II. МАШИНОБУДУВАННЯ ТА МАТЕРІАЛООБРОБКА

Антощенков Р. В.

Тищенко Л. Н.

Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства им. П. Василенко

Андреев Ю. М.

Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»

Antoshchenkov R. V.

Tishenko L. N.

Kharkiv Petro Vasylenko National Technical University of Agriculture

Andreev Yu. M.

National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"

УДК 519.682.6:631.17.002.5

К ПОСТРОЕНИЮ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ МНОГОЭЛЕМЕНТНОГО МАШИННО-ТРАКТОРНОГО АГРЕГАТА

В работе обосновывается автоматизированный подход к построению уравнений динамики неголономных систем. Рассматривается методика применения специальной системы компьютерной алгебры КиДиМ (ССКА КиДиМ) для решения задач динамики. Исследуется движение транспортного агрегата, которое необходимо для последующего изучения пространственного движения многоэлементного комбинированного машинно-тракторного агрегата. Динамические уравнения и кинематические связи для таких систем в векторно-матричной записи формируются автоматически по заданным спискам инерционных и силовых элементов, что позволяет упростить процесс исследования динамики агрегатов различных структур путем автоматического перестроения математической модели по измененной механической.

Ключевые слова: *динамика, машинно-тракторный агрегат, уравнения, кинематические связи.*

Вступление. Для повышения эффективности производства продукции растениеводства используют комбинированные почвообрабатывающие посевные агрегаты, которые за один проход по полю выполняют две или более технологических операций. Повышение производительности данных агрегатов можно достичь за счет выбора оптимальной схемы агрегатирования, учета агротехнических требований и т.д. Для этого необходимо использовать адекватную математическую модель динамических процессов. В качестве такой модели на первом этапе исследований можно использовать системы твердых деформируемых тел с голономными и неголономными удерживающими связями. Составление такой модели традиционными способами довольно проблематично даже для задач анализа. При синтезе такую процедуру необходимо проделывать многократно, что требует использования специальных компьютерных средств. На примере близкой к рассматриваемым сельскохозяйственным системам плоской неголономной модели тракторного поезда в статье рассматривается методика применения специальной системы компьютерной алгебры КиДиМ (ССКА КиДиМ).

Анализ публикаций, исследований. Исследование динамики многоэлементных сельскохозяйственных агрегатов базируется на формировании уравнений голономных [1, 2] и неголономных систем [3, 4]. Учет закономерностей качения колес машинно-тракторных агрегатов, даже включая их упругие свойства, относят к классу неголономных механических систем [3]. Многоэлементные комбинированные машинно-тракторные агрегаты, состоящие из нескольких отдельных машин, объединенных в один агрегат, могут

иметь различные схемы агрегатирования. Соответственно, для каждого случая необходимо строить математическую модель динамики, а изменение агрегатирования приводит к необходимости изначально перестраивать модель. Традиционные способы построения моделей таких систем основаны на «ручной технологии» [5-7]. Однако в последнее время появляются системы компьютерного вывода уравнений динамики таких моделей. Достаточно эффективной является ССКА КиДиМ, теоретические основы, которой изложены в работах [8-10].

Цель и постановка задачи. Применение такой системы для конкретных задач требует учета их специфики. Поэтому целью данной работы является приспособление указанной методики для построения уравнений динамики неголономных систем плоскопараллельного движения многоэлементного машинно-тракторного агрегата на примере комбинированного почвообрабатывающего посевного агрегата. Это позволяет исследовать динамику агрегатов различных структур путем автоматического перестроения математической модели по измененной механической. Последняя представляется совокупностью инерционных, упругих, диссипативных и силовых элементов, включающих геометрическое, кинематическое и физическое описание [8, 10]. Применение такой методики демонстрируется на примере близкой к рассматриваемым сельскохозяйственным системам плоской неголономной модели автопоезда [11].

Решение задачи. Рассмотрим динамическую модель плоскопараллельного движения многоэлементного машинно-тракторного агрегата (рис. 1).

