



Заспа Ю. П.

Костогрыз С. Г.

*Хмельницький
національний
університет*

Шалапко Ю. И.

*Університет науки и
технологии, Быдгошч,
Польша*

Zaspa Yu. P.

Kostgryz S. G.

*Khmelnytskyi National
University*

Shalapko Yu. I.

*UTP University of Science
and Technology,
Bydgoszcz, Poland*

УДК 534.014.4

ФАЗО-ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ВИБРОРЕЗОНАНСЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ КОНТАКТНЫХ СИСТЕМАХ СУХОГО ТРЕНИЯ

Исследуется целостность номинально-неподвижных соединений, в частности низшая кинематическая пар, в условиях динамического нагружения. Составлена расчетная схема и дифференциальные уравнения движения. Анализ амплитудно-частотных характеристик и экспериментальные виброграммы инерционных колебаний обнаруживают выраженную дублетную структуру. Установлено что дублетность резонансного спектра колебаний не связана с известными решениями задач о колебаниях двухмассовой системы, поскольку при столь малом отношении обобщенных масс соответствующие резонансные частоты колебаний различаются на два порядка.

Ключевые слова: номинально-неподвижные соединения, контактная динамика, амплитудно-частотные характеристики, сухое трение.

Постановка проблемы. Исследования резонансных характеристик контактных систем сухого трения необходимы для обеспечения функциональной целостности номинально-неподвижных фрикционных соединений в условиях вибрации. Ввиду сильной нелинейности этих систем их изучение представляет также научный интерес в теории колебаний и динамике машин. Большинство работ в этой области выполнено в рамках жесткопластической модели Кулона [1-4], начиная с классической работ Ден-Гартога по динамике осциллятора с сухим трением и более поздними исследованиями.

В последние десятилетия активно разрабатывались также упругопластические модели контактного взаимодействия, учитывающие характерный масштаб формирования силы сухого трения – предельное предварительное смещение δ_s [5-11]. В работе [11] исследованы режимы

основного виброрезонанса при параллельном соединении механического контакта и линейно-упругого элемента, имеющие практическое применение, в частности, к конструированию субмикронных фрикционных демпферов контактного действия [12]. С точки зрения виброустойчивости фрикционного контакта и резонансных характеристик узлов сухого трения особый интерес представляет случай последовательного соединения нелинейного фрикционного контакта и линейных упругих элементов, реализующийся в большинстве конструкций машин и механизмов. Резонансные характеристики номинально-неподвижных фрикционных соединений такого типа экспериментально исследовались нами ранее [13], однако не получили исчерпывающего объяснения без соответствующей схемы расчета. В данной работе ставится задача построения расчетной динамической модели последовательного соединения нелинейного упругопластического



фрикционного контакта и линейно-упругих элементов, находящихся в условиях вибрационного воздействия.

Расчетные схемы и эксперимент.

Ниже приведена расчетная схема, адаптированная к условиям работы [13], и допускающая непосредственную экспериментальную проверку (рис. 1). Рассматривается массивное абсолютно жесткое тело, соединенное с основанием последовательно через фрикционный контакт и

упругий болтовой зажим. Контакт осуществляется между валом, на который посажено тело, и двумя накладками, присоединенными к двойному болтовому зажиму. Обобщенной массой накладок m пренебрегаем в сравнение с обобщенной массой тела M (в условиях работы [13] отношение соответствующих моментов инерции $m/M \sim 10^{-4}$).

