.– С. 192–195.
4. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений / Р. Беллман – М.: ИЛ,1954.– 216 с.
5. Перестюк М. О. Теорія стійкості: [Навч. посібник] / М. О. Перестюк, О. С. Чернігова. – К.: ВПС"Київ", 2002. – 203 с.
6. Мышкис А. Д. Периодические колебания в нелинейных одномерных сплошных средах / А. Д. Мышкис, А. М. Филимонов // В кн. IX Междун. конф. по нелинейным колебаниям. Ч.1. – Киев: Наукова думка, 1984. – С. 274–276.
7. Сеник П. М. Асимптотический метод и периодические Ateb–функции в теории существенно нелинейных колебаний/ П. М. Сеник, И. П. Смерека, Б. И. Сокил //Асимптотические и качественные методы в теории дифференциальных уравнений.– Киев: Изд-во Ин-та математ.,1977.–С.143–156.


### *Список джерел в транслітерації*


1. Bogolyubov N. N. Assimptoticheskiye metody v teorii nelineynykh kolebaniy / N. N. Bogolyubov, Yu. A. Mitropolskiy. – Moskva: Nauka, 1974. – 501s.
2. Grebennikov E. A. Konstruktivnye metody analiza nelineynykh sistem / E. A. Grebennikov, Yu. A. Ryabov. – M.: Nauka, 1979. – 432 s.
3. Pukach P. Ya. Rezonansni yavyshcha u sylno neliniynykh kolyvalnykh systemakh / P. Ya. Pukach, P. V. Fil // Visnyk Shidnoukrayinskogo nacionalnogo universytetu im. Dalya. – 2013. – 56, № 5(194), ch.2.– S. 192 – 195.
4. Bellman R. Teoriya ustojchivosti resheniy differencialnykh uravneniy / R. Bellman – M.: IL, 1954. – 216 s.
5. Perestyuk M. O. Teoriya stiykosti: [Navch. posibnyk] / M. O. Perestyuk, O. S. Chernigova. – K.: VPS "Kyiv", 2002. – 203 s.
6. Myshkis A. D. Periodicheskiye kolebaniya v nelinejnykh odnomernykh sploshnykh sredakh / A. D. Myshkis, A. M. Filimonov // V kn. IX Mezhdunar. konf. po nelineynum kolebaniyam. Ch.1. – Kiev: Naukova dumka, 1984. – S. 274 – 276.
7. Senyk P. M. Assimptoticheskiy metod i periodicheskiye Ateb – funkcii v teorii sushchestvenno nelineynykh kolebaniy / P. M. Senyk, I. P. Smereka, B. I. Sokil // Assimptoticheskiye i kachestvennyye metody v teorii differencialnykh uravneniy. – Kiev: Izdatel`stvo Instituta matematiki, 1977.– S.143 – 156.

## ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В НЕАВТОНОМНЫХ НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С СИЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

***Аннотация.*** *Изложена общая методика исследования некоторых важных с практической точки зрения классов нелинейных механических систем – неавтономных неконсервативных систем с сильной нелинейностью. В работе рассмотрен случай, когда максимальное отклонение неавтономных неконсервативных сил (в том числе и периодических ) от возобновляющей силы есть малая величина. Разработана методика изучения резонансных явлений в таких системах. Основная идея методики базируется на использовании специальных периодических Ateb–функций при построении решений невозмущенных аналогов и использовании основных идей метода Ван-дер-Поля относительно автономных динамических систем. При этом учитывается действие на систему именно неконсервативных сил неавтономного типа.*

***Ключевые слова:*** *нелинейные колебания, сильно нелинейная система, резонанс, специальные функции, амплитудно-частотная характеристика.*

## DYNAMIC PROCESSES IN NON-AUTONOMOUS NON-CONSERVATIVE MECHANICAL SYSTEMS WITH STRONG NONLINEARITY

***Annotation.*** *A general methodology to study some important from a practical point of view classes of nonlinear mechanical systems - non-autonomous non-conservative systems with strong nonlinearity is described. In this paper we consider the case when the maximum deviation of non-autonomous non-conservative forces (including periodicals) of renewable force is a small quantity. The methodology of studying resonance phenomena in them is designed. The basic idea developed in the article research methods is based on the idea of using special Ateb-periodic functions for the construction of solutions of the unperturbed analogue systems and the using of the basic ideas of the method of Van der Pol relatively autonomous dynamical systems. This takes account of the action on the system is non-conservative forces nonautonomous type.*

***Key words:*** *nonlinear oscillations, strongly nonlinear system, resonance, special functions, amplitude-frequency response.*