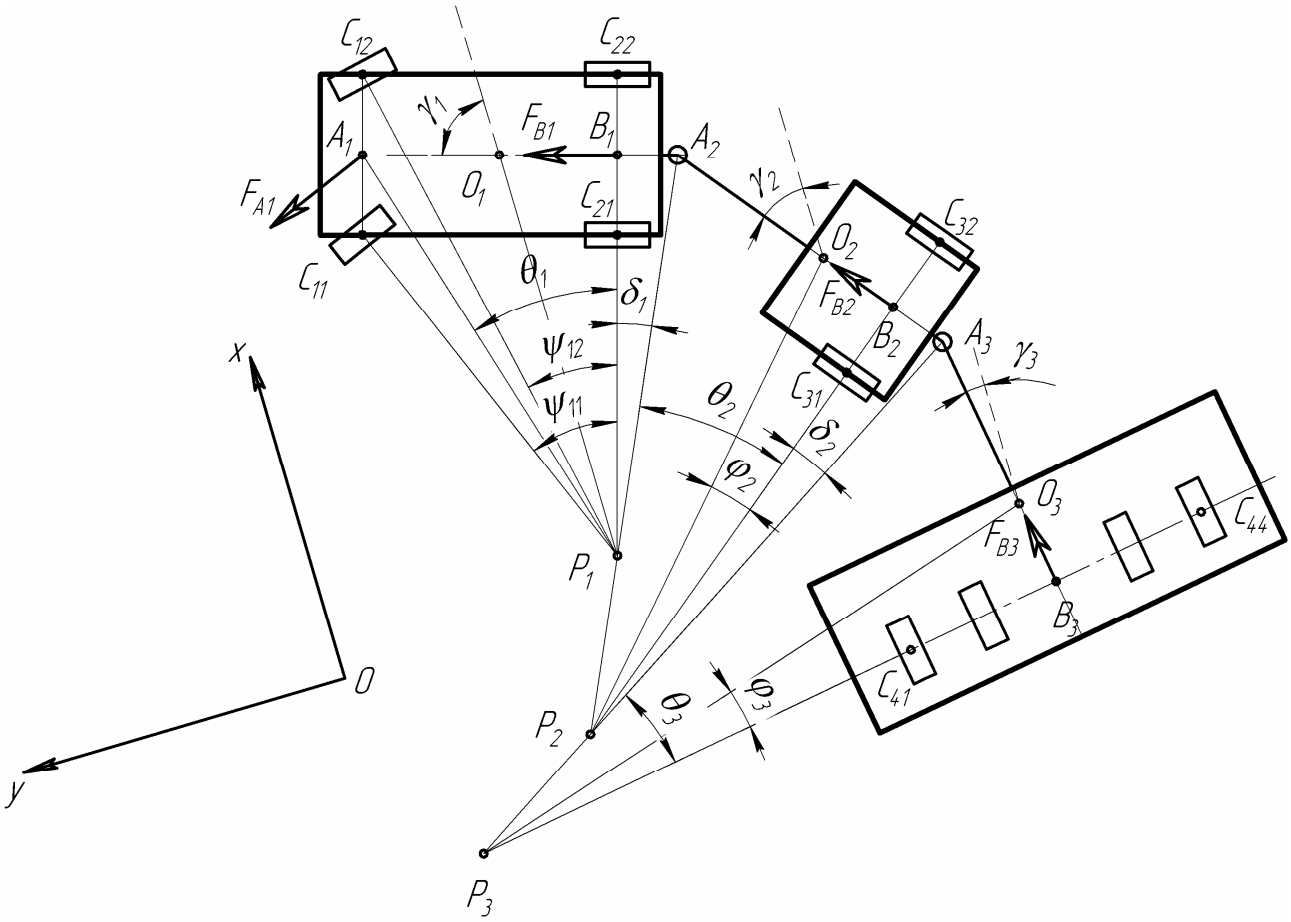


Рис. 1. Динамическая модель многоэлементного машинно-тракторного агрегата

Эта модель имеет много общего с моделью автопоезда, рассмотренной в работе [11]. Кроме того, учет пространственного движения звеньев такой модели требует отработки методик расчета пространственных неголономных систем. Поэтому далее

излагаются теоретические основы и методика расчетов, которые используются при применении ССКА КиДиМ для указанных моделей.

Согласно рассматриваемому подходу в соответствии с общепринятым в аналитической механике, геометрические и кинематические свойства модели могут описываться как обобщенными координатами и обобщенными скоростями ($\mathbf{q} = \{q_1, q_2, ..., q_s\}$, $\dot{\mathbf{q}} = \{\dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_s\}$), так и обобщенными координатами и псевдоскоростями ($\mathbf{q} = \{q_1, q_2, ..., q_s\}$, $\dot{\mathbf{p}} = \{\dot{\pi}_1, \dot{\pi}_2, ..., \dot{\pi}_m\}$). В первом случае уравнения линейных неголономных связей представляются через обобщенные координаты и обобщенные скорости в виде $\mathbf{A}(\mathbf{q},t)\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{б}(\mathbf{q},t) = 0$ и разрешаются относительно зависимых обобщенных скоростей $\dot{\mathbf{q}}_1$ через независимые $\dot{\mathbf{q}}_2$:

$$\dot{\mathbf{q}}_1 = \mathbf{B}(\mathbf{q},t)\dot{\mathbf{q}}_2 + \mathbf{в}(\mathbf{q},t). \qquad (1)$$

Причем скорости $\dot{\mathbf{q}}_1$ и $\dot{\mathbf{q}}_2$ являются двумя частями списка обобщенных скоростей $\dot{\mathbf{q}} = \{\dot{\mathbf{q}}_1, \dot{\mathbf{q}}_2\}$ размерностью m и $s-m$ соответственно. Для обобщения результата примем второй вектор за вектор псевдоскоростей $\dot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{q}}_2$. Тогда выражение (1) приобретет вид:

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_1 \\ \dot{\mathbf{q}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}_2 + \mathbf{в} \\ \dot{\mathbf{q}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix}\dot{\mathbf{q}}_2 + \begin{bmatrix} \mathbf{в} \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{G}(\mathbf{q},t)\dot{\mathbf{q}}_2 + \mathbf{г}(\mathbf{q},t) = \mathbf{G}\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{г}, \qquad (2)$$

точно такой же, как и при использовании с самого начала вместо обобщенных скоростей псевдоскоростей, через которые с помощью формул вида (2) выражаются обобщенные скорости.

Динамические уравнения для плоских моделей неголономных систем в векторно-матричной записи представляются в виде [10]:

$$\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{W}}_J^T [\mathbf{J}]\mathbf{б} - \tilde{\mathbf{W}}_P^T \mathbf{P} = 0, \qquad (3)$$

где $[\mathbf{J}]$ – диагональная матрица характеристик инерционных элементов – масс и осевых моментов инерции тел, **P** – вектор-матрица характеристик силовых элементов – проекций векторов сил и моментов пар, $\mathbf{б}$ - вектор-матрица координат инерционных, а $\mathbf{c}$ - вектор-матрица координат силовых элементов механической модели, $\tilde{\mathbf{W}}_J = \left[\dfrac{\partial \mathbf{б}}{\partial \dot{\mathbf{p}}}\right]$, $\tilde{\mathbf{W}}_P = \left[\dfrac{\partial \dot{\mathbf{c}}}{\partial \dot{\mathbf{p}}}\right]$ - структурные матрицы инерционных и силовых элементов, определяемые через указанные координаты по нижеприведенной методике.

Эти уравнения формируются в ССКА КиДиМ автоматически по заданным в файле исходных данных спискам инерционных и силовых элементов [8, 10]. Эти элементы объединяют в себе указанные выше характеристики и координаты.