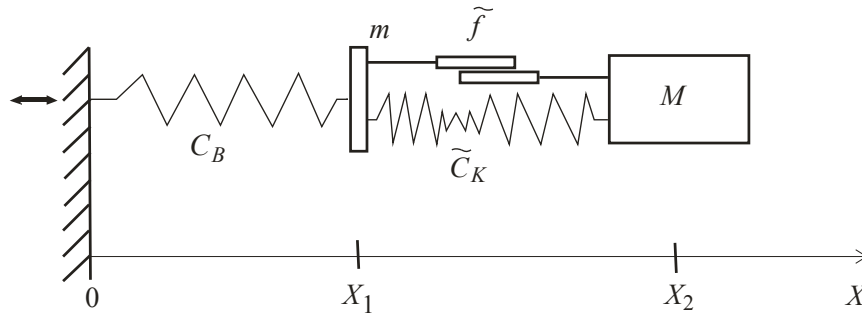


Рис. 1. Расчетная схема задачи

Обобщенной координате X в работе [13] соответствовал угол поворота вала и накладок относительно оправы основания. Последнее совершает кинематически-заданные реверсивные движения вдоль оси X (угловые в работе [13]) с амплитудой A , обуславливающие действие сил инерции $F_{in}^x = MA\omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$ на контртеле в рассматриваемой неинерциальной системе отчета, связанной с основанием. Здесь ω – циклическая частота колебаний основания, t – время, φ_0 – начальная фаза. Фрикционный контакт моделируется параллельным соединением нелинейно-упругого элемента с жесткостью \tilde{c}_k (на участках контактного сцепления) и нелинейного жесткопластического элемента \tilde{f} (на участках контактного проскальзывания). Вязкими свойствами контакта и соответствующей зависимостью коэффициента трения μ от скорости на участках проскальзывания пренебрегаем, т.о. используются допущения модели [10]. Жесткость болтового зажима C_B считается линейной. На рис. 2 показана схема практической реализации условий задачи, взятая из работы [13].

Анализ динамического движения в контактной паре. Уравнения движения для тела и накладок записываются в виде:

$$Mx_2'' = MA\omega^2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) + F_1^x + F_2^x \quad (1)$$

$$mx_1'' = mA\omega^2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) - C_B(x_1 - x_1^0) - F_1^x - F_2^x \quad (2)$$

Здесь x_2 – координата тела, x_1, x_1^0 – координата накладок и ее значение в равновесном положении болтового зажима, F_1^x, F_2^x – соответственно упругая и диссипативная составляющие проекций контактных сил, действующих на тело [10]. Штрихи здесь и далее обозначаем как дифференцирование по времени. При упрощении $m \rightarrow 0$, дифференцируя дважды уравнение (2), умножая его на M и деля на C_B , а затем вычитая результат из (1), приходим к одному уравнению движения тела относительно накладок:

$$M(x_2 - x_1)'' = MA\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) + F_1^x + \frac{M}{C_B}(F_1^x)'' + F_2^x + \frac{M}{C_B}(F_2^x)'' \quad (3)$$

Пренебрежение инертной массой m здесь эквивалентно квазистатическому усреднению быстрых упруго-инерционных движений, связанных с этой малой массой. В отличие от (1)-(2), в уравнение (3) входят помимо самих сил контактного трения также и



вторые их производные по времени, что определяет ключевую особенность задачи. Для ее решения целесообразно перейти к обозначениям, введенным в работе [10]. Будем использовать нормированное значение относительного контактного смещения $\tilde{x} = (x_2 - x_1) / \delta_s$, а также нормированные контактные силы $f_1 = -F_1^x / (\gamma\mu N)$, $f_2 \cdot \text{sign}(\tilde{x}') = -F_2^x / (\gamma\mu N)$, где γ - показатель степенной аппроксимации нормального контактного усилия N от контактного сближения, μ - коэффициент

трения скольжения на участках контактного проскальзывания [10]. Введем также величину циклической частоты начальных (нулевых) контактных колебаний тела M : $\omega_0 = (\tilde{C}_k^0 / M)^{1/2}$, где $\tilde{C}_k^0 = (\gamma\mu N / \delta_s)$ - начальная контактная жесткость [10]. Помимо ω_0 , используем также величину циклической частоты колебаний тела M на жесткости болтового зажима $\omega_B = (C_B / M)^{1/2}$. В таких обозначениях уравнение (3) запишется в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{x}'' + \omega_0^2 \cdot \left[f_1(\tilde{x}, a) + \frac{1}{\omega_B^2} (f_1(\tilde{x}, a))'' \right] + \omega_0^2 \cdot \left[f_2(\tilde{x}, a) + \frac{1}{\omega_B^2} (f_2(\tilde{x}, a))'' \right] \cdot \text{sign}(\tilde{x}') = \\ = \frac{A}{\delta_s} \omega^2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) \end{aligned} \quad (4)$$

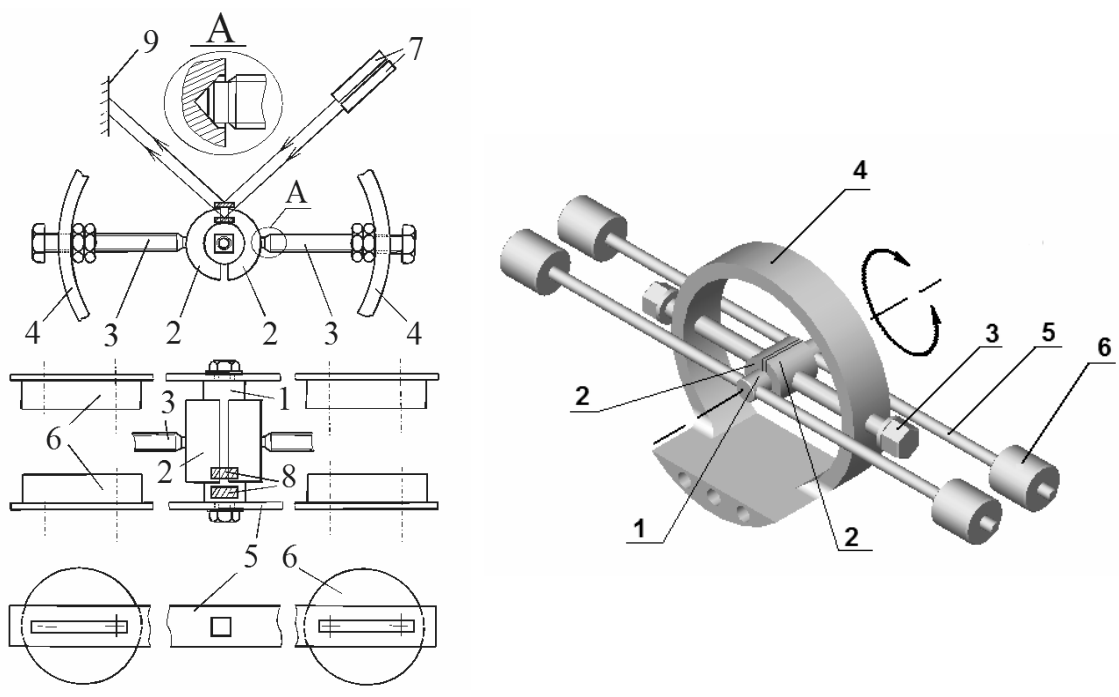
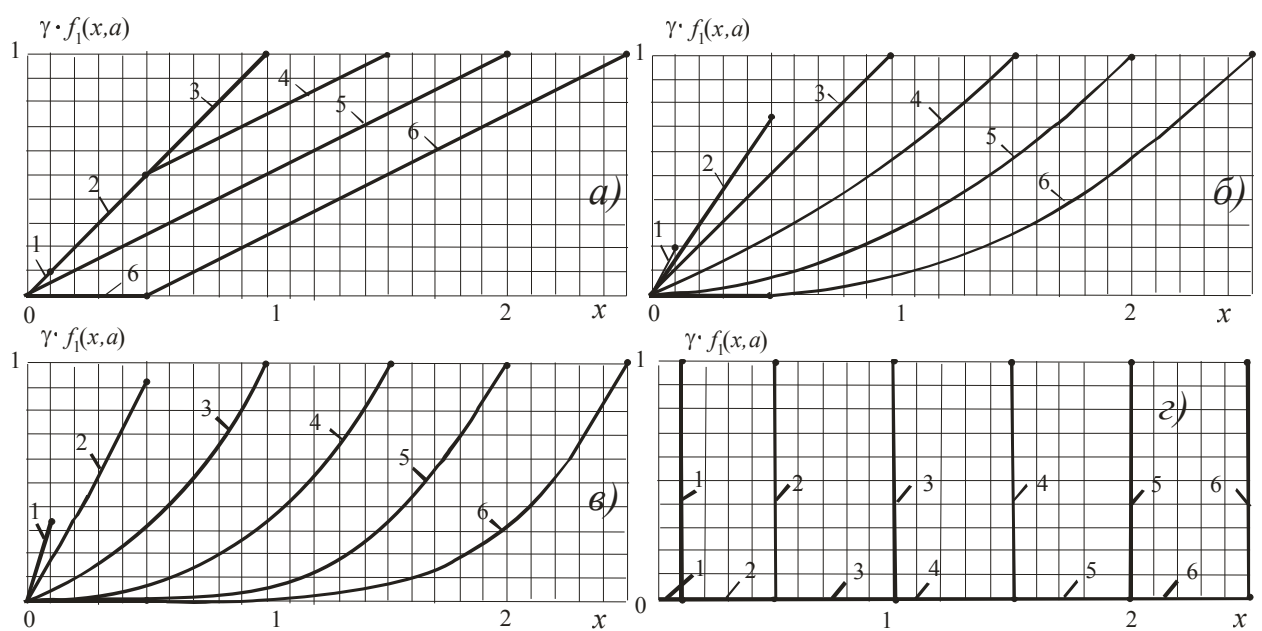