Если механическая система задана в обобщенных координатах и обобщенных скоростях, то в качестве координат инерционных элементов используются дуговые и прямолинейные перемещения центров масс и (или) углы поворота тел. В этом случае зависимости этих координат от обобщенных координат задаются *структурами* (*геометрическими структурами*) вида $\mathbf{б} = \mathbf{б}(\mathbf{q}, t)$. Если механическая система задана в обобщенных координатах и псевдоскоростях, то в качестве координат инерционных элементов используются линейные скорости центров масс и (или) угловые скорости тел В этом случае зависимости этих координат от обобщенных координат и псевдоскоростей задаются *дифференциальными структурами* в неявном $\mathbf{б} = \mathbf{б}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}(\dot{\mathbf{p}})$ или явном виде $\mathbf{б} = \mathbf{б}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{p}}, t)$. Аналогично, координаты силовых элементов задаются с помощью геометрических или дифференциальных структур как функции обобщенных координат $\mathbf{c} = \mathbf{c}(\mathbf{q}, t)$ или - обобщенных скоростей или псевдоскоростей неявно $\dot{\mathbf{c}} = \dot{\mathbf{c}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}(\dot{\mathbf{p}})$ или явно $\dot{\mathbf{c}} = \dot{\mathbf{c}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{p}}, t)$. Такие формулы позволяют программно построить структурные матрицы инерции, а также ускорения инерционных элементов соответственно в виде:

$$\mathbf{W}_J = \left[\frac{\partial \mathbf{б}}{\partial \mathbf{q}}\right],\ \mathbf{б} = \frac{d}{dt}\left(\left[\frac{\partial \mathbf{б}}{\partial \mathbf{q}}\right]\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{б}}{\partial t}\right) = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{W}_J\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{б}}{\partial t}\right) = \mathbf{W}_J\ddot{\mathbf{q}} + \ldots,$$

или через дифференциальные структуры с помощью матрицы $\mathbf{G}$ из формул (2):

$$\mathbf{W}_J = \left[\frac{\partial \mathbf{б}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right]\left[\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{\mathbf{p}}}\right] = \left[\frac{\partial \mathbf{б}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right]\mathbf{G},\ \mathbf{б} = \frac{d}{dt}\left(\left[\frac{\partial \mathbf{б}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right]\left[\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{\mathbf{p}}}\right]\dot{\mathbf{p}} + \frac{\partial \mathbf{б}}{\partial t}\right) = \mathbf{W}_J\mathbf{G}\ddot{\mathbf{p}} + \ldots = \tilde{\mathbf{W}}_J\ddot{\mathbf{p}} + \ldots,$$

или непосредственным дифференцированием по псевдоскоростям:

$$\tilde{\mathbf{W}}_J = \left[\frac{\partial \mathbf{б}}{\partial \dot{\mathbf{p}}}\right],\ \mathbf{б} = \frac{d}{dt}\left(\left[\frac{\partial \mathbf{б}}{\partial \dot{\mathbf{p}}}\right]\dot{\mathbf{p}} + \frac{\partial \mathbf{б}}{\partial t}\right) = \tilde{\mathbf{W}}_J\ddot{\mathbf{p}} + \ldots,$$

и структурную матрицу силовых элементов в виде:

$$\mathbf{W}_P = \left[\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \mathbf{q}}\right], \tag{4}$$

или через дифференциальные структуры с помощью матрицы $\mathbf{G}$:

$$\tilde{\mathbf{W}}_P = \left[\frac{\partial \dot{\mathbf{c}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right]\left[\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \dot{\mathbf{p}}}\right] = \left[\frac{\partial \dot{\mathbf{c}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right]\mathbf{G}, \tag{5}$$

или непосредственным дифференцированием по псевдоскоростям:

$$\mathbf{W}_P = \left[\frac{\partial \dot{\mathbf{c}}}{\partial \dot{\mathbf{p}}}\right]. \tag{6}$$

Это дает возможность автоматически получить все слагаемые в уравнениях (3).

Для механической системы с пространственным движением звеньев уравнения динамики представляются в виде [10]:

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^{n}\left\{\tilde{\mathbf{W}}_{C_i}^T m_i \vec{a}_{C_i} + \tilde{\mathbf{W}}_{\omega_i}^T\left(\left[\vec{J}_i\right]\cdot\vec{\varepsilon}_i + \vec{\omega}_i \times \left[\vec{J}_i\right]\cdot\vec{\omega}_i\right)\right\} - \tilde{\mathbf{W}}_P^T\mathbf{P} = 0, \tag{7}$$

где n – число твердых тел в модели, m_i, $[J_i]$, $\vec{a}_{C_i}$, $\vec{\omega}_i$, $\vec{\varepsilon}_i$ – масса, тензор инерции, ускорение центра масс, угловая скорость и угловое ускорение i-го тела, $\tilde{\mathbf{W}}_{C_i}$, $\tilde{\mathbf{W}}_{\omega_i}$ - структурные матрицы соответственно радиус-векторов центров масс и угловых скоростей тел, формулы для которых приведены ниже.

Векторы $\vec{a}_{C_i}$ задаются в абсолютной системе координат, а векторы $\vec{\omega}_i$, $\vec{\varepsilon}_i$ – в связанных с телами системах координат (обычно с осями - главными осями инерции). Структурные матрицы $\tilde{\mathbf{W}}_{C_i}$, $\tilde{\mathbf{W}}_{\omega_i}$ могут формироваться либо через матрицу $\mathbf{G}$ из выражений (2), либо непосредственным дифференцированием по псевдоскоростям аналогично плоскому случаю:

$$\tilde{\mathbf{W}}_{C_i}^u = \frac{\partial \vec{r}_{C_i}}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial \vec{v}_{C_i}}{\partial \dot{\mathbf{p}}} = \mathbf{W}_{C_i}^u\mathbf{G},$$

$$\tilde{\mathbf{W}}_{\omega_i}^u = \frac{\partial \vec{\omega}_i^{(i)}}{\partial \dot{\mathbf{p}}} = \mathbf{W}_{\omega_i}^u\mathbf{G}.$$