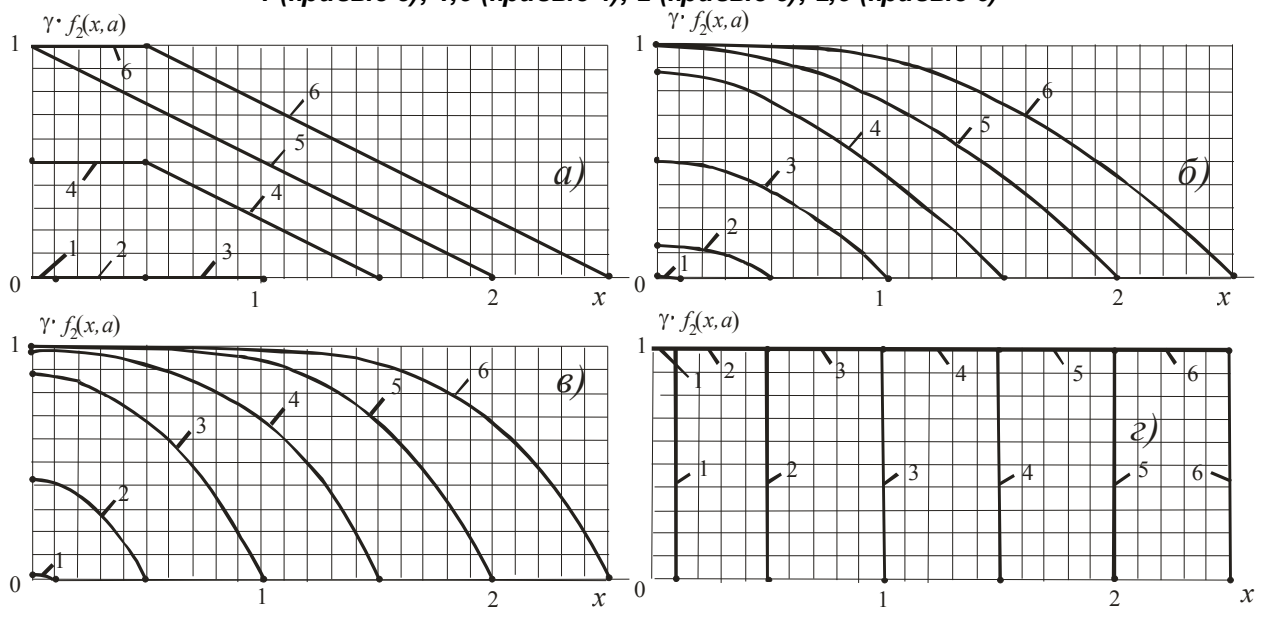
Рис. 2. Схема рабочего узла и оптической системы регистрации угловых колебаний вала и накладок: 1 – вал, 2 – накладки, 3 – болты, 4 – оправа, 5 – стержни крепления инерционных масс, 6 – инерционные грузы (жесткая система), 7 – лазеры, 8 – отражатели, 9 – экран

Функции $f_1(\tilde{x}, a)$, $f_2(\tilde{x}, a)$ зависят не только от относительного контактного смещения \tilde{x} , но и от его амплитуды $a = \left| \tilde{x}_{\max}^{\min} \right|$ (здесь рассматривается случай симметричных

колебаний) [10]. На рис. 3-4 приведены взятые из работы [10] графические зависимости $f_1(\tilde{x}, a)$, $f_2(\tilde{x}, a)$, рассчитанные для значений параметра $\gamma = 1, \gamma = 2, \gamma = 4, \gamma \rightarrow \infty$. Последний случай соответствует жесткопластической Кулоновой модели трения.



**Рис. 3. Зависимости $\gamma \cdot f_1(x, a)$ при значениях параметра γ : 1(а), 2(б), 4(в), $\gamma \rightarrow \infty$ (г).
Значения относительной амплитуды колебаний a : 0,1 (кривые 1); 0,5 (кривые 2);
1 (кривые 3); 1,5 (кривые 4); 2 (кривые 5); 2,5 (кривые 6)**



**Рис. 4. Зависимости $\gamma \cdot f_2(x, a)$ при значениях параметра γ : 1(а), 2(б), 4(в), $\gamma \rightarrow \infty$ (г).
Значения относительной амплитуды колебаний a : 0,1 (кривые 1); 0,5 (кривые 2);
1 (кривые 3); 1,5 (кривые 4); 2 (кривые 5); 2,5 (кривые 6)**

Полный анализ уравнения (4) с учетом сильной нелинейности функций f_1, f_2 весьма громоздок. Здесь будут проанализированы лишь наиболее важные в практическом плане резонансные режимы виброколебаний, где задача существенно упрощается. Отметим, что экспериментальные виброграммы инерционных колебаний в данной системе обнаруживают выраженную дублетную структуру. На рис. 5 приведен пример

амплитудно-частотной характеристики колебаний вала (и соответственно – тела M), взятый из работы [13]. По вертикали отложен коэффициент динамичности β , который определяется отношением амплитуды колебаний на заданной частоте возбуждения V к соответствующей амплитуде в пределе $\nu \rightarrow 0$. Первый резонансный дублет



представлен частотами V_1 и V_2 , а частоты V_3, V_4 соответствуют резонансам на вторых гармониках, более сильным ввиду квадратичной зависимости амплитуды вынуждающей силы инерции от частоты колебаний. На частоте V_3 уже видны эпизодические выходы посадки вал – накладки за пределы δ_s , отмеченные стрелками. На резонансной частоте V_4 реализуется срыв посадки и переход в режим контактного скольжения. При обратном понижении частоты первый дублет не воспроизводится (кривая 2).

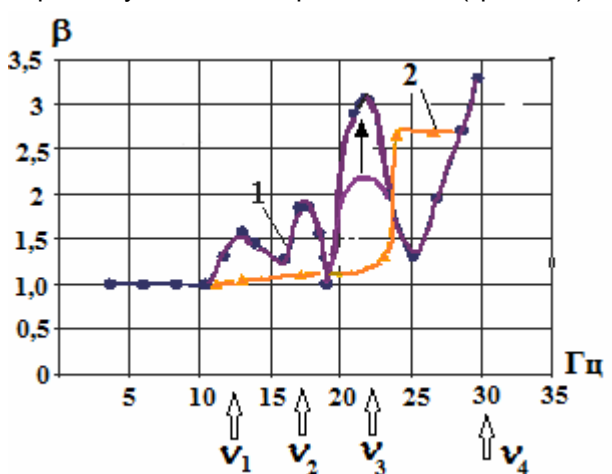


Рис. 5. АЧХ вынужденных инерционных колебаний вала, соединенного с грузами (1 – увеличение частоты, 2 – понижение частоты) [13]

Анализ уравнений (4) и экспериментальных виброграмм показывает, что низкочастотные составляющие резонансных дублетов (V_1, V_3) соответствуют последовательному соединению начальной контактной жесткости \tilde{C}_k^0 и жесткости болтового зажима C_B , в то время как высокочастотные составляющие (V_2, V_4) – колебаниям с частотой, определяемой одной лишь жесткостью C_B . Однако, наиболее неожиданной стороной рассматриваемой динамической системы является даже не сама дублетность резонансного спектра (не характерная, например, для параллельного соединения фрикционного контакта и упругого элемента [11], а тот факт, что высокочастотные составляющие дублетов обусловлены диссипативным членом уравнения движения, заключенным во вторые квадратные скобки в (4). Такая существенная особенность отличает нелинейные силы контактного взаимодействия как силы смешанного типа, одновременно определяющие частотные и декрементные свойства системы [10].