Таким образом, и кинематические параметры $\vec{a}_{C_i}$, $\vec{\omega}_i$, $\vec{\varepsilon}_i$ также программно формируются автоматически по геометрическим и дифференциальным структурам:

$$\ddot{\vec{r}}_{C_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_{C_i}}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \vec{r}_{C_i}}{\partial t}\right) = \frac{d}{dt}\left[\mathbf{W}_{C_i}^u\left(\mathbf{G}\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{г}\right) + \frac{\partial \vec{r}_{C_i}}{\partial t}\right] = \tilde{\mathbf{W}}_{C_i}^u\ddot{\mathbf{p}} + \ldots,$$

$$\vec{\omega}_i^{(i)} = \mathbf{W}_{\omega_i}^u\dot{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{W}}_{\omega_i}^u\dot{\mathbf{p}} + \ldots,\ \vec{\varepsilon}_i^{(i)} = \frac{d}{dt}\left(\tilde{\mathbf{W}}_{\omega_i}^u\dot{\mathbf{p}} + \ldots\right) = \tilde{\mathbf{W}}_{\omega_i}^u\ddot{\mathbf{p}} + \ldots.$$

Слагаемые в (7), порождаемые силовыми элементами, формируются аналогично плоскому случаю по формулам (4)-(6) в зависимости от того, как заданы их структуры.

При использовании матрицы **G** в вышеприведенных формулах, она (в транспонированном виде) в уравнениях (3), (7) является общим сомножителем, который можно вынести слева. Например, в пространственном случае получим уравнения в виде:

$$\mathbf{G}^T\left(\sum_{i=1}^{n}\left\{\mathbf{W}_{C_i}^{u\,T}m_i\vec{a}_{C_i}+\mathbf{W}_{\omega_i}^{u\,T}\left(\left[\vec{J}_i^{(i)}\right]\cdot\vec{\varepsilon}_i^{(i)}+\vec{\omega}_i^{(i)}\times\left[\vec{J}_i^{(i)}\right]\cdot\vec{\omega}_i^{(i)}\right)\right\}-\mathbf{W}_P^T\mathbf{P}\right)=0. \qquad (8)$$

Отсюда следует, что уравнения динамики неголономной системы могут быть получены линейной комбинацией уравнений динамики голономной системы с коэффициентами, взятыми из линейной формы, выражающей обобщенные скорости через независимые обобщенные скорости (псевдоскорости) (2). Полученные уравнения - это фактически векторно-матричная форма известных в аналитической механике «уравнений неголономных систем с исключенными зависимыми скоростями» [6].

Отметим также, что уравнения (7) с точностью до обозначений структурных матриц совпадают с уравнениями для голономных систем и отличаются только формированием структурных матриц, в них входящих. Существует два алгоритма автоматического генерирования уравнений движения для неголономных систем твердых тел [9, 10].

В основу первого [9] положен тот факт, что уравнения динамики неголономных системы (8) представляются определенной комбинацией уравнений, составленных для голономной системы. Поэтому, вначале составляются уравнения движения системы без учета кинематических структур (1). Затем путем их линейного комбинирования с ненулевыми коэффициентами матрицы **G** формируются уравнения (8).

Второй алгоритм [10] базируется на прямом вычислении коэффициентов структурных матриц для неголономной системы путем дифференцирования структур по псевдоскоростям и формированию уравнений (7) заменой там операций с обобщенными скоростями операциями с псевдоскоростями.

Наконец, в обоих алгоритмах для полноты системы уравнений необходимо добавить уравнения (2), а также в уравнение (7) и (8) вместо кинематических параметров каждого - линейного и углового ускорения и угловой скорости подставить их выражения, получаемые дифференцированием соответствующих структур по времени с учетом (2).

Прямая задача динамики механической системы заключается в определении движения (в обобщенных или псевдокоординатах) под действием приложенных сил. Задача сводится к интегрированию систем обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ) (7) или (8) совместно с (1) или (2) - для неголономных механических систем, с заданными начальными условиями.

Для численного интегрирования полученных в работе СОДУ рассмотрим алгоритмы для их преобразования к нормальной форме Коши в обобщенных координатах или псевдокоординатах. Для голономних систем введем векторы обобщенных ускорений и скоростей – $\mathbf{w}=\dot{\mathbf{v}}=\ddot{\mathbf{q}}$, $\mathbf{v}=\dot{\mathbf{q}}$ и перепишем уравнения (7) или (8) в виде:

$$\mathbf{M}\mathbf{w}=\mathbf{F}, \qquad (9)$$

где $\mathbf{M}=\sum_{i=1}^{n}\left\{\mathbf{W}_{C_i}^T m_i\mathbf{W}_{C_i}+\mathbf{W}_{\omega_i}^T\left[\vec{J}_i\right]\mathbf{W}_{\omega_i}\right\}$ – матрица инерции системы, F – вектор-матрица обобщенных сил системы за вычетом слагаемых из инерционных членов левой части (7) или (8), не содержащих обобщенных ускорений, который можно получить, подставив в аналитические выражения уравнений движения равные нулю псевдоускорения и взяв результат с обратным знаком, т.е.:

$$\mathbf{F}=-\mathbf{U}\big|_{\ddot{\mathbf{p}}=0}.$$

После разрешения системы (9) относительно обобщенных ускорений – $\mathbf{w}=\mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}$, окончательно получим СОДУ в форме Коши:

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{q}}=\mathbf{v}\\ \dot{\mathbf{v}}=\mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}\end{cases}. \qquad (10)$$

Аналогично, для систем, описываемых в псевдокоординатах (в обобщенных координатах и псевдоскоростях), а также для неголономных систем, форму Коши получим в виде:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{G}\mathbf{v} + \mathbf{g} \\ \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F} \end{cases}. \qquad (11)$$

Первое уравнение (11), при $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{p}}$, совпадает с выражением зависимых обобщенных скоростей через псевдоскорости (2).