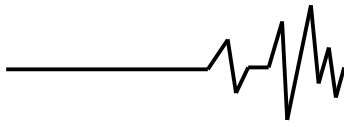
“Обычный” упруго-инерционный резонанс на частоте V_1 определяется первыми двумя членами в (4) квазилинейном приближении $f_1(\tilde{x}, a \ll 1) \approx \tilde{x}$ [10]. После элементарных преобразований здесь получаем:

$$\begin{aligned} \tilde{x}'' + \frac{\omega_0^2 \cdot \omega_B^2}{\omega_0^2 + \omega_B^2} \tilde{x} + \frac{\omega_0^2 \cdot \omega_B^2}{\omega_0^2 + \omega_B^2} \left[f_2(\tilde{x}, a) + \frac{1}{\omega_B^2} \cdot (f_2(\tilde{x}, a))'' \right] \cdot \text{sign}(\tilde{x}') = \\ = \frac{\omega_0^2 \cdot \omega_B^2}{\omega_0^2 + \omega_B^2} \cdot \frac{A}{\delta_s} \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) \end{aligned} \quad (5)$$

При $a \ll 1$ диссипативные функции f_2 малы (рис. 4), так что уравнение (5) описывает выраженный резонанс на частоте, соответствующей последовательному соединению жесткостей \tilde{C}_0^k и C_B . С увеличением амплитуды колебаний вследствие мягкого типа нелинейности фрикционного контакта [10] этот резонанс будет смещаться в сторону низких частот.

Наиболее важный, как уже отмечалось, результат расчета связан со второй – высокочастотной составляющей резонансных дублетов, определяемой сильной

нелинейностью функций $f_2(\tilde{x}, a)$ вблизи границы предварительного смещения ($a \sim 1$). Как следует из (4), диссипативное слагаемое во второй квадратной скобке стремится к нулю, если функция $f_2(\tilde{x}(t))$ гармонически изменяется во времени с циклической частотой ω_B , т.е. $f_2 \sim \cos \omega_B t$. Косинусоидальный вид здесь выбран из физических соображений ее соответствия фазе относительной скорости контактного скольжения при изменении смещения по синусоидальному закону $\tilde{x}(t) \approx a \cdot \sin \omega_B t$ (здесь удерживается лишь



основная гармоника смещения). В таком случае зависимость $f_2(\tilde{x}, a)$ будет иметь вид:

$$f_2(\tilde{x}, a) \sim [1 - (\tilde{x}/a)^2]^{1/2} \quad (6)$$

Как видно на рис. 4, расчетные зависимости $f_2(\tilde{x}, a)$ близки по форме к (6) в области границы предварительного смещения. При $\gamma = 4$ наилучшее соответствие наблюдается для относительных амплитуд $a \approx 0,5 - 1,5$, а при $\gamma = 2$ – для $a \approx 1 - 2$. По данным работы [13] значения параметра γ , найденные в квазистатике, как раз соответствуют этим случаям: $\gamma = 2 \div 3,5$. Отметим, что псевдодиссипативный резонанс не свойственен Кулоновой модели ($\gamma \rightarrow \infty$), т.к. соответствующие зависимости $f_2(\tilde{x})$ имеют прямоугольный вид (рис. 4 г), не отвечающий условию (6). Т.о. именно упругопластический характер реального контакта и его специфическая нелинейность обуславливают наличие вторых (более высокочастотных) составляющих резонансных дублетов в рассматриваемой системе. Отметим также, что полученная здесь дублетность резонансного спектра колебаний не связана с хорошо известными решениями задачи о колебаниях двухмассовой системы [14], поскольку при столь малом отношении обобщенных масс соответствующие резонансные частоты колебаний различаются на два порядка.

Выводы. С практической точки зрения, наличие номинально-неподвижных фрикционных соединений в составе машин и механизмов расширяет их виброрезонансный диапазон в сторону низких частот, что может иметь нежелательные последствия для целостности соединений при энергетической подпитке этих резонансов низкочастотным вибрационным фоном. Для повышения нижней границы резонансного спектра колебаний следует увеличивать контактную жесткость. Ввиду ограниченности контактного демпфирования колебаний, а также рассмотренных выше псевдодиссипативных резонансов, возникающих в системах сухого трения, целесообразно дополнительное внешнее демпфирование вибраций.

Список использованных источников

1. Den Hartog J.P. Forced vibrations with combined Coulomb and viscous friction // Trans. ASME. – 1931 (53), №15, P. 107–115.

2. Hong H.-K., Liu C.-S. Coulomb friction oscillator: modelling and responses to harmonic loads and base excitations // J. of Sound and Vibrations. – 2000 (229), №5, P. 1171–1192.

3. Xia F. Modelling of a two-dimensional Coulomb friction oscillator // J. of Sound and Vibration. – 2003 (265), №5, P. 1063–1074.

4. Liu C.-S., Hong H.-K., Liou D.-Y. Two-dimensional friction oscillator: group-preserving scheme and handy formulae // J. of Sound and Vibration. – 2003 (266), №1, P. 49–74.

5. Костогрыз С.Г., Ковалевский В.В., Осацкий Н.И. О влиянии некоторых характеристик качества поверхности на виброактивность механического контакта при малоамплитудном фреттинге // Трение и износ. – 1991 (12), №2, С. 219–224.

6. Костогрыз С.Г., Ковалевский В.В., Збитнев Е.А. Экспериментальное определение амплитудно-частотной характеристики механического контакта в области предварительного смещения // Трение и износ. – 1992 (13), №6, С. 979–984.

7. Максименко А.А., Перфильева Н.В., Котенева Н.В. Динамические контактные взаимодействия при сложном нагружении в условиях трения покоя // Изв. Вузов. Машиностроение. – 2002, №2-3, С. 28–37.

8. Перфильева Н.В. Динамическая модель упругого механического контакта в пределах трения покоя. – Новосибирск: Наука. – 2003.

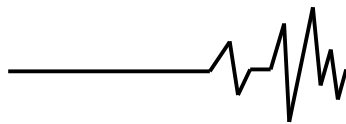
9. Berger E.J., Begley M. R., Mahajani M. Structural Dynamic Effects on Interface Response: Formulation and Simulation Under Partial Slipping Conditions // J. of Applied Mechanics. – 2000 (67), P. 785–792.

10. Заспа Ю.П. Нелинейные формы установившихся виброколебаний механического контакта. Симметричные тангенциальные колебания // Трение и износ. – 2007 (28), №1, С. 85–100.

11. Заспа Ю.П. Динамика осциллятора с сухим трением при учете предварительного смещения и тангенциальной контактной жесткости // Трение и износ. – 2007 (28). №6, С. 553–566.

12. Hinkle J.D., Peterson L. D., Warren P.A. Component level evaluation of a friction damper for submicron vibrations // Proc. 43 rd Structures, Structural Dynamics and Mat. Conf. – Denver, Colorado, USA. – 2002, P. 1–8.

13. Заспа Ю.П. Резонансные характеристики номинально неподвижных фрикционных соединений в условиях инерционного вибронгружения // Трение и износ. – 2005 (26), №2, С. 128–140.



14. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. – М. : Высш. школа. – 1980.

Список источников в транслитерации

1. Den Hartog J.P. Forced vibrations with combined Coulomb and viscous friction // Trans. ASME. – 1931 (53), №15, P. 107–115.

2. Hong H.-K., Liu C.-S. Coulomb friction oscillator: modeling and responses to harmonic loads and base excitations // J. of Sound and Vibrations. – 2000 (229), №5, P. 1171–1192.

3. Xia F. Modelling of a two-dimensional Coulomb friction oscillator // J. of Sound and Vibration. – 2003 (265), №5, P. 1063–1074.

4. Liu C.-S., Hong H.-K., Liou D.-Y. Two-dimensional friction oscillator: group-preserving scheme and handy formulae // J. of Sound and Vibration. – 2003 (266), №1, P. 49–74.