Начальными условиями для системы (11) будут значения обобщенных координат и независимых обобщенных скоростей (псевдоскоростей) в начальный момент времени:

$$\mathbf{q}\big|_{t=0} = \mathbf{q}_0, \quad \mathbf{p}\big|_{t=0} = \mathbf{p}_0 .$$

В общем случае, построить в аналитическом виде обратную матрицу инерции $\mathbf{M}^{-1}$ не представляется возможным. При численном интегрировании на каждом шагу по времени матрица инерции вычисляется по значениям обобщенных координат на предыдущем шаге и для подсчета левых частей нижних векторных уравнений в (10) и (11) решается система линейных уравнений (9) методом Краута.

Рассмотрим движение многоэлементного транспортного агрегата из статьи [11], динамическая модель которого представлена на рис. 2.

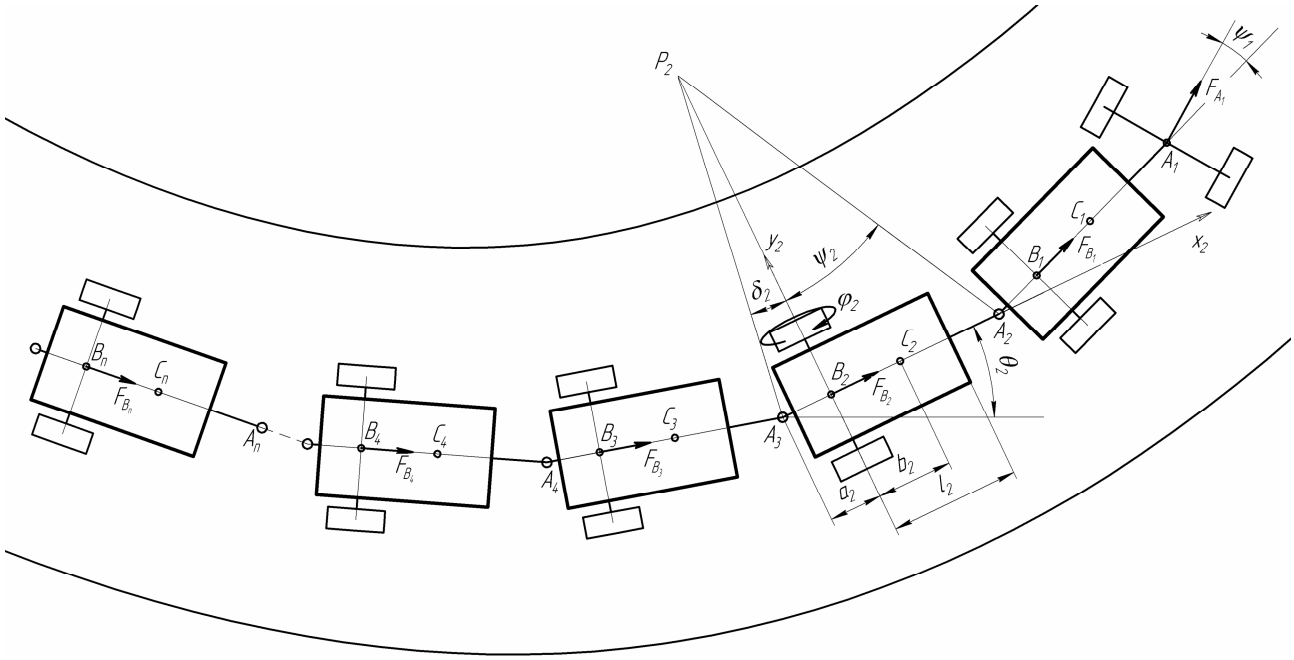


Рис. 2. Динамическая модель движения многоэлементного машинно тракторного агрегата

Голономные связи оставляют для плоской системы *n* тележек 3+(*n*-1) степеней свободы (3 степени - у ведущей тележки, как совершающей плоскопараллельное движение, и по одной вращательной степени свободы вокруг шарнира крепления тележек - для каждой последующей). Наличие неголономных связей, обусловливающих реализацию направления скоростей центров колес в плоскостях этих колес, приводит к тому, что число степеней свободы уменьшается до двух, а с учетом задания закона изменения управляющего угла $\psi_1(t)$, до одного. Это объясняется тем, что задание угла ψ_1 приводит к тому, что становятся определенными направления скоростей всех шарниров A_i (i=1, 2, …, n), а модули их выражаются через модуль одной из них, например, первой - $\left|\vec{v}_{A_1}\right|$. Так как в задаче предполагается движение в одну сторону (точнее сказать, все тележки огибают свои мгновенные центры скоростей (МЦС) в одну сторону), то вместо модулей скоростей можно использовать производные дуговых координат шарниров A_i - $\dot{s}_{A_i}$. Через эти скорости легко выражаются и угловые скорости тележек как угловые скорости их поворота вокруг своих МЦС. Таким образом, имеем:

$$\dot{s}_{A_{i+1}} = \dot{s}_{A_i}\sqrt{\cos^2\psi_i + \alpha_i^2\sin^2\psi_i}\,, \quad (12)$$

$$\psi_{i+1} = \theta_i - \theta_{i+1} - \delta_i\,,$$

$$\delta_i = \mathrm{arctg}\left(\alpha_i \mathrm{tg}\psi_i\right),\ \alpha_i = a_i / l_i\,,$$

$$\dot{\theta}_k = \dot{s}_{A_k}\sin\psi_k / l_k\,, \quad (13)$$

здесь $i = \overline{1, n-1}$, $k = \overline{1, n}$, n – число тележек.

Обратимся теперь к уравнениям (3). Чтобы найти входящие в эти уравнения структурные матрицы непосредственным дифференцированием, в качестве «координат» элементов механической модели надо взять скорости центров масс тележек и их угловые скорости. Тогда искомые матрицы сформируются дифференцированием этих «координат» по независимой скорости $\dot{s}_{A_1}$.