5. Kostohryz S.H., Kovalevskyy V.V., Osatskiy N.I. Pro vplyv deyakykh kharakterystyk yakosti poverkhni na vibroaktyvnist mekhanichnoho kontaktu pry maloamplitudnykh Frettynh // Tertya i znos. – 1991 (12), №2, S. 219–224.

6. Kostohryz S.H., Kovalevskyy V.V., Zbitnyev E.A. Eksperymentalne vyznachennya amplitudno-chastotnoi kharakterystyky mekhanichnoho kontaktu v oblasti poperednoho zmishchennya // Tertya i znos. – 1992 (13), №6, S. 979–984.

7. Maksymenko A.A., Perfilova N.V., Kotenyeva N.V. Dynamichni kontaktni vzayemodiyi pry skladnomu navantazhenni v umovakh tertya spokoju // Yzv. Vuziv. Mashynobuduvannya. – 2002, №2-3, S. 28–37.

8. Perfilova N.V. Dynamichna model pruzhnoho mekhanichnoho kontaktu v mezhakh tertya spokoju. – Novosybirsk: Nauka. – 2003.

9. Berger E.J., Begley M. R., Mahajani M. Structural Dynamic Effects on Interface Response: Formulation and Simulation Under Partial Slipping Conditions // J. of Applied Mechanics. – 2000 (67), P. 785–792.

10. Zaspа Yu.P. Neliniyni formy stalykh vibrokolebaniy mekhanichnoho kontaktu. Symetrychni tanhentsialni kolyvannya // Tertya i znos. – 2007 (28), №1, S. 85–100.

11. Zaspа Yu.P. Dynamika ostsylatora z sukhym tertyam pry obliku poperednoho zsvu i tanhentsialnoy kontaktynoy zhorstkosti // Tertya i znos. – 2007 (28), №6, S. 553–566.

12. Hinkle J.D., Peterson L. D., Warren P.A. Component level evaluation of a friction damper for submicron vibrations // Proc. 43 rd Structures, Structural Dynamics and Mat. Conf. – Denver, Colorado, USA. – 2002, P. 1–8.

13. Zaspа Yu.P. Rezonansni kharakterystyky nominalno nerukhomykh fryktsiynykh z'yednan v umovakh inertsiynoho vibronavantazhennya // Tertya i znos. – 2005 (26), №2, S. 128–140.

14. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. – М. : Высш. школа. – 1980.

ФАЗО-ОРТОГОНАЛЬНІ ВІБРОРЕЗОНАНСИ У НЕЛІНІЙНИХ КОНТАКТНИХ СИСТЕМАХ З СУХИМ ТЕРТЯМ

Анотація. Дослідження резонансних характеристик контактних систем сухого тертя необхідні для забезпечення функціональної цілісності номінально-нерухомих фрикційних з'єднань в умовах вібрації. У даній роботі ставиться завдання побудови розрахункової динамічної моделі послідовного з'єднання нелінійного пружно-пластичного фрикційного контакту та лінійно-пружних елементів, що знаходяться в умовах вібраційного навантаження.

Ключові слова: номінально-нерухомі з'єднання, контактна динаміка, амплітудно-частотні характеристики, сухе тертя.

PHASE-ORTHOGONAL VIBRATIONAL RESONANCE IN NONLINEAR CONTACT SYSTEMS WITH DRY FRICTION

Annotation. The researches of the resonance characteristics of dry friction of contact systems to ensure the functional integrity of the nominally-fixed friction joints under vibration are needed. In terms of vibration resistance of the frictional contact and resonance characteristics of dry friction nodes, the particular interest is the case of a serial connection of a nonlinear frictional contact and linear elastic elements that are implemented in most structures and machinery. In this paper, the task of constructing the estimated dynamic model of series connection of nonlinear elastic-plastic frictional contact and linear-elastic elements in terms of dynamic exposure. Analysis of the amplitude-frequency characteristics and experimental oscillograms inertial oscillations exhibit pronounced doublet structure. It has been established that the doublet resonance oscillation spectrum is not associated with the known solutions of the problem of the oscillations of a two-mass system, because with such a small ratio of generalized mass corresponding to the resonant frequencies of the oscillations differ by two orders of magnitude.

Key words: nominally-fixed joints, contact dynamics, frequency response, dry friction.