Кинетическая энергия каждой тележки определяется скоростью центра масс:

$$\dot{s}_{C_k} = \dot{s}_{A_k}\sqrt{\cos^2\psi_k + \beta_k^2\sin^2\psi_k}\,, \quad (14)$$

и угловой скоростью поворота ее в плоскости движения:

$$\omega_k = \dot{\theta}_k\,,\ k = \overline{1, n}\,. \quad (15)$$

Таким образом, инерционные элементы модели КиДиМ объединяют массы тележек и перемещения их центров масс вдоль траектори, а также моменты инерции тележек и их угловые скорости:

$$\left\{m_1,\, s_{C_1}\right\}, \left\{m_2,\, s_{C_2}\right\}, \ldots, \left\{m_n,\, s_{C_n}\right\}, \left\{J_{C_1},\, \omega_1\right\}, \left\{J_{C_2},\, \omega_2\right\}, \ldots, \left\{J_{C_n},\, \omega_n\right\}.$$

Поэтому структурные матрицы инерции и соответствующие слагаемые в скалярном уравнении (3) получат выражения

$$\tilde{\mathbf{W}}_J = \left[\frac{\partial\left\{\dot{s}_{C_1}, \dot{s}_{C_2}, \ldots, \dot{s}_{C_n}, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \ldots, \dot{\theta}_n\right\}^T}{\partial \dot{s}_1}\right] = \begin{bmatrix} \left\{\dfrac{\partial \dot{s}_{C_k}}{\partial \dot{s}_{A_k}} \prod\limits_{i=1}^{k-1} \dfrac{\partial \dot{s}_{A_i}}{\partial \dot{s}_{A_{i-1}}}\right\} \\ \left\{\dfrac{\partial \dot{\theta}_k}{\partial \dot{s}_{A_k}} \prod\limits_{i=1}^{k-1} \dfrac{\partial \dot{s}_{A_i}}{\partial \dot{s}_{A_{i-1}}}\right\} \end{bmatrix},\ k = \overline{1, n}\,,$$

$$\tilde{\mathbf{W}}_J^T\left[\mathbf{J}\right]\mathbf{б} = \tilde{\mathbf{W}}_J^T \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_n \end{bmatrix} & [0] \\ [0] & \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_n \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{s}_{C_1} \\ \ddot{s}_{C_2} \\ \ldots \\ \ddot{s}_{C_n} \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ldots \\ \ddot{\theta}_n \end{bmatrix}.$$

Здесь:

$$\frac{\partial \dot{s}_{C_k}}{\partial \dot{s}_{A_k}} = \sqrt{\cos^2\psi_k + \beta_k^2\sin^2\psi_k}\,,\ \frac{\partial \dot{s}_{A_i}}{\partial \dot{s}_{A_{i-1}}} = \sqrt{\cos^2\psi_i + \alpha_i^2\sin^2\psi_i}\,,\ \frac{\partial \dot{\theta}_k}{\partial \dot{s}_{A_k}} = \frac{\sin\psi_k}{l_k}\,,$$

а $\ddot{s}_{C_1}, \ddot{s}_{C_1}, \ldots, \ddot{s}_{C_1}, \ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2, \ldots, \ddot{\theta}_n$ получат свое выражение после дифференцирования структур (12) и (13).

В качестве действующих активных сил такой системы в статье [11] предлагается учесть движущую силу трения на ведущих колесах передней рамы, приведенную к т. A_1 и

перпендикулярную передней оси – $\vec{F}_{A_1}$, и силы сопротивления движению каждой тележки, приведенные к тт. B_k – $\vec{F}_{B_k}$, $k=\overline{1,n}$. Скорости тт. B_k легко определяются по скоростям тт. A_k и соотношению расстояний от них и от тт. A_k до мгновенных центров скоростей:

$$\dot{s}_{B_k} = \dot{s}_{A_k} \cos\psi_k . \qquad (16)$$

Таким образом, силовые элементы механической модели КиДиМ объединяют проекции сил $\vec{F}_{A_1}$ и $\vec{F}_{B_k}$ ($k=\overline{1,n}$) на дуговые координаты (скорости) т. A_1 и B_k соответственно и сами эти дуговые координаты (или скорости) этих точек:

$$\left\{F_{A_1},\, s_{A_1}\right\},\, \left\{F_{B_1},\, s_{B_1}\right\},\, \left\{F_{B_2},\, s_{B_2}\right\},\ldots,\, \left\{F_{B_n},\, s_{B_n}\right\}.$$

Поэтому структурная матрица сил системы, оставшиеся члены и само уравнение (3) получит выражение:

$$\tilde{\mathbf{W}}_P^T = \left[\frac{\partial \dot{\mathbf{c}}}{\partial \dot{\mathbf{p}}}\right]^T = \frac{d\left\{\dot{s}_{A_1},\, \dot{s}_{B_1},\, \dot{s}_{B_2},\ldots,\dot{s}_{B_n}\right\}}{d\dot{s}_{A_1}} = \left\{1,\, \cos\psi_1,\, \cos\psi_2,\ldots,\cos\psi_n\right\},$$

$$\tilde{\mathbf{W}}_P^T \mathbf{P} = F_{A_1} - \sum_{k=1}^{n} F_{B_k} \cos\psi_k ,$$

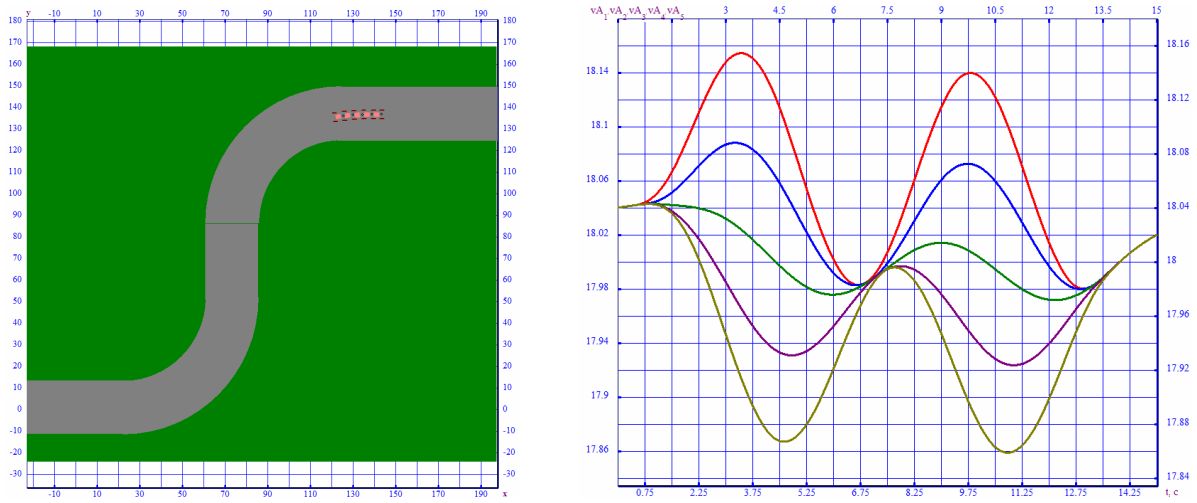
$$U = \sum_{k=1}^{n}\left(m_k \ddot{s}_{C_k}\sqrt{\cos^2\psi_k + \beta_k^2 \sin^2\psi_k} + J_k \dot{\omega}_k \sin\psi_k / l_k\right)\prod_{i=1}^{k-1}\frac{\partial \dot{s}_{A_i}}{\partial \dot{s}_{A_{i-1}}} - F_{A_1} + \sum_{k=1}^{n} F_{B_k}\cos\psi_k .$$

Тогда, матрица инерции и правая часть нижних уравнений в форме Коши представятся скалярными выражениями:

$$M = \frac{\partial U}{\partial \ddot{s}_{A_1}},\ F = U\big|_{\ddot{s}_{A_1}=0},$$

а в качестве уравнений верхней части системы (11) будут выступать выражения (12) – (16).

Результаты решения модели движения многоэлементного машинно-тракторного агрегата приведены на рис. 3. Мощность, затрачиваемая на движение многоэлементного машинно-тракторного агрегата, изменяется в пределах от 172 кВт до 186 кВт при движении по заданному манёвру (рис. 4).



а *б*

Рис. 3. Результаты решения модели движения многоэлементного машинно-тракторного агрегата представленные в графическом виде (а) и скоростей центров масс тележек s_{C_k} (б)

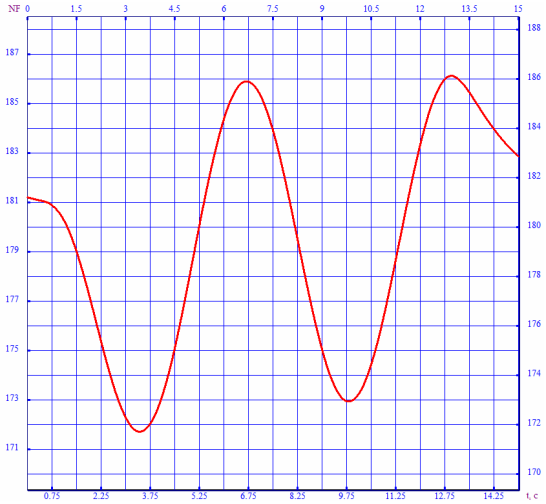


Рис. 4. Мощность, затрачиваемая на движение многоэлементного машинно-тракторного агрегата

Обоснованный автоматизированный подход к построению уравнений динамики неголономных систем, позволил рассчитать параметры движения многоэлементного машинно-тракторного агрегата.

Выводы. Применение специальной системы компьютерной алгебры КиДиМ (ССКА КиДиМ) позволяет автоматизировать решение задач динамики голономных и неголономных систем.

На примерах движения автопоезда и перекатывании тяжелого шара в сферической выемке опробована методика ССКА КиДиМ для задач неголономной механики, которая необходима для последующего изучения пространственного движения многоэлементного комбинированного машинно-тракторного агрегата как неголономной системы.

Динамические уравнения для таких систем в векторно-матричной записи автоматически формируются в ССКА КиДиМ по спискам инерционных и силовых элементов, а также уравнениям кинематических и геометрических связей, что позволяет упростить процесс исследования динамики агрегатов различных структур путем автоматического перестроения математической модели по изменяемой механической.

Список использованных источников

1. Павлюк А.С. Моделирование движения шарнирно-соединенной колесной машины в матлаб-Симулинк [Текст] / А.С. Павлюк, В.И. Поддубный, А.И. Валекжанин // Вестник Алтайского государственного аграрного университета. – 2008. – № 8 (46). – С.66-71.

2. Ямков О. В. Обґрунтування раціональної схеми компоновки і колії трактора бурякозбирального агрегата [Текст] / О. В. Ямков // Зб. наук. пр. Національний університет біоресурсів і природокористування України. – К.: НУБіП України. – Вип.144, ч.3. – 2010. – С. 399-409.

3. Авдеев В.М. Устойчивость и управляемость движения колесного шарнирно-сочлененного трактора по грунту в составе сельскохозяйственного агрегата: Автореф. дис. канд. техн. наук: 05.05.03 [Текст] / Харьковский политехнический инт. – Х. – 1985. – 22 с.

4. Рославцев А.В. Средства исследования движения МТА [Текст] / А.В. Рославцев, В.М. Авдеев, В.М. Третьяк, С.Л. Абдула и др. // Тракторы и сельскохозяйственные машины. – 1999. № 3. – С. 26 – 29.

5. Лурье А. И. Аналитическая механика / А. И. Лурье. – М.: Гл. ред. физмат. лит., 1961. – 824 с.

6. Неймарк Ю. И. Динамика неголономных систем / Ю. И. Неймарк, Н. А. Фуфаев. – М.: Наука, Гл. ред. физмат. лит., 1967. – 520 с.

7. Аппель П. Теоретическая механика: в 2-х т. / П. Аппель. – М.: Физматгиз, 1960. – Т. 2. – 244 с.

8. Андреев Ю. М. О динамике голономных систем твердых тел / Ю. М. Андреев, О. К. Морачковский // Прикл. механика. – 2005. – Т. 41, №7. – С. 130-138.

9. Андреев Ю. М. Компьютерное построение дифференциальных уравнений движения неголономных систем / Ю. М. Андреев, Л. И. Штейнвольф // Динамика и прочность машин: респ. междувед. науч.-техн. сб. – Харьков: ХПИ, 1993. – Вып. 54. – С. 93-98.

10. Андреев Ю. М. Компьютерное моделирование неголономных систем твердых тел на основе принципа Даламбера-Лагранжа / Ю. М. Андреев, О. К. Морачковский // Прикл. механика. – 2006. – Т. 42, №9. – С. 106-115.

11. Антонюк Е. Я. К теории движения сочлененного многозвенного автопоезда / Е. Я. Антонюк, В. М. Матиясевич // Прикл. механика. – 2002. – Т. 38, №7. – С. 138-144.

Список источников в транслитерации

1. Pavljuk A.S. Modelyrovanye dvyzhenyja sharnyrno-soedynennoj ko-lesnoj mashynы v matlab-Symulynk [Tekst] / A.S. Pavljuk, V.Y. Poddubnыj, A.Y. Valekzhanyn // Vestnyk Altajskogho ghosudarstvennogho aghrarnogho unyversyteta. – 2008. – № 8 (46). – S.66-71.

2. Jamkov O. V. Obgruntuvannja racionaljnoji skhemy komponovky i koliji traktora burjakozbyraljnogho aghreghata [Tekst] / O. V. Jamkov // Zb. nauk. pr. Nacionaljnyj universytet bioresursiv i pryrodokorystuvannja Ukrajiny. – K.: NUBiP Ukrajiny. – Vyp.144, ch.3. – 2010. – S. 399-409.

3. Avdeev V.M. Ustojchyvostj y upravljaemostj dvyzhenyja kolesnogho sharnyrno-sochlenennogho traktora po ghruntu v sostave seljskokhozjajstvennogho aghreghata: Avtoref. dys. kand. tekhn. nauk: 05.05.03 [Tekst] / Kharjkovskyj polytekhnycheskyj ynt. – Kh. – 1985. – 22 s.

4. Roslavcev A.V. Sredstva yssledovanyja dvyzhenyja MTA [Tekst] / A.V. Roslavcev, V.M. Avdeev, V.M. Tretjjak, S.L. Abdula y dr. // Traktorы y seljskokhozjajstvennыe mashynы. – 1999. № 3. – S. 26 – 29.

5. Lurj'e A. Y. Analytycheskaja mekhanyka / A. Y. Lurje. – M.: Ghl. red. fyzmat. lyt., 1961. – 824 s.

6. Nejmark Ju. Y. Dynamyka negholonomnыkh system / Ju. Y. Nejmark, N. A. Fufaev. – M.: Nauka, Ghl. red. fyzmat. lyt., 1967. – 520 s.

7. Appelj P. Teoretycheskaja mekhanyka: v 2-kh t. / P. Appelj. – M.: Fyzmatghyz, 1960. – T. 2. – 244 s.

8. Andreev Ju. M. O dynamyke gholonomnыkh system tverdыkh tel / Ju. M. Andreev, O. K. Morachkovskyj // Prykl. mekhanyka. – 2005. – T. 41, №7. – S. 130-138.

9. Andreev Ju. M. Kompjjuternoe postroenye dyfferencyaljnыkh uravnenyj dvyzhenyja negholonomnыkh system / Ju. M. Andreev, L. Y. Shtejnvoljf // Dynamyka y prochnostj mashyn: resp. mezhduved. nauch.-tekhn. sb. – Kharjkov: KhPY, 1993. – V. 54. – S. 93-98.

10. Andreev Ju. M. Kompjjuternoe modelyrovanye negholonomnыkh sys-tem tverdыkh tel na osnove pryncypa Dalambera-Laghranzha / Ju. M. Andreev, O. K. Morachkovskyj // Prykl. mekhanyka. – 2006. – T. 42, №9. – S. 106-115.

11. Antonjuk E. Ja. K teoryy dvyzhenyja sochlenennogho mnoghozvennogho avtopoezda / E. Ja. Antonjuk, V. M. Matyjasevych // Prykl. mekhanyka. – 2002. – T. 38, № 7. – S. 138-144.

ДО ПОБУДОВИ РІВНЯНЬ ДИНАМІКИ БАГАТОЕЛЕМЕНТНОГО МАШИННО-ТРАКТОРНОГО АГРЕГАТУ

Анотація. *У роботі обґрунтовується автоматизований підхід до побудови рівнянь динаміки неголономних систем. Розглядається методика застосування спеціальної системи комп'ютерної алгебри КіДіМ (ССКА КіДіМ) для розв'язання задач динаміки. Досліджується рух автопоїзда і задача про перекочування кулі в сферичній виїмці, які необхідні для подальшого вивчення просторового руху багатоелементного комбінованого машинно-тракторного агрегату. Динамічні рівняння і кінематичні зв'язку для таких систем в векторно-матричної записи формуються автоматично по заданих списками інерційних і силових елементів, що дозволяє спростити процес дослідження динаміки агрегатів різних структур шляхом автоматичного перестроювання математичної моделі за зміненою механічною.*

Ключові слова: *динаміка, машинно-тракторний агрегат, рівняння, кінематичні зв'язки.*

TO CONSTRUCTION OF EQUATIONS OF DYNAMICS MULTIELEMENT TRACTOR UNIT

Annotation. *In the work justified automated approach to the construction of equations of the dynamics of nonholonomic systems. The technique of using a special computer algebra system KiDiM (SSKA KiDiM) for solving dynamics. The motion of a train and the problem of rolling balls in a spherical recess, which are necessary for further study of the spatial movement of a multi-element combination of machine and tractor unit. Dynamic equations and kinematic constraints for such systems in vector-matrix form are automatically generated from the given list of inertia and force elements that simplifies the process of studying the dynamics of aggregates of different structures by automatically rebuilding a mathematical model to changes in the mechanical.*

Key words: *dynamics, tractor units, equations, kinematic constraints